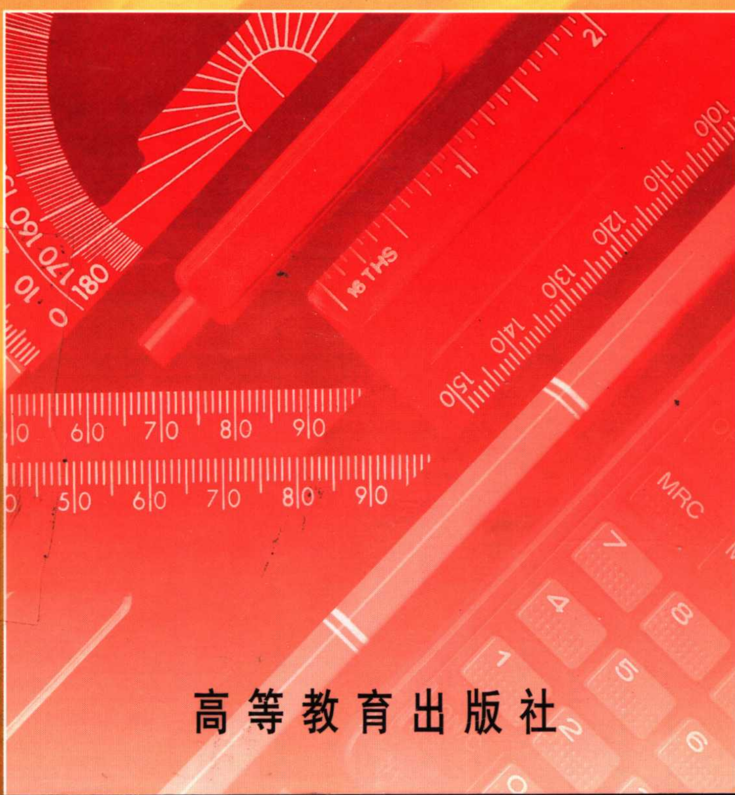
全国成人高等教育规划教材

高等数学

（大专使用）

上册

教育部高等教育司 组编



高等教育出版社

全国成人高等教育规划教材

大专使用

高等数学

上册

教育部高等教育司　组编

主编　李心灿

副主编　徐　兵　綦烘林

编委(以姓氏笔画为序)

计慕然　刘浩荣　刘　晓

吴　满　杨万禄　张魁元

金桂堂　龚冬保　谢　鹏

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/李心灿主编 .—北京:高等教育出版社,1999 (2002 重印)
ISBN 7－04－006972－5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 高等数学Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 07873 号

高等数学（大专使用）上册
教育部高等教育司　组编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	人民教育出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1999 年 6 月第 1 版
印　　张	10.75	印　　次	2002 年 9 月第 11 次印刷
字　　数	270 000	定　　价	12.70 元

内 容 提 要

本书按照教育部1998年颁布的《全国成人高等教育工学主要课程教学基本要求》"高等数学课程教学基本要求(专科用)"编写. 分上、下两册出版. 上册分6章,内容包括函数,极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用. 下册分5章,内容包括向量代数,空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程初步。节末有习题,章末有复习题. 其特点是:内容符合基本要求;例题、习题丰富,与正文密切配合;结合成人特点,注意培养应用意识,概念清晰,注意几何直观与物理解说;文字流畅,便于自学. 与此教材配套的,还有一本高等数学学习辅导书.

出版说明

为了加强成人高等教育教学的宏观管理，指导并规划成人高等教育的教学工作，保证达到培养规格，教育部于今年4月颁布了全国成人高等教育公共课和经济学、法学、工学等学科门类主要课程的教学基本要求．教学基本要求是成人高等教育的指导性教学文件，是成人高等教育开展有关课程教学工作和进行教学质量检查的重要依据．为了更好地和更迅速地贯彻这个教学基本要求，我司又组织制订了全国成人高等教育主要课程教材建设规划．经过有关出版社论证申报和教育部组织的成人教育专家评审，确定了各门课程教材的主编人选及承担出版任务的出版社．

承担任务的出版社，遴选了学术水平高、有丰富成人教育经验的专家参加教材及教学辅助用书的编写和审定工作．新编教材尽可能符合成人学习特点，较好地贯彻了成人高等教育教学基本要求．推广使用这套教材，对于加强成人高等教育的教学工作，提高教学质量，促进成人高等教育的改革与发展具有十分重要的意义．

首批完成的有公共课和经济学、法学、工学三大学科门类共81门主要课程的教材．由于此项工作是一项基础性工作，具有一定的开创性，可能存在不完善之处．我司将在今后的教学质量检查评估中，及时总结经验，认真听取各方反馈意见，根据教学需要，适时组织教材的修订工作．

教育部高等教育司

1998年12月1日

前　言

本书是全国成人高等教育规划教材之一.是编者根据教育部1998年颁布的全国成人高等教育工学专科高等数学课程教学基本要求编写的.

高等数学课程是成人高等教育工科各专业的一门必修的重要基础理论课,它对提高学员的科学.文化素质,为学员学习后继课程,从事工程技术和科学研究工作,以及进一步获得现代科学知识奠定必要的数学基础.

在编写中我们努力体现下述特点:

1. 严格按照教学基本要求,遵循成人教育的教学规律,在保证教学质量与普通高等学校“大体一致”的前提下,充分考虑成人教育的特点,以“必须”“够用”为度,加强素质培养.

2. 重点突出,难点分散,注重几何直观与物理解释,重视培养学员的几何想象能力、抽象概括能力、逻辑推理能力.

3. 为了便于自学,对基本概念、基本理论、基本方法,作了深入浅出的介绍,配备了较多的例题并附有一些解说,以便学员更好地理解、掌握它们的实质,并能将基本方法条理化,以培养学员的运算能力.

4. 为了培养学员应用数学的意识、兴趣和能力,教材中编入了较多的应用实例和习题.其中标有 * 号的例题和习题不作基本要求.

5. 为了辅导学员学习,编写了一本与教材配套的学习辅导书.该书按照教材章节对应编写,每章紧扣教学基本要求和主教材,都分为五个部分;教学基本要求;重点;应明确的几个问题;思考题分析;范例解析.其目的是帮助学员理出知识框架和脉络,领

会思想，掌握精髓，培养学员分析问题、解决问题的能力，使学习辅导书能成为学员不见面的辅导教师.

本书的编写和出版，自始至终得到了高等教育出版社有关领导及该社数学编辑室胡乃冏主任、张华副主任的重视，并给予了大力支持和帮助；清华大学居余马教授、林翠琴教授认真审阅了全部书稿，并提出了不少宝贵意见；责任编辑邵勇先生为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动，并提出诸多好建议.在此一并致以诚挚的谢意.

本书是由北京航空航天大学、浙江大学、西安交通大学、同济大学、天津大学、吉林工业大学、华南理工大学、华中理工大学、北方交通大学、北京西城区职工大学，共10所大学的12位数学教师组成的编委会合作编写的，全书由李心灿任主编、徐兵、蔡燧林任副主编，其中第一、二章由张魁元执笔，第三章由计慕然执笔，第四章由吴满执笔，第五、六章由金桂堂执笔，第七章由刘晓执笔，第八章由杨万禄执笔，第九章由龚冬保执笔，第十章由徐兵执笔，第十一章由刘浩荣执笔，书中的图皆由谢鹏用计算机绘制，最后由正副主编修改、统稿、定稿.

由于我们水平所限，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者批评指正.

编者

1999年1月

目　　录

第一章 函 数

初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系.函数正是这种依赖关系的体现.函数是高等数学中最重要的基本概念.本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上，进一步研究函数的性质，分析初等函数的结构.

§1.1 预备知识

一、实数集

随着社会的发展，人类逐步加深对数的认识.正整数首先被人类所认识，全体正整数构成的数集记为$\{1,2,\cdots\}$.为了使减法运算能够顺利进行，数的范围扩大到了**整数**，整数集 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.为了除法运算的顺利进行，数的范围扩大到了有理数，有理数集 $\mathbf{Q}=\{x\mid x=\frac{p}{q};p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\}$.即一个数是**有理数**，当且仅当它可以写成分数.

如果用十进制小数来表示有理数，则有理数被写成有穷的，或者是无限循环的小数.如$\frac{1}{2}=0.5$，$-\frac{1}{4}=-0.25$，$\frac{4}{3}=1.\dot{3}$.反之，有穷小数或无限循环小数都可以化成分数.

具有原点，正方向和长度单位的直线称为**数轴**.任何一个有理数都恰有数轴上的一个点与其对应.这种与有理数对应的点称为有理点.有理点在数轴上是处处稠密的，即在任意的两个有理点之间，仍有有理点.这是因为，对于任何不相等的两个有理数 a 和 b，

均有有理数$\frac{a+b}{2}$介于其间.虽然有理数在数轴上处处稠密,但有理点却未充满整个数轴.如圆周率π,边长为1的正方形的对角线长度$\sqrt{2}$,当它们被表示成十进制小数时,都不是有穷的或无限循环的.经计算$\pi = 3.141\,592\,6\cdots$,$\sqrt{2} = 1.414\,213\,5\cdots$.这种无限不循环小数称为**无理数**.无理数在数轴上对应的点叫做无理点.

有理数与无理数统称为**实数**,实数集记为$\mathbf{R}$.本书如无特殊声明,总是在$\mathbf{R}$上讨论问题.实数的全体充满了整个数轴,即实数不但是稠密的,而且是连续的.实数与数轴上的点形成了一一对应关系.实数系统可表示为:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{(无限不循环小数)}.\end{cases}$$

二、实数的绝对值

实数的绝对值是数学里经常用到的概念.下面介绍实数绝对值的定义及一些性质.

实数x的绝对值,记为$|x|$,它是一个非负实数,即

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例如,$|3.78| = 3.78$,$|-8| = 8$,$|0| = 0$.$|x|$的几何意义为数轴上点x到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质:

(1) 对于任意的$x \in \mathbf{R}$,有$|x| \geqslant 0$.当且仅当$x = 0$时,才有$|x| = 0$.

(2) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有$|-x|=|x|$.

(3) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有$|x|=\sqrt{x^2}$.

(4) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(5) 设 $a>0$,则$|x|<a$ 的充分必要条件是$-a<x<a$.

(6) 设 $a\geqslant0$,则$|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是$-a\leqslant x\leqslant a$.

(7) 设 $a\geqslant0$,则$|x|>a$ 的充分必要条件是$x<-a$ 或者 $x>a$.

(8) 设 $a\geqslant0$,则$|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是$x\leqslant-a$ 或者 $x\geqslant a$.

它们的几何解释是很直观的.例如性质(5),在数轴上$|x|<a$表示所有与原点距离小于a 的点x 构成的点集,$-a<x<a$ 表示所有位于点$-a$ 和点a 之间的点x 构成的点集,它们表示同一个点集.性质(6)—(8)可做类似的解释.

由性质(5)可以推得不等式$|x-A|<a$ 与$A-a<x<A+a$是等价的,其中 A 为实数,a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值,有以下的结论:

对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,恒有

(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ (三角不等式).

(2) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|\geqslant|x|-|y|$.

(3) $|xy|=|x||y|$.

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq0)$.

下面仅就结论(1)进行证明.

证 由性质(4),有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$及$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$,从而有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|.$$

根据性质(6),由于$|x|+|y|\geqslant0$(相当于性质(6)中 $a\geqslant0$),得

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

三、区间与邻域

区间是高等数学中常用的实数集，包括四种有限区间和五种无限区间，它们的名称、记号和定义如下：

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

无限区间 $(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$

其中 a,b 为确定的实数，分别称为区间的**左端点**和**右端点**. 闭区间$[a,b]$，半开区间$[a,b)$及$(a,b]$，开区间(a,b)为有限区间. 有限区间的左、右端点之间的距离 $b-a$ 称为**区间长度**. $+\infty$ 与 $-\infty$分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们不表示任何数，仅仅是记号.

区间在数轴上可如图 1.1 表示.

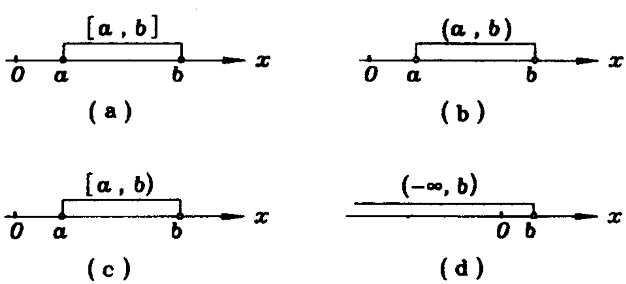


图 1.1

邻域也是在高等数学中经常用到的概念.

称实数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$,a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**.由邻域的定义知

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$$

表示分别以 $a-\delta,a+\delta$ 为左、右端点的开区间,区间长度为 2δ,见图 1.2.

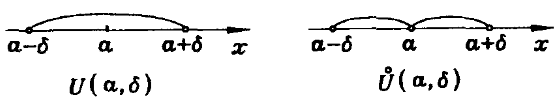


图 1.2

在 $U(a,\delta)$中去掉中心点 a 得到的实数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的**去心** δ **邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.显然,去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 是两个开区间$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$的并,即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,见图 1.2.

习题 1.1

1. 用区间表示下列范围:

(1) $x\leqslant 0$;　　(2) $-1\leqslant x<2$;

(3) $|x-2|<\varepsilon$;　　(4) $U(a,\delta)$.

§1.2 函数及其表示法

一、变量与常量

在观察自然现象或研究实际问题时,我们经常遇到各种各样

的量.如果一个量在某过程中是变化的,即可以取不同的数值,则称这种量为**变量**;如果一个量在某过程中保持不变,总取同一值,则称这种量为常量.本书中变量通常用 $x,y,t,\cdots$表示,常量通常用 $a,b,c,\cdots$表示.

例如,一列从天津直达北京的旅客快车在行驶过程中,列车的速度、列车距北京的距离及列车中的燃油重量都是变量,而列车中的旅客数和车箱节数是常量.在列车抵达北京站,旅客下车的过程中,列车的速度,列车距北京站的距离都是常量,而列车上的旅客数则是个变量.可见常量与变量都是对某一过程而言.

为了讨论问题的方便,常量可以看成是特殊的变量.

二、函数的概念

在同一个过程中,往往有几个变量同时存在,变量与变量之间的依赖关系正是高等数学研究的主要问题.本章只讨论两个变量的情况.先看下面的例子.

例 1 自由落体运动.设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么 s 与 t 之间的依赖关系由下式给定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,假定物体着地时刻为 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间$[0,T]$上任取一值时,由上式就可以确定相应的 s 值.

例 2 公用电话收费.在公用电话亭打市内电话,每 3 分钟收费 0.4 元,不足 3 分钟按 3 分钟收费,这样就规定了打电话用时 t 与费用S 之间的关系:

$$S=\begin{cases}0.4\left(\left[\frac{t}{3}\right]+1\right), & t>0,t\neq 3k,\\ \frac{0.4t}{3}, & t=3k,\end{cases}\quad k=1,2,3,\cdots,$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,例如$[0.6]=0$,$[2.31]=2$.

上面两个例子均表达了两个变量之间的依赖关系，每个依赖关系对应一个法则，根据各自的法则，当其中一个变量在某一数集内任取一值时，另一变量就有确定值与之对应．两个变量之间的这种依赖关系称为函数关系．

定义 设 x 和 y 是两个变量，X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集．如果对任何的 $x \in X$，变量 y 按照一定的规律，有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x).$$

称 X 为该函数的**定义域**．称 x 为**自变量**，称 y 为**因变量**．

当自变量 x 取数值 $x_0 \in X$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记为 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$．当 x 取遍 X 的各个数值时，对应的变量 y 取值的全体组成的数集称作这个函数的**值域**．

在函数 $y = f(x)$ 中记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应规则，也可以改用其它字母，如 F, φ, f_1, f_2 等．如果两个函数的定义域相同，并且对应规则也相同（从而值域也相同），那么它们就应该用同一个记号来表示．

在实际问题中，函数的定义域是由实际意义确定的．如例 1 中的定义域为 $[0, T]$，例 2 中的定义域为 $(0, +\infty)$．在研究由公式表达的函数时，我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集．例如，$y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是 $[-1, 1]$，函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 的定义域是 $(-1, 1)$．

例 3 求函数 $y = \dfrac{x+1}{x+3}$ 的定义域．

解 当分母 $x + 3 \neq 0$ 时，此函数式都有意义．因此函数的定义域为 $x \neq -3$ 的全体实数，用区间表示为：$(-\infty, -3)$ 和 $(-3, +\infty)$．

例 4 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解 要使函数 y 有定义,必须使

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0\end{cases}$$

成立,即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为

$$-4\leqslant x<-\pi \text{ 与 } 0<x<\pi,$$

所以函数的定义域为$[-4,-\pi)$与$(0,\pi)$.

例 5 求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=3,x=x_0+1,x=x_0+h$ 各点的函数值.

解 $f(3)=3^2-3\times 3+5=5.$

$$\begin{aligned}f(x_0+1)&=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5\\&=x_0^2-x_0+3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5\\&=x_0^2+2hx_0+h^2-3x_0-3h+5\\&=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).\end{aligned}$$

例 6 设有函数 $f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$,问它们是否为同一个函数?

解 当 $x\neq-1$ 时,函数值 $f(x)=g(x)$,但是 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$在 $x=-1$ 点无定义,其定义域为$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$.由于 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,所以它们不是同一个函数.

如果自变量在定义域内任取一个值时,对应的函数值只有一个,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.例如 $y=2x$ 是单值函数,由方程 $x^2+y^2=1$ 可确定 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.任取 $x\in(-1,$