李灏 颜汉洪

热·弹·性·学

李 灏 颜汉洪

热弹性学

湖 北 教 育 出 版 社

热弹性学

李　灏
颜汉洪

●

湖北教育出版社出版、发行　新华书店湖北发行所经销
通山县印刷厂排版、印刷
787×1092毫米32开本　5.25印张　2插页　111 000字
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷
印数：1－1 100
ISBN 7－5351－0381－2／O·8
定价：2.00元

内 容 提 要

热弹性学是力学的一个分支，是研究热对弹性固体的形变和应力影响的一门学科。最近三十年来，热弹性学有了很大发展，它的基本理论已经确立且成功地解决了工程上的许多问题。

本书主要根据H．Parkus的《热弹性学》和J. L. Norwinski的《热弹性学的理论与应用》两书，编译介绍了热弹性学的基本理论和应用。全书首先讨论了线性理论，进而按平面应力和平面应变讨论了二维问题，板的热弯曲和热屈曲问题。在第二章中同时介绍了实函数法和复函数法，列举了应用实例；第四章讨论了最普遍形式的热弹性学理论，为前几章的线性理论提供了严密的基础，第五章讨论了热弹性动力学问题，第六章介绍了热弹性学中的变分原理。

引　言

热弹性学是力学的一个分支。顾名思义，它研究的是热对弹性固体的形变和应力的影响。因此，它把等温弹性学的通常理论加以推广，不仅考虑一般的力，还探讨温度变化所引起的形变和应力。

热弹性过程不总是可逆的。因为尽管弹性部分可能是可逆的，冷却（至少在理论上）能恢复加热引起的形变，但热的方面无从恢复。存在这种现象的原因是由于热在转移时，特别是热传导时，会发生能量耗散。就是说，自动从热地方流到冷地方的热量，如果没有外来干涉，往往不会返回原处，不能恢复热的原来状态。

温度场对形变场的影响，不是单方向的现象。实验表明，物体的形变也要产生温度变化。换句话说，形变能起热源或热壑的作用。例如，在拉伸试验时，金属试件在断裂瞬间，摸起来往往烫手。

力和热两方面是耦合的，不可分的。事实上，这种耦合使实际热弹性问题的计算复杂起来，但是往往可以忽视这种耦合，分开来先计算温度场，然后再计算形变场。

虽然Duhamel和Neumann在十九世纪已奠定了热弹性学的理论基础，但这一领域里的研究直到第二次世界大战后才被广泛地重视起来。热弹性学又突然地而且持续地受到

重视，这是有原因的。首先，在航空事业中，现代飞机的高速化，导致气动加热，从而产生很大的热应力，并且由于弹性极限的减低，使飞机结构的强度下降。其次，在核工程中，产生在反应堆里极高的温度和温度梯度，影响了它的设计和运行。同样，在现代推进系统，如喷气和火箭发动机工程中，随燃烧过程而来的高温，是讨厌的热应力的根源。在宇宙飞行器和导弹技术中，在大型汽轮机的力学中，甚至在船舶工程中，都会遇到类似的现象。很奇怪，不太大的热应力居然常引起舰船的断裂。因此，热弹性学的学习和研究是十分必要和重要的。

Parkus的《热弹性学》〔1〕(注)和Norwinski的《热弹性学的理论与应用》〔2〕是近几年来两部很好的热弹性学著作。现在根据它们编译成讲义，供力学专业师生和有关工程研究人员学习和参考。

(注)方括号里的数字是书末参考文献的编号。

目　　录

第一章 线性化理论

热弹性学描述弹性体在非均匀温度场中的性质. 本构方程组依赖于温度,并包含Fourior定律。这个定律表示物体内热通量和局部温度梯度的关系，确定温度在体内的分布。

假如温度变化和形变都比较小，就可使基本方程组对应力、应变和温度线性化。微小形变在体内产生的热量很小，除某些特殊情况外，可以忽略不计。于是可把基本方程组分开，使热传导方程独立出来，确定温度场时不管应力和应变。最后，体内温度变化一般是缓慢的，相应的形变将缓慢进行。于是可忽略惯性效应。这样便导致一种简化的理论，所谓形变微小和温度变化微小而缓慢的热弹性学。这种理论在实际上很有用，因而是很重要的。

§1.1 基本方程

热弹性学有三个基本定律或公理：运动定律、质量守恒定理和能量守恒定理。

所谓微小形变是指相对于物体尺度来说比较微小的形变，于是在建立运动方程时，不必区分已变形的和未变形的物体。所谓微小温度变化，是相对于初始基准绝对温度来说比较微小的温度变化。于是假设应变线性地依赖于应力和温度，而热传导方程将是通常的Fourier方程。另外，因为热

传导是一渐近的过程，相应的变形将是缓慢的，因此可忽略惯性影响，于是运动方程简化为平衡方程。这意味着，随着温度的缓慢变化，物体经过连续的、一系列平衡位置缓慢运动而无任何显著的加速度。这就叫做**准静态的运动**。

用直角的Descartes坐标x_i（$i=1, 2, 3$），不考虑彻体力，连续体平动平衡方程是

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=0 \qquad (i,j=1, 2, 3) \qquad (1.1)$$

式中σ_{ij}为应力张量。我们采用Einstein求和约定。转动平衡要求

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$$

在线性化理论中，质量守恒定理简化为

$$\rho=\rho_0 \qquad (1.2)$$

式中ρ_0和ρ为初始和瞬时质量密度。

可用**弹性势**W表示材料的弹性

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (1.3)$$

这个应力和应变关系里的W，不仅依赖于应变ε_{ij}，还依赖于温度T。若函数W是二次型〔参看方程（1.9）〕，则σ_{ij}将同ε_{ij}与T线性相关，广义Hooke定律成立。

令温度$T=T_0+\Theta$，T_0和Θ分别为体内初始的均匀温度和温升。倘若线元ds能够自由的膨胀，则其长度将增到$(1+\alpha\Theta)ds$，α为热膨胀系数。现在考虑各向同性情况，α为标量。

广义Hooke定律可写成

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij}-\frac{\nu}{1+\nu}s\delta_{ij}\right)+\alpha\Theta\delta_{ij} \qquad (1.4)$$

式中G为切变模量，ν为Poisson比，s为应力张量的第一不变量，即

$$s=\sigma_{ii} \tag{1.5}$$

而Kronecker符号为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

解方程组（1.4）求σ_{ij}，得

$$\sigma_{ij}=2G\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ij}-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\Theta\delta_{ij}\right) \tag{1.6}$$

式中e为应变张量的第一不变量，

$$e=\varepsilon_{ii} \tag{1.7}$$

从方程组（1.4）或（1.6）可知

$$e=\frac{1-2\nu}{1+\nu}\cdot\frac{s}{2G}+3\alpha\Theta \tag{1.8}$$

利用方程组(1.6）和（1.3），得各向同性Hooke固体的弹性势

$$W=G\left\{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e^2-\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\Theta e\right\}+f(\Theta) \tag{1.9}$$

这里应注意

$$\frac{\partial e}{\partial\varepsilon_{ij}}=\delta_{ij}$$

第四章里将确定积分函数f（Θ），它在现在的线性理论里是不重要的，可以略去。

形变微小时，连续体应变和位移u_i的运动关系是

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.10}$$

线性热弹性学的基本方程组共含15个方程，即方程组(1．1)，(1．3)和(1．10)。待定量σ_{ij}，ε_{ij}和u_i也是15个。这里不考虑形变与温度的耦合，因此不象热弹性学的普遍情况那样，把温度Θ作为待定量。

§1.2 温度场

单位时间里流过单位面积面元的热量q，同面元法线n方向的温度梯度成比例（Fourier定律），即

$$q = -k\frac{\partial\Theta}{\partial n} \qquad (1.11)$$

k称为材料的**热导率**，热通量

$$q_i = -k\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} \qquad (1.12)$$

因此单位时间里流向单位体积体元的热量为

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = k\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_i} = k\nabla^2\Theta$$

于是得热平衡方程

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = a\nabla^2\Theta + \frac{S}{c\rho} \qquad (1.13)$$

c为比热，系数a由下式确定

$$a = \frac{k}{c\rho} \qquad (1.14)$$

S表示热源分布的强度，即单位时间里单位体积中产生的热量。

对于定常（不依赖于时间）的无源温度场，方程（1．13）化为

$$\nabla^2\Theta = 0 \qquad (1.15)$$

为了完整地陈述方程（1．13），还要指明初始条件和

边界条件。最简单的情况是指明作为空间和时间函数的表面温度T_s。更现实（但数学上更复杂）的边界条件，是指明周围介质的温度T和将热传导给物体的定律，这个定律的一种线性化的表述就是Newton热传导定律

$$k\left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right)_s=\lambda\ (T-T_s) \tag{1. 16}$$

$T-T_s$是周围介质和物体表面的温差，而λ是热传导系数。

作为定常温度分布的例子，考虑内径a和外径b的圆管。内外表面分别保持在定常均匀温度T_a和T_b。两端平面完全绝缘以防热的损失。现在寻求管中定常的温度分布。

显然，宜用柱极坐标（r，θ，z），于是Laplace调和算子为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1. 17}$$

这里温度只是径向距离r的函数，$\Theta=\Theta(r)$，方程（1. 15）便化为

$$\nabla^2\Theta=\frac{d^2\Theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{d\Theta}{dr}=\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Theta}{dr}\right)=0$$

或

$$\frac{d\Theta}{dr}=\frac{C_1}{r}$$

它有解

$$\Theta=C_1\ (\log r+C_2)$$

边界条件是

在$r=a$处，　$T_0+\Theta=T_a$

在$r=b$处，　$T_0+\Theta=T_b$

T_0为均匀的基准温度。取$T_a-T_0=\Theta_a$，$T_b-T_0=\Theta_b$，

求得常数

$$C_1=\frac{\Theta_b-\Theta_a}{\log b/a}\qquad C_2=\frac{\Theta_a\log b-\Theta_b\log a}{\Theta_b-\Theta_a}$$

解最后成为

$$\Theta=\frac{1}{\log b/a}\left(\Theta_a\log\frac{b}{r}+\Theta_b\log\frac{r}{a}\right)\tag{1.18}$$

作为非定常情况的例子，考虑无限物体中瞬时热点源。在时间$t=0$时，有热量Q在原点产生温度的不连续跳跃，热立即在体内散开，原点温度下降，其他点则先升温而后降温。足够长的时间后，物体回复到它的初始温度。

温度场显然是对原点对称的，温度只是径向距离R的函数，$\Theta=\Theta(R)$，于是有

$$\nabla^2\Theta=\frac{\partial^2\Theta}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\Theta}{\partial R}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)\tag{1.19}$$

方程（1.13）化为

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\frac{a}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)\tag{1.20}$$

用Laplace变换

$$f^*(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt$$

注意初始条件$\Theta(0)=0$，得

$$s\,\Theta^*=\frac{a}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\Theta^*}{dR}\right)$$

这是一个Bessel方程，但若令$u^*=R\Theta^*$，则可将这个方程化为

$$\frac{d^2u^*}{dR^*} - \frac{s}{a}u^* = 0$$

其解为

$$u^* = Ae^{-R\sqrt{s/a}} + Be^{R\sqrt{s/a}}$$

从问题的物理意义看来，无穷远处（$R \to \infty$）的温度Θ及其变换Θ^*即使不为0，至少也应有界。根据L'Hospital法则，当$R \to \infty$时，$e^{R\sqrt{s/a}}/R \to \infty$，因此$B = 0$，而

$$\Theta^* = \frac{A}{R}e^{-R\sqrt{s/a}}$$

在$t > 0$的任何时间里，这个无限体中的热量将保持为Q，故有

$$Q = \int_0^\infty \rho c \Theta 4\pi R^2 dR$$

用Laplace变换，得

$$\frac{Q}{s} = 4\pi\rho c\int_0^\infty \Theta^* R^2 dR$$

$$= 4\pi\rho c A\int_0^\infty e^{-R\sqrt{s/a}} R dR = 4\pi\rho c A\frac{a}{s}$$

因此

$$A = \frac{Q}{4\pi a\rho c}$$

而

$$\Theta^* = \frac{1}{4\pi a}\frac{Q}{\rho c}\frac{1}{R}e^{-R\sqrt{s/a}}$$

反演得

$$\Theta = \frac{1}{(4\pi a t)^{3/2}}\frac{Q}{\rho c}e^{-R^2/4at} \qquad (1.21)$$

可见，在足够长的时间后，即$t \to \infty$时，物体处处的温度$\Theta(R, t) \to 0$。

§1.3 无应力的温度场

现在研究温度场不产生应力的最普遍的条件。

设$\sigma_{ij}=0$时，

$$\varepsilon_{ij}=\alpha\Theta\delta_{ij}。$$

代入相容方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3{}^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2{}^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3{}^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial x_3\partial x_1}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1{}^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}\right\}(1.22)$$

得

$$\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_3{}^2}=0$$

$$\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_3{}^2}+\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_1{}^2}=0$$

$$\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_2{}^2}=0$$

即

$$\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_1{}^2}=\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_2{}^2}=\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_3{}^2}=0$$

还有

$$\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_2\partial x_3}=0,\quad\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_3\partial x_1}=0,\quad\frac{\partial^2(\alpha\Theta)}{\partial x_1\partial x_2}=0$$