职工中等专业学校试用教材学习指导书

三角

SANJIAO

XUEXI ZHIDAOSHU

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书

三　　角

职工中等专业学校教材编写组　编

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书
三　角
职工中等专业学校教材编写组　编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号)
新华书店经销　南漕印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 4.25　字数 102,000
1987年7月第1版　1987年7月第1次印刷
印数：1—9,200
统一书号：ISBN 7-80513-008-6/G·02
定价：1.00元
《科技新书目》148-272

编 写 说 明

这本学习指导书是根据职工中等专业学校数学教材《三角》编写的，主要供职工中等专业学校学员学习时使用，也可以供有关教师备课时参考.编写本书的目的，在于帮助学员解决学习时可能遇到的困难，使他们能重点地、系统地和较深入地领会教材内容.基于上述目的，编写时按教材顺序分章编写，采用了全面指导、重点解释的方法，使重点内容得到强化，难点转化为易，并着重引导解题方法，总结解题规律. 对平面三角中的几个主要问题(如恒等式的证明，三角公式的灵活运用，单位圆及三角函数的图象等)在各章的学习指导中将适当分工、各有侧重地叙述. 各章还备有自我检查题，并附解答，供学员检查学习效果.

本书的编者是项复民、黄中元、周振东同志，希望使用本书的学员和教师对本书提出宝贵意见.

编者

1986.3.1

目　　录

第一章　任意角的三角函数

一、学习要求

1．理解扩充角的概念的必要性，掌握与角α终边相同的角、象限角的表示方法．

2．掌握角的两种基本度量方法：角度制与弧度制，并能熟练地互化，掌握弧度制下的弧长公式及其应用，领会弧度制的优越性．

3．理解任意角三角函数的一般性定义，掌握三角函数值在各个象限的符号、同角三角函数间的基本关系，并能熟练地求三角函数值．根据三角函数值作角，化简三角函数式和证明三角恒等式．

4．理解三角函数的周期性，掌握基本三角函数周期的求法．

二、学习指导

（一）本章的中心

建立任意角三角函数的定义，讨论同角三角函数的基本关系．

从本章起，应逐步习惯用弧度制表示角的大小，并能化简三角函数式和证明三角恒等式．

（二）章节学习指导

1. 角的概念的推广

角的概念推广以后，应注意下列各角之间的联系和区别：

(1) “锐角”含意仅为：$0°<\alpha<90°$；

(2) “第一象限的角”含意拓广为：

$k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°$，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$

(3) “$0°$ 到 $90°$ 的角”含意为：$0°\leqslant\alpha\leqslant90°$，包含了 $0°$ 和 $90°$；

(4) “小于 $90°$ 的角”含意为：$\alpha<90°$，它可以是负角.

角的概念推广以后，出现了正角、负角和零角，它们都是由于角的终边因旋转方向不同或不动而产生的. 同时为了进一步研究的需要，将角放在标准位置，即角的顶点重合于坐标原点，始边重合于 x 轴正向，看终边所在的位置. 如果终边落在第几象限，则称这个角为第几象限角；如果终边落在坐标轴上，这个角不属象限角，可称为象间角.

2. 弧度制

表 1-1

度量制名称	基本度量单位	名称	主要应用范围	备　　注
角度制	$\frac{1}{360}$ 圆周	度	通　　常	
弧度制	$\frac{1}{2\pi}$ 圆周	弧度	科学技术	课本第 1～2 节
密位制	$\frac{1}{6000}$ 圆周	密位	军　　事	课本复习题一第 3 题
方　位	$\frac{1}{32}$ 圆周	方位	测　　量	课本习题 1-1 第 9 题
小　时	$\frac{1}{24}$ 圆周	小时	天　　文	课本习题 1-1 第 8 题
…	…	…	…	

弧度制同角度制一样，是表示角与弧的一种度量制度，它是测量角大小的一种思想方法．从课本中我们还可以看到表 1-1．

由此看出，弧与角的度量是可根据实际需要，在一定范围内采用比较适宜的不同度量制，但其共同点都是将圆周角的若干分之一作为一个基本单位．我们在实践中也可以类似地根据需要，"创造"一个适宜的基本度量单位，不过，应该是合理的，能够在某一方面广泛使用的．

弧度制与角度制互化的关键是

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \boxed{\pi\text{ 弧度}=180^\circ} \arrow[dl, "\div\pi"'] \arrow[dr, "\div 180"] & \\ \boxed{1\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}} & & \boxed{1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度}} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

只要记住了(*)式，度化弧度和弧度化度的公式可以很容易地推导出来（如上式）．不过为了提高运算速度，对于一些常用的特别角如 $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \cdots$ 等角的互化是应该熟记的．

引进弧度制以后，与角 α 终边相同的角的一般形式可表示为

$$2k\pi+\alpha \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

用集合形式可表示成

$$\{\beta \mid \beta=2k\pi+\alpha, k\in Z\} \qquad (Z\text{ 为整数})$$

从弧度制下的弧长公式 $L=|\alpha|R$ 可以看出引进弧度的优越性．事实上，不仅是弧长公式简化了，凡涉及到圆心角、半径和弧度的公式都可起到简化作用，如圆扇形面积公式由

$$S=\frac{2\pi}{360}R^2$$

简化成 $$S=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}LR.$$

3．三角函数的定义与三角函数线

锐角三角函数是通过直角三角形中边与边的比值去定义的，自变量的范围是锐角．

任意角的三角函数，是在平面直角坐标系中，以任意角的弧度数(实数)为自变量，函数仍是一个比值．

在三角函数的定义中，自变量是角，函数是比值，比值的大小与 P 点在终边上的位置无关，仅与角的大小有关．可以应用相似形的知识去证明上述结论，如图 1-1．

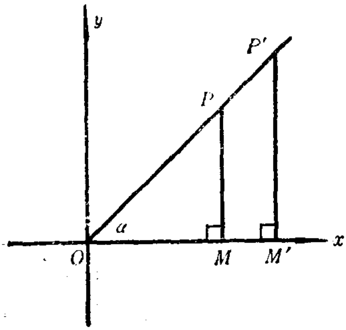


图 1-1

在 OP 上任取一点 P'，过 P' 作 x 轴的垂线交 x 轴于 M'，于是

$$\triangle OMP \backsim \triangle OM'P'$$

根据相似三角形对应边成比例的性质知，任意角的三角函数的定义是具有一般性的．

因为角的终边上任意一点 P 到坐标原点的距离 OP 总是正的，所以三角函数值的符号就只与 P 点的坐标有关．正弦、余割决定于 P 点的纵坐标 y 的符号，余弦、正割决定于点的横坐标 x 的符号，正切、余切则同时决定于 P 点的横坐标 x 与纵坐标 y 的符号．

用单位圆中的线段表示三角函数值，不仅形象直观，而且易于理解三角函数的意义，这对于进一步研究三角函数的性质提供了良好的工具．所以，如果说将角放在直角坐标系上定义三角函数是为了用代数方法研究任意角三角函数的性质，那么，将三角函数用单位圆来表示，是用几何直观的方法来说明和加深三角函数的意义和性质．在这一章中我们可以看到三角函数线

的主要应用如下：

(1) 根据三角函数值作角. 如已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，求作在 $0\sim 2\pi$ 间的角 α(课本第 1-5 节).

(2) 根据三角函数值的范围确定角的范围，如根据 $\cos\varphi>\cos\frac{\pi}{6}$，求锐角 φ 的范围(课本习题 1-3 第 3 题).

(3) 研究三角函数在各个象限的增减情况(课本第 1-4 节练习第 3 题).

(4) 直观地说明三角函数间的基本关系. 如平方关系：

$$\sin^2x+\cos^2x=1.$$

在单位圆中，直角三角形 OMP 中

$$MP^2+OM^2=OP^2.$$

在学习三角函数线时我们还可直观看到 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$，$\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha$，(课本第 1-4 节练习第 2 题).

当然，三角函数线的应用是广泛的，以后，我们还要逐步扩大它的应用.

4. 同角三角函数的基本关系

同角三角函数之间的基本关系，共计三组八个公式，是本章的主要内容.

在应用同角三角函数的基本关系时，我们应注意：

(1) 要弄清"同角"的含义. 如 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$ 就不一定成立了.

(2) 要记住八个公式都是对于使它们有意义的那些角而言的，如 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 中 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 今后遇到的公式也是如此.

(3) 要区分公式中的"$\sin^2\alpha$"表示$(\sin\alpha)^2$，读作"$\sin\alpha$ 的平方"，应与 $\sin\alpha^2$ 严格区别开来：这里表示的是角 α 的平方的正弦，而 $\sin^2\alpha$ 是角 α 的正弦的平方，两者是完全不同的，不仅在读法上有区别，而且更重要的是要在意义上加以区别.

三角式的恒等变形，涉及到大量的公式，如果在运算时把公式一一排队，拿来套用，不仅费时、易错，而且也难以记忆大量公式. 我们学习时应做到"脑中有图，变换靠式"，把基本公式推导建立在几何图形的基础上，而对派生的公式，则根据代数式的恒等变形关系，把它和基本关系式紧密联系起来. 这样，可做到公式少而精，印象深刻，便于应用. 下面以同角三角函数关系为例加以说明.

(1) 根据锐角三角函数的定义画图 1-2 (即单位圆中 $Rt\triangle OMP$)，就可得

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha;$$

$$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

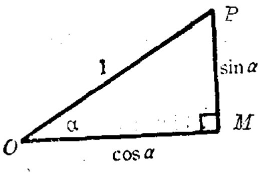


图 1-2

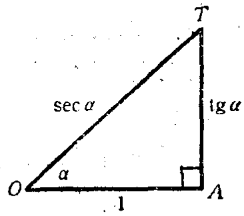


图 1-3

(2) 如果取角 α 的邻边长为单位长，根据锐角三角函数的定义画图 1-3(即单位圆中 $Rt\triangle OAT$)，就可得

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;$$

$$\sec^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha = 1;$$

$$\sec^2\alpha - 1 = \mathrm{tg}^2\alpha.$$

根据三角函数的定义，由图 1-3 还可以得到：

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha};\ \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sec\alpha}.$$

其中，最后一个关系式不易记忆，如果利用这个图式，在三角式的变换中就可以大大简化运算步骤.

我们还可以借助于下面的六角形图式，把同角三角函数的八个基本关系式全部记住.

将六个三角函数分别写在六边形的六个顶点上，构成"上弦、中切、下割"的图式，则

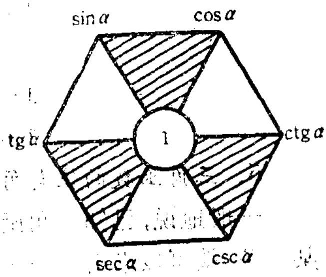


图 1-4

(1) 对角线上的两个三角函数的乘积等于 1 (倒数关系).

(2) 阴影三角形上面两个顶点的三角函数值的平方和等于下面顶点的三角函数值的平方(平方关系).

(3) 任一顶点的三角函数值等于相邻顶点的三角函数值之积(商的关系).

同角三角函数间的基本关系式，其主要应用有：

(1) 已知某角的一个三角函数值，求其它三角函数值；

(2) 化简三角函数式；

(3) 证明三角恒等式.

应用基本关系式时，要求灵活自如. 首先分析题目的特点，然后根据需要，将公式适当变形. 例如公式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 就可变形为：

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha;$$
$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};$$
$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

在进行恒等变形时，特别要注意"1"的逆向运用，如：

$$1=\sin\alpha\cdot\csc\alpha;$$
$$1=\cos\alpha\cdot\sec\alpha;$$
$$1=\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha;$$
$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha;$$
$$1=\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha;$$
$$1=\csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha.$$

5. 三角函数的值与角的关系

一般地说，已知三角函数的值，可以求出它的角；反之，已知某一角，就可以求出它的三角函数值，这是一个关系式的两个方面.

(1) 已知三角函数值，求作角

课本上介绍的已知三角函数值作角是作为单位圆的一种应用，也是解决已知三角函数值求角的一种几何方法. 下一章，我们还将学习已知一个三角函数值如何用三角函数的性质求出适合它的角.

(2) 求三角函数值

在本章中求三角函数值的问题主要有两类：

(i) 已知角 α 的某一三角函数值，求其它的三角函数值. 这里又有两种情况：

(a) 已知角 α 所在的象限，又知三角函数值的符号，这时问题很简单，只有一解.

(b) 仅知道角 α 的某一三角函数数值的正负，不知道角 α 所在的象限，必须根据该函数值的符号先确定角 α 所在的象限.

一般地，角 α 可能在两个象限，然后分别求出各三角函数值，因而问题有两解.

(ii) 用某一三角函数式表示其它三角函数. 根据同角三角函数关系可恒等变形为用给定的三角函数式的表达式.

已知某一个角的三角函数，要尽快地求出其它三角函数中的任一个，一般可在下面八个同角三角函数关系的桥式图上来找：

$$\begin{array}{ccccc}
\sec x=\dfrac{1}{\cos x} & —— & \sin^2 x+\cos^2 x=1 & —— & \csc x=\dfrac{1}{\sin x} \\
| & & & & | \\
\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x & —— & \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} & —— & \csc^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x
\end{array}$$

例如，已知 $\operatorname{tg}\alpha=1.4$，且 $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$，求 $\cos\alpha$ 的值. 可由 $\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x \longrightarrow \sec x=\frac{1}{\cos x}$ 求得.

求三角函数值，对于一些特殊问题或情况，应注意其特殊方法，有时往往可以使解题简捷. 如“已知 $\sin\alpha=0.8$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求角 α 的其它三角函数值”，因 $\sin\alpha=0.8=\frac{4}{5}$ 是特殊值，α 是如图 1-5 那样的 $Rt\triangle OMP$ 的锐角 θ 的外角. 因而，根据勾股定理可知另一直角边为 3，但坐标为 $M(-3,0)$，所以立即可得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

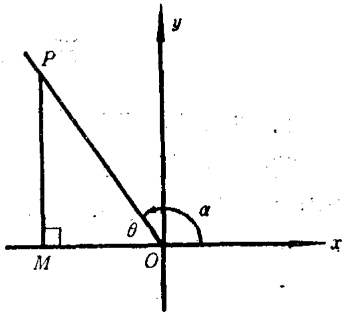


图 1-5

如果仅仅给出如

$\sin\alpha=m(m\neq 0)$，

这样既不给出角 α 的范围，又不能确定三角函数值的正负，那就要将 m 按 $m>0$，$m<0$ 分

别讨论，这就化为上述(b)的情况.

6. 三角函数的周期性

三角函数的周期性是三角函数区别于其它函数的显著特征，因此，三角函数被广泛应用于描述周期性运动的规律.

由于三角函数的周期性，我们研究其性质时，只要取一个周期作为代表就行了. 后面我们还将进一步看到三角函数的周期性在研究三角函数时提供的方便.

函数的周期性是比较抽象的，但我们研究三角函数周期性时，只要借助于单位圆的直观，观察其函数线的变化情况就可以清楚地看出：

正弦线 MP 与余弦线 OM 的变化周期是 2π；

正切线 AT 与余切线 BS 的变化周期是 π.

应该注意我们讲的正弦函数、余弦函数的周期是 2π；正切函数、余切函数的周期是 π，都是指 $y=\sin x$, $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ 而言的，其中自变量 x 的系数是"1"，否则就不成立了.

通过本章的学习，我们可以根据图1-6所述内容，并按照每一方框的顺序号，逐一理解和领会本章知识之间的联系和结构.

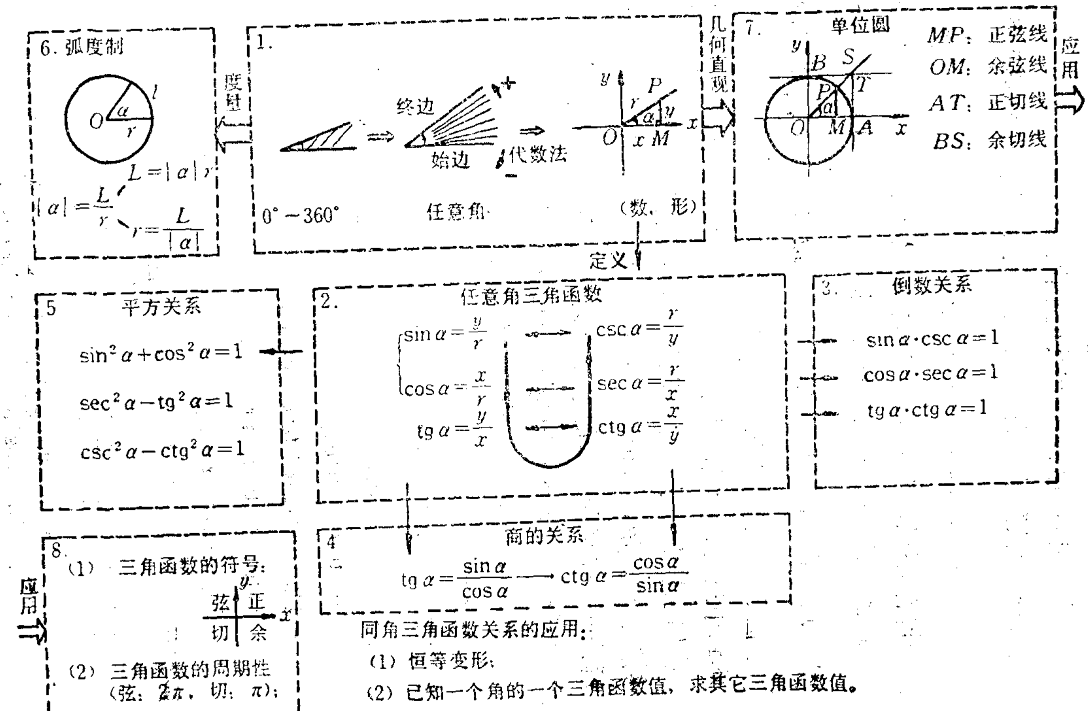
三、解题指导

1. 三角函数式的化简

将一个较复杂的三角函数式化为最简单的形式，以便看出式中各个量间的关系. 怎样的三角函数式才能称为"简"呢？主要有以下几点要求：

(1) 项数尽可能地少；

(2) 三角函数的种类尽可能地少；



6. 弧度制
O
α
r
l
$|\alpha| = \frac{L}{r}$
$L = |\alpha| r$
$r = \frac{L}{|\alpha|}$
度量
1.
终边
始边
代数法
y
P
r
α
y
O
x M
x
0° —360°
任意角
（数、形）
几何直观
7. 单位圆
y
B S
P T
α
O M A x
MP：正弦线
OM：余弦线
AT：正切线
BS：余切线
应用
定义
5 平方关系
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\sec^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha = 1$
$\csc^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = 1$
2. 任意角三角函数
$\sin\alpha = \frac{y}{r}$
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$
$\csc\alpha = \frac{r}{y}$
$\sec\alpha = \frac{r}{x}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}$
3. 倒数关系
$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$
$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$
$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$
4 商的关系
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \longrightarrow \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
应用
8.
（1） 三角函数的符号：
y
弦 正
切 余
x
（2） 三角函数的周期性
（弦：2π，切：π）；
（3） 已知三角函数值作角
同角三角函数关系的应用：
（1） 恒等变形；
（2） 已知一个角的一个三角函数值，求其它三角函数值。

图 1-6