

組合箱梁桥的应力解析 和設計計算法

工学博士 小西一郎 著
小松定夫 大桥昭光

尹家駢 譯
張 襄 校

人民交通出版社



組合箱梁桥的应力解析 和設計計算法

工学博士 小西 一郎 著
小松定夫 大桥昭光

尹家駢 譯

張 寰 校

人 民 交 通 出 版 社

本書譯自日本土木学会論文集关于箱梁桥結構力學研究的專題。主要內容就組合箱梁桥按照彈性理論，在种种偏心荷重狀態下所發生的應力，作詳細的解析，并就分析的結果：提出合理的、實用的設計計算方法的方案，可供桥梁設計人員研究參考。

組合箱梁桥的應力解析和 設計計算法

本書根據日本土木学会1955年日文版本譯出

尹家駢 譯 張 襄 校

*

人 民 交 通 出 版 社 出 版

(北京安定門外和平里)

北京市書刊出版業營業許可証出字第〇〇六号

新 華 書 店 發 行

人民交通出版社印刷厂印刷

*

1959年8月北京第一版 1959年8月北京第一次印刷

開本：787×1092₃₂ 印張：1⁷/₈ 張

全書：53000 字 印數：1—1,300冊

統一書号：15044·1344

定價(11)：0.35元

目 次

1. 前 言	2
2. 組合箱梁桥断面的單純 扭 轉	4
3. 組合箱梁桥断面的 弯 曲	7
4. 組合箱梁桥断面的弯曲扭轉联合作用	10
5. 在代表的偏心荷重状态下組合箱梁桥的解法	13
6. 因弯曲产生的应力 σ_b , τ_b	14
7. 因扭轉产生的应力 τ_s , τ_w , σ_w	15
8. 剪断中心	19
9. 数值計算 举 例	21
10. 慣用設計計算法对箱梁桥的适用及其批判	41
11. 組合箱梁桥合理的設計計算法的一个方案	55
12. 結 語	58

綠

1. 前 言

为了減輕桥梁的靜荷重，从桥梁建筑材料、結構方法等各个方面进行研究，这在战后一些国家获得了进步是大家所知道的。如用箱梁的桥梁結構就是其中的一例。这种結構的特长是：由于利用立体的薄板結構，所以重量輕，而富有剛性。例如德国的 *Köln-Deutz*、*Düsseldorf-Neuss*、*Bürgermeister-Smidt* 等桥，采用跨徑长达 100~200 公尺的大跨連續梁，充分地發揮了这种結構的特长。鉄道桥梁也使用这种結構，如 *Schöntal* 桥，是跨徑 36 公尺长的上承式鉄路箱梁桥。又如在美国所見的 *North-Bend*、*Portage Canal* 等桥，由于用两个鋼箱梁把鋼筋混凝土版連接在一起的所謂組合箱形梁，所以能够成为跨徑 40 公尺左右的、一种經濟的新式結構的簡支梁桥。

由于桥梁上的荷重位置，特別是在偏心荷重状态之下，箱梁桥的設計，不能完全套用以往对于平面結構所用的一般設計計算法。因为箱梁不仅在跨徑方面，而且在桥梁橫向方面比較寬闊，所以用立体的应力解析法是必要的。因之完全以梁平面构造的应力分析为依据的，旧的设计方法就不能适用了。然而把无益的、繁复的計算作为設計計算法也是不胜其煩；所以希望能够通过立体的应力解析結果，反映出实用的設計計算法。本書就組合箱梁桥按照彈性理論，在种种偏心荷重状态之下所发生的应力，尽可能的作詳尽的解析。其次，再就分析的結果，提出合理的实用設計計算法的方案，想对于桥梁結構的改善与实用方面会有些帮助。

如图 1 所示，两根箱形主梁并列，依靠主梁上的剪力結合杆件（*Shear Connector*）与混凝土版組合成为共同工作的組合箱梁，通常在主梁之間适当地配置了对傾构架，以防止桥梁橫断面的变形。因此，本書提出考虑沿桥梁跨徑全长，假定橫断面也如图 1，不再变更。

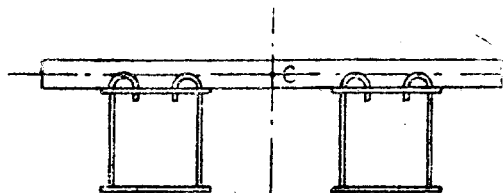


图1 組合箱梁桥横断面

在組合箱梁桥的同一横断面內，因为鋼梁与混凝土共同工作，二者材料的彈性系数和剪断彈性系数的数值不同，因之本書將混凝土断面按鋼材断面換算，以便适应它的彈性性質。

如图2所示，把組合箱梁的剪断中心作为原点 o ，順跨徑方向作为 x 軸，垂直方向作为 y 軸， xy 軸成为直角方向的作为 z 軸，混凝土版是

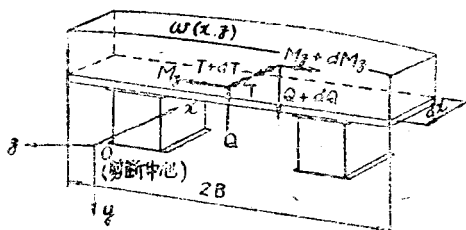


图2 箱梁桥横断面力与力矩平衡图

抵抗剪应力 τ_{xz} 的。同时，作为剪力結合杆件的弯鈎抵抗剪应力 τ_{xy} ，則图1所表示的箱梁桥断面，在力学上即如图3所表示的等值断面图。

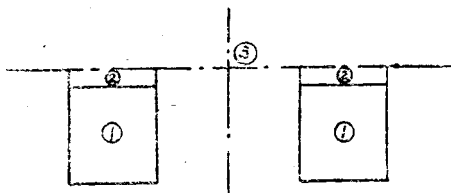


图3 組合箱梁桥的等值横断面

图中：①为抵抗弯曲和扭转的钢板箱梁薄板断面部份；②为抵抗弯曲和扭转的钢板箱梁上部顶盖板（Corerlite），由剪力结合杆件与混凝土版形成的箱梁薄板断面部份；③为抵抗弯曲与剪应力 τ_{zx} 的混凝土版部份。

2. 組合箱梁桥断面的单纯扭转

图 3 所示組合箱梁的断面受到单纯扭转，在结构力学的构成部份①②③，不论在任何情况下，它的厚度比较其它尺寸为小；因此，对于扭转，应把混凝土版③分开，而个别地予以考虑。所以，在这种情况下，作为抵抗单纯扭转的断面，如图 4 所示，把箱梁①③部份的薄板 aa' 、 bb' 、 cc' 、 dd' 当薄板断面来考虑，并无妨碍。箱梁①③部份在内部属于 2 次不稳定断面。沿着这个薄板断面的薄板中心线作曲线坐标，则它的面内剪应力 τ_{sx} 应为：

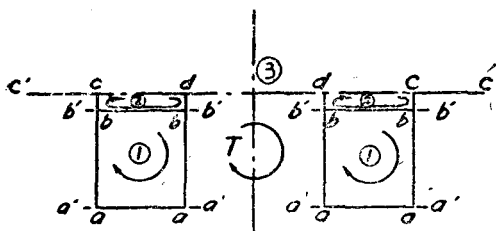


图 4 組合箱梁桥断面的单纯扭转

$$\tau_{sx} = G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial (r_s \theta)}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (a)$$

式中： r_s ——从扭转中心到箱梁板厚中心线向下垂线长度；

θ ——在箱梁断面 x 的扭转角；

w ——断面内一点的翘曲；

G ——材料的剪断弹性系数。

断面在 x 方向的一定情况下，把公式 (a) 从断面上的任意一点 so

到点 S , 其积分为:

$$\int_{s_0}^s \tau_{sz} ds = \int_{s_0}^s G \frac{\partial w}{\partial s} ds + \int_{s_0}^s G \frac{d\theta}{dx} r_s ds \dots\dots\dots (b)$$

如果把 St Venant 的扭转剪断流作为 q_s , G 在 $s_0 \sim S$ 区域内的一定情况下, 可以公式 (b) 得出:

$$\int_{s_0}^s \frac{q_s}{t} ds = G (w_s - w_0) + G \frac{d\theta}{dx} \int_{s_0}^s r_s ds$$

G 值对于钢梁及剪力结合杆件应为 G_s , 对于混凝土应为 G_c , 故:

$$\int_{s_0}^s \frac{q_s n_g}{t} ds = G_s (w_s - w_0) + G_s \frac{d\theta}{dx} \int_{s_0}^s r_s ds \dots\dots\dots (1)$$

式中: $n_g = \begin{cases} 1 & \text{——钢梁及剪力结合杆件} \\ G_s/G_c & \text{——混凝土} \end{cases}$

图 5 所示是考虑多数薄板箱梁断面互相相邻的箱梁。今假设一个任意的第 k 号的薄板断面, 沿着这个断面把公式 (1) 施行积分, 则

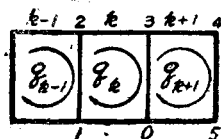


图 5 多板封闭断面的单纯扭转

断面 k 内的剪断流 q_k 应为:

$$q_k \int_0^1 \frac{n_g}{t} ds = G_s (w_1 - w_0 + \frac{d\theta}{dx} \int_0^1 r_s ds),$$

$$(q_k - q_{k-1}) \int_1^2 \frac{n_g}{t} ds = G_s \left(w_2 - w_1 + \frac{d\theta}{dx} \int_1^2 r_s ds \right),$$

$$q_k \int_2^3 \frac{n_g}{t} ds = G_s \left(w_3 - w_2 + \frac{d\theta}{dx} \int_2^3 r_s ds \right),$$

$$(q_k - q_{k+1}) \int_3^0 \frac{n_g}{t} ds = G_s \left(w_0 - w_3 + \frac{d\theta}{dx} \int_3^0 r_s ds \right).$$

但是 $\int_0^1$ 是表示在 $0 \sim 1$ 的薄板区域内的积分。

把上述 4 个公式的各边相加，即得：

$$-q_k - 1 \int_{k-1, k} \frac{n_g}{t} ds + q_k \oint_k \frac{n_g}{t} ds - q_{k+1} \int_{k, k+1} \frac{n_g}{t} ds = G_s \frac{d\theta}{dx} \oint_k r_s ds \dots\dots (c)$$

今
$$\bar{q}_k = \frac{q_k}{\frac{d\theta}{dx} G_s} \dots\dots\dots (2)$$

如果把 $\bar{q}_k$ 作为扭转函数与定义，则可将公式 (c) 改为：

$$-\bar{q}_k - 1 \int_{k-1, k} \frac{n_g}{t} ds + \bar{q}_k \oint_k \frac{n_g}{t} ds - \bar{q}_{k+1} \int_{k, k+1} \frac{n_g}{t} ds = 2 F_k \dots\dots\dots (3)$$

式中： F_k ——断面 k 的板厚中心线所围绕部分的面积；

$\oint_k$ ——环绕断面 k 一周的线积分；

$\int_{k, k+1}$ ——沿着断面 k 与 $k+1$ 的共同板的线积分。

成为本书主题的图 6 的两个联接薄板箱梁断面，是就①、②两个断面用公式 (3) 表达的，如就 $\bar{q}_1$ 、 $\bar{q}_2$ 来求解，则 $\bar{q}_1$ 和 $\bar{q}_2$ 分别得出以下的公式：

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1 &= 2 \frac{C_{22} F_1 + C_{12} F_2}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}, \\ \bar{q}_2 &= 2 \frac{C_{11} F_2 + C_{12} F_1}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式中： $C_{11} = \oint_1 \frac{n_g}{t} ds$, $C_{12} = \int_{1,2} \frac{n_g}{t} ds$,

$$C_{22} = \oint_2 \frac{n_s}{r} ds \dots\dots\dots (4')$$

图 4 所表示的封闭断面以外，图中点线用 aa' 、 bb' 、 cc' 、 dd 所表示的开口断面即为钢翼缘 (flange) 部分，如有混凝土床版的情况下，这个开口断面抵抗扭转。今假定有 2 个箱梁的桥，它的开口断面钢翼缘厚度为 t ，宽为 b ，则从图 4 中可以求出全断面的扭转力矩 T 是：

$$T = 2(2q_1 F_1 + 2q_2 F_2) + \sum_{s,c} \frac{1}{3} Gbt^3 \frac{d\theta}{dx} \dots\dots\dots (d)$$

(d) 式中的右边第 1 项是 2 个箱梁的封闭断面部份；第 2 项是关于开口断面部分的项目； $\sum_{s,c}$ 是表示开口断面钢翼缘部份及混凝土床版全体的总和。

今
$$T = K \frac{d\theta}{dx} \dots\dots\dots (5)$$

从上式，如根据扭转刚性 K 的定义，则在公式 (5) 中的 K ，可用公式 (d)、(2)、(4) 求出，即：

$$K = 8 \frac{C_{22} F_1^2 + 2C_{12} F_1 F_2 + C_{11} F_2^2}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} G_s + \sum_{s,c} \frac{1}{3} Gbt^3 \dots\dots\dots (6)$$

3. 组合箱梁桥断面的弯曲

当计算组合箱梁桥断面的弯曲垂直应力时，虽然通常适用 I 形组合梁的应力计算公式，但是，关于剪应力则必须根据所谓“剪断流” (Shear flow) 的理论来计算。

现在把图 3 所表示的组合箱梁桥的一个箱梁 (图 6) 的封闭断面假定承受弯曲，则在弯曲垂直应力发生的同时，就有均衡的剪断流 q_b 发

生作用。因为这个封闭断面在内部是不稳定的，所以，如图 7 所示，把箱梁薄板切断而表现的稳定开口断面，它的稳定剪断流 $\bar{q}_b$ 可以按照下式来计算 0 即：

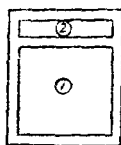


图 6

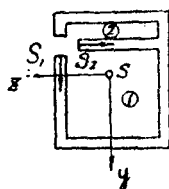


图 7

$$\bar{q}_b = \frac{Q}{I} \int_0^s \frac{y^t}{n} ds \dots \dots \dots (7)$$

式中：Q——作用于断面的剪力；

I——换算组合箱梁为钢材的断面 2 次力矩；

$\int_0^s \frac{y^t}{n} ds$ ——对通过梁断面薄板部份 0~S 的断面重心 S 的水平轴 z，换算钢材断面的 1 次力矩；

$$n = \begin{cases} 1 & \text{—— 鋼梁及剪力結合杆件,} \\ E_s/E_c & \text{—— 混凝土.} \end{cases}$$

图 6 的不稳定断面的剪断流 q_b 是由稳定体系如图 7 的剪断流 $\bar{q}_b$ 与各个薄板断面的每一个的不稳定剪断流与相加而求得的。即：

$$q_b = \bar{q}_b + S \dots \dots \dots (8)$$

断面单纯承受弯曲，而不产生扭转的条件为：

$$\oint \frac{q_b n_g}{t} ds = 0 \dots \dots \dots (9)$$

把公式 (8) 代入公式 (9)，则适用于如图 6 所示的情况：

$$\left. \begin{aligned} S_1 \oint_1 \frac{n_g}{t} ds - S_2 \int_{1,2} \frac{n_g}{t} ds + \oint_1 \frac{\bar{q}_1 n_g}{t} ds &= 0, \\ -S_1 \int_{1,2} \frac{n_g}{t} ds + S_2 \oint_2 \frac{n_g}{t} ds + \oint_2 \frac{\bar{q}_2 n_g}{t} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

公式 (10) 是关于不稳定剪断流 S_1 、 S_2 的联立方程式。又，公式 (10) 中的 $\bar{q}_1$ 、 $\bar{q}_2$ 是分别属于图 7 薄板断面①、②的板内的稳定剪断流，这个数值根据公式 (7) 可以很容易的计算出来。

在公式 (10) 中, 如用公式 (4') 的系数, 即得:

$$\left. \begin{aligned} c_{11}S_1 - c_{12}S_2 + \oint_1 \frac{\bar{q}_1 n_g}{t} ds &= 0, \\ -c_{12}S_1 + c_{22}S_2 + \oint_2 \frac{\bar{q}_2 n_g}{t} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10').$$

公式 (10') 中的系数 c_{11} 、 c_{12} 和 c_{22} 已如公式 (4') 所示, 是按照断面形状、材料的性质所决定的。又, 在各个积分中, 与积分因素 ds 适应的 n_g 值在鋼梁及剪力結合杆件的情况下, $n_g = 1$; 在混凝土的情况下, $n_g = G_s/G_c$ 。又, 式中的 t 是梁的薄板厚度。通过剪力結合杆件, 对于 ds 的 t 值, 是采用如以下所指出的等值厚度 (*Effective Thickness*)。即如图 8 所示, 在剪力結合杆件的間距 d 、水平方向的寬度 b 、厚度 t_d 的情况下, 如果对剪力結合杆件有一定的剪断流 q_d 作用时, 則在各个剪力結合杆件之間, 剪断流是不存在的, 即成为不連續性的剪断流的状态。为了把这个不連續性的剪断流換算成連續性的剪断流, 应在 x 方向假定为連續的薄鋼板, 它的等值厚度 t_e 如图 1 所示, 可作出下式:

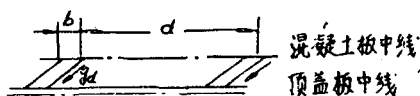


图 8 剪力結合杆件的等值厚度 t_d

$$t_e = \frac{b \cdot t_d}{d} \times 2 \dots\dots\dots (11)$$

在剪力結合杆件部份, 公式 (10') 的 t , 用公式 (11) 計算是必要的。

这样, 由公式 (10'), 可以算出 S_1 和 S_2 , 按照公式 (8), $q_1 = \bar{q}_1 + S_1$, $q_2 = \bar{q}_2 + S_2$, 从这个式中, 可求出实际的剪断流 q_1 和 q_2 。

4. 組合箱梁桥断面的弯曲

扭轉联合作用

組合箱梁桥对梁断面承受非对称的荷载状态的情况下，箱梁发生弯曲，同时受到扭轉。在这种情况下，由于扭轉，跨徑方向的弯翘 (warping)，一般是受到拘束的，它的拘束程度是随着断面的位置变化的。这一点在单纯扭轉的情况下，有着显明的、内容不同的地方。这样，弯曲扭轉联合作用时，因为扭轉而使跨徑方向的弯翘受到拘束，以至于产生应变。所以，跨徑方向的垂直应力并与其平衡，而发生2次剪应力。这种影响可能与弯曲而产生的最大应力的断面一致或接近，必須加以注意。

弯翘 w_s 由于向着跨徑方向 (縱向) 变化所生的垂直应力 σ_{w^*} 为：

$$\sigma_{w^*} = E_s \frac{\partial w_s}{\partial x} \dots \dots \dots (12)$$

其次，按照箱梁薄板的微小体順跨徑方向的平衡条件方程式，由于弯翘而生的垂直应力 σ_{w^*} 与这个平衡条件所产生的2次剪应力 τ_{w^*} 的关系为：

$$\frac{\partial(\tau_{w^*})}{\partial s} = - \frac{\partial(\sigma_{w^*})}{\partial x} \dots \dots \dots (13)$$

今由公式

$$w_s = \frac{d\theta}{dx} \dots \dots \dots (14)$$

如将弯翘函数 w_s 下一定义，則因弯曲扭轉联合作用所生的2次剪断流 q_{w^*} ，可以公式 (12)、(13)、(14) 求出下式：

$$\begin{aligned} q_{w^*} = \tau_{w^*} &= \int \frac{\partial(\tau_{w^*})}{\partial s} ds = - \int \frac{\partial(\sigma_{w^*})}{\partial x} ds \\ &= -E_s \frac{d^3\theta}{dx^3} \left[\int_0^s \frac{W_s^*}{n} ds + S_{W^*} \right] \dots \dots (15) \end{aligned}$$

式中 ε_w 为不穩定剪断流。

根据剪断应变的周期性， ε_w 在对称弯曲情况下，可成立与公式 (9) 同形的下式：

$$\oint_{\hat{R}} q_w \frac{r_s}{t} ds = 0 \dots\dots\dots (16)$$

一方面的扭轉力矩 T_w 为：

$$T_w = \int_F q_w r_s ds \dots\dots\dots (17)$$

式中 $\int_F$ 为全桥断面的綫积分。把公式 (15) 代入公式 (17)，即得：

$$\begin{aligned} T_w &= \int_F \left[\left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) \left\{ \int_0^s \frac{W_{st}}{n} ds + \varepsilon_w \right\} r_s \right] ds \\ &= \sum_F \int_{i-1}^i \left[\left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) \left\{ \int_0^s \frac{W_{st}}{n} ds + \varepsilon_w \right\} r_s \right] ds \\ &= \sum_F \left[\int_0^s \left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) r_s ds \times \left(\int_0^s \frac{W_{st}}{n} ds + \varepsilon_w \right) \right]_{i-1}^i \\ &= \sum_F \int_{i-1}^i \frac{W_{st}}{n} \left\{ \int_0^s \left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) r_s ds \right\} ds = \\ &= \sum_i \left[\sum \left\{ \left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) \left(\int_i \frac{W_{st}}{n} ds + S_w \right) \right\} \times \int_i r_s ds \right] = \\ &= \left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) \sum_F \int_{i-1}^i \left\{ \frac{W_{st}}{n} \left(\int_0^s r_s ds \right) \right\} ds \\ &= \sum_i \left[q_w i \int_i r_s ds \right] - \left(-E_s \frac{d^3\Theta}{dx^3} \right) \int_F \frac{W_{st}}{n} \left\{ \int_0^s r_s ds \right\} ds \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式中： $\sum_i$ 是表示将箱梁隅角部份 i 作为全隅角的总和； $\sum$ 是汇集隅角

部份 i 所构成各个薄板的 i 侧值的总和; $\int_i r_s ds$ 是构成箱梁的各个薄

板隅角部 i 的 $\int_0^s r_s ds$ 值。因为 q_{wi} 是流入隅角部分 i 的剪断流, 所以

把流出的剪断流所减去的值, 由剪断流理论可以明白, 即:

$$q_{wi} = 0$$

所以从公式 (18), 可得出:

$$T_w = - \left(-E_s \frac{d^3 \theta}{dx^3} \right) \int_F \frac{W_s t}{n} \left\{ \int_0^s r_s ds \right\} ds$$

其次, 根据公式 (18), 同样的诱导出:

$$\begin{aligned} & - \left(E_s \frac{d^3 \theta}{dx^3} \right) \int_F \left[\frac{W_s t}{n} \left\{ \int_0^s \frac{\tilde{q} n_g}{t} ds \right\} \right] ds \\ & = \sum_i \left[q_{wi} \int_i \frac{\tilde{q} n_g}{t} ds \right] - \int_F \left[\frac{\tilde{q} n_g}{t} \left\{ \left(-E_s \frac{d^3 \theta}{dx^3} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\int_0^s \frac{W_s t}{n} ds + S_w \right) \right\} \right] ds \end{aligned}$$

因为 $q_{wi} = 0$,

$$\begin{aligned} & - \left(E_s \frac{d^3 \theta}{dx^3} \right) \int_F \left[\frac{W_s t}{n} \left\{ \int_0^s \frac{\tilde{q} n_g}{t} ds \right\} \right] ds \\ & = - \int_F \frac{\tilde{q} n_g}{t} q_w ds \\ & = -2 \tilde{q}_1 \oint_i \frac{q_{1w} n_g}{t} ds - 2 \tilde{q}_2 \oint_2 \frac{q_{2w} n_g}{t} ds \end{aligned}$$

根据公式 (16), 上式右边的值无论那个都成为 0, 所以:

$$T_w = -E_s \frac{d^3 \theta}{dx^3} \int_F \left[\frac{W_s t}{n} \left\{ - \int_0^s r_s ds + \int_0^s \frac{\tilde{q} n_g}{t} ds \right\} \right] ds$$

..... (19)

如图 1 所示，組合箱梁桥断面是可以考虑为左右对称断面的；而且，如果把 x 軸与床版中心綫之間的支点 C 作为 $S=0$ 的原点，則 C 点的弯矩等于 0，即：

$$(W_s)_{s=0} = 0$$

从公式 (1)、(2)，

$$W_s = \frac{W_s}{\frac{d\theta}{ds}} = - \int_0^s r_s ds + \int_0^s \frac{\bar{q} n s}{t} ds \dots \dots \dots (2)$$

从公式 (19)、(20)，

$$T_w = -E_s \frac{d^3\theta}{dx^3} \int_F \frac{W_s^2 t}{n} ds$$

現在如果使

$$C_w = \int_F \frac{W_s^2 t}{n} ds \dots \dots \dots (21)$$

則：

$$T_w = -E_s C_w \frac{d^3\theta}{dx^3} \dots \dots \dots (22)$$

式(22)中的 $E_s C_w$ 可叫做“弯曲扭轉剛性”。

5. 在代表的偏心荷重状态下 組合箱梁桥的解法

关于通过剪断中心 O、平行于跨徑方向 x 軸的偏心垂直荷重作用的情况下，如图 2 所示，箱梁桥断面围着 x 軸产生扭轉角 θ ；同时，箱梁断面全体也产生垂直方向的挠曲 y 。就箱梁桥断面来说， y 軸的弯曲剛性一般比較 x 軸的剛性大得多，所以在偏心垂直荷重作用的情况下，水平方向的挠曲很小，故可不予考虑。因此，关于 y 方向的挠曲及弯曲扭轉联合作用，可以用以下的彈性方程式来求得。

关于弯曲，可用下式：

$$E_s I \frac{d^4 y}{dx^4} = \int_{-B}^B w dz \dots\dots\dots (23)$$

关于单纯扭转和弯曲扭转联合作用，可由公式(5)、(22)得出：

$$K \frac{d\theta}{dx} - E_s C_w \frac{d^3 \theta}{dx^3} = T \dots\dots\dots (24)$$

式中： $E_s I$ ——组合箱梁断面的弯曲刚性；

T ——作用于断面的扭转力矩。

其次，作为平衡条件来论，跨径方向(x 轴)及与梁成直角的水平方向(z 轴)，无论何时，是不受力的，所以：

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Z = 0, \quad \Sigma My = 0$$

因而作为平衡条件方程式，对于弯曲，应如下式所示：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Y = 0 : \quad \frac{dQ}{dx} &= - \int_{-B}^B w dz, \\ \Sigma M_z = 0 : \quad \frac{dM_z}{dx} &= Q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

对于扭转，如下式所示：

$$\Sigma M_x = 0 : \quad \frac{dT}{dx} = - \int_{-B}^B w z dz \dots\dots\dots (26)$$

由于偏心垂直荷重而发生的断面力，弯曲力矩(M)、剪力(Q)及扭转力矩(T)可用以上各式求得。

6. 因弯曲产生的应力 σ_b , τ_b

由于弯矩 M 所产生的弯曲应力 σ_b ，仍适用于普通 I 形梁的公式。
即：