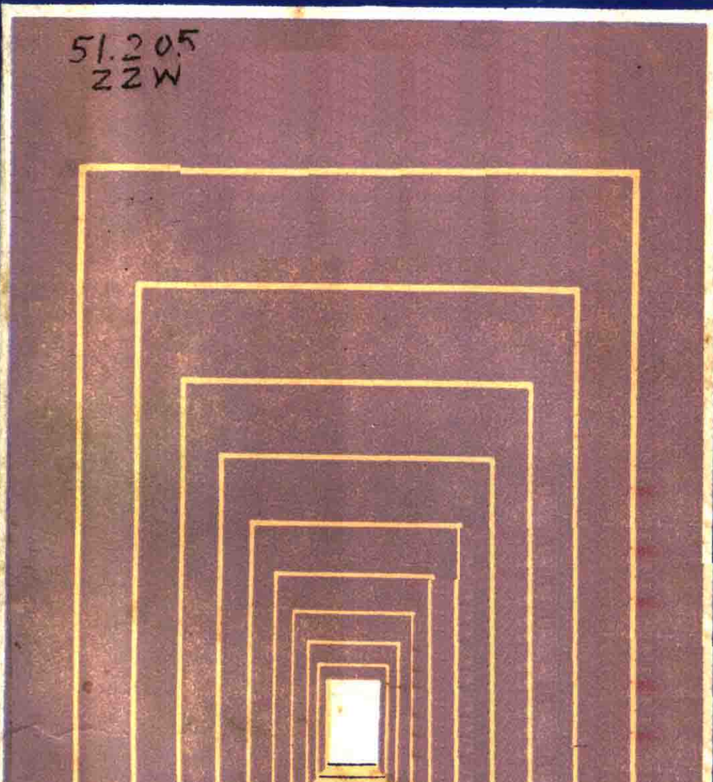
赵振威 编著

中学数学

证明方法指导



江苏人民出版社

中学数学证明方法指导

赵 振 威

江 苏 人 民 出 版 社

中学数学证明方法指导

赵 振 威

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　江苏新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 16.75　字数 360,000
1983 年 2 月第 1 版　1983 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—61,000 册

书号：7100·215　定价：1.40 元

责任编辑　何震邦

编 者 的 话

证明是中学数学的一个重要组成部分．它的重要性，不仅表现在数学中的定理、公式、性质、法则需要经过严格的数学证明，才能确认其真实性；还在于通过数学证明，有助于弄清数学知识的内部联系，不仅知其然，而且知其所以然，有助于发展逻辑思维能力和空间想象能力，逐步养成严谨地思考问题的习惯．从而，也有助于深刻理解数学本质，透彻掌握数学规律，从根本上提高分析问题和解决问题的能力．

证明也是中学数学中的一个难点．困难主要来自两个方面：一是证明题抽象多变，无论是命题的内容和形式，还是条件和结论，都有着无穷的变化．这就从根本上决定了数学题的证明，没有一个固定的模式，具有极大的灵活性，给学习带来了困难；二是缺少科学的思维方法作指导，初学者往往满足于依样画瓢，以为命题得证就万事大吉，忽视积累证题经验，探索证题规律．因而常常事倍功半，遇到稍有变化或难度较大的命题，就乱碰乱撞，盲目论证，纵然思考了一大堆定义和定理，也会杂乱如麻，理不出头绪，甚至连入径的门路也找不到．

唯物辩证法告诉我们，一切客观事物都是互相联系的和具有内部规律的．数学证明，作为认识现实世界空间形式和数量关系的一种重要方法，也是有端倪可辨，有规律可寻的．本书试图从中学数学教学的实际需要出发，通过对代数、三

角、几何、解析几何中若干有代表性例题的分析和证明，介绍一些发现证明的思维方法，给出证明各类典型命题的具体规律，并提供一些常用的证题技能和技巧．为了便于读者阅读和思考，书中的例题一般都附有思考方法，分析发现证明的思维过程．并以评注的形式对例题作进一步的探讨．根据例题的不同特点，在评注中有的侧重于介绍证明的有关基础知识；有的通过比较各种证法的优缺点，沟通各门学科间的内在联系；也有的是指出例题的特殊情形或一般形式，提供灵活运用例题的途径和进一步思考的问题．各章节还安排了一定数量富有思维的练习题，供读者练习思考．

数学证明方法是一个既有法有时又无定法的问题，笔者水平有限，缺点、错误在所难免，恳请广大读者批评指正．本书如果能在指导读者掌握证明方法，提高证明能力方面有所裨益，则将为之感到欣慰．

一九八〇年二月

目　录

第一章　代数证明题

代数证明题，按照命题的性质来分，常见的有数的性质、恒等式、条件等式、不等式、方程的性质、函数的特性等各类证明题。

一、数的性质

证明有关数的性质的命题，常用的方法有以下各种：

1. 直接利用数的某些已知性质。

2. 结合运用多项式因式分解、二项式定理等代数知识。

3. 与自然数有关的命题，一般可利用数学归纳法。

4. 某些结构比较特殊的命题，可以考虑用抽屉原则等技巧性较强的方法。

5. 直接证明有困难时，可以用反证法。

例1　证明：任意五个连续整数的平方和不是完全平方数。

思考方法　审题时先要明确连续整数、平方和、完全平方数等概念的含义。依连续整数的意义，可以把五个连续整数设为$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$（n为整数），于是它们的平方和就是

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2).$$

这样，本题就是要证明$5(n^2+2)$不是完全平方数。

注意到整数的平方数末位数字的特点，就可得证法一。如果把 $5(n^2+2)$ 看作关于 n 的二次式，利用判别式推证，则有证法二。

证法一 设五个连续整数分别为 $n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$（n 为整数），则它们的平方和为

$$S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$$
$$=5(n^2+2).$$

因为一个整数的平方数，其末位数字只能是0,1,4,5,6,9中的某一个，由于 n^2+2 的末位数不可能是0或5，所以 n^2+2 不可能是5的倍数，从而 S 不能是完全平方数。

证法二 依证法一，有

$$S=5n^2+10. \quad (1)$$

把(1)式看作关于 n 的二次式，则 S 为完全平方数的充要条件是判别式 $\Delta=0$。而在(1)式中

$$\Delta=0-4\times5\times10=-200<0.$$

所以，S 不是完全平方数。

评注 证明文字题，一般都要先进行“翻译”工作，即在明确理解题中所述概念含义的基础上，用数学符号表述命题的条件和结论，使证明目标具体化。本题在“翻译”过程中还用了一点技巧，把五个连续整数设为 $n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$，以简化平方和的表达式。如果把这五个数设为 n，$n+1$，$n+2$，$n+3$，$n+4$，虽然同样可以得证，但证题过程要复杂得多。

例2 设 n 为任意自然数，求证：$f(n)=2n^3+3n^2+n$ 能被6整除。

思考方法 这是一个与自然数有关的命题，用数学归纳法证明，如证法一。如果注意到 $f(n)$ 的特点，把它变形为两个

连乘积的和，依连续整数乘积的性质，可得证法二。

证法一 用数学归纳法.

(1) 奠基．当 $n=1$ 时，$f(n)=2\cdot1^3+3\cdot1^2+1=6$，能被 6 整除，命题成立。

(2) 归纳．假设当 $n=k$ 时命题成立，即假设

$$f(k)=6M。(M 为正整数)$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}f(k+1)&=2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1)\\&=(2k^3+3k^2+k)+6(k^2+2k+1)\\&=6M+6(k^2+2k+1)\\&=6(M+k^2+2k+1).\end{aligned}$$

这就表明，当 $n=k+1$ 时，命题也是成立的。

因此，对于任意自然数 n，$f(n)$ 能被 6 整除。

证法二
$$\begin{aligned}f(n)&=2n^3+3n^2+n\\&=n(n+1)(2n+1)\\&=n(n+1)[(n-1)+(n+2)]\\&=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

因为任意 r 个连续正整数的积能被 $r!$ 整除，所以 $(n-1)n\cdot(n+1)$ 和 $n(n+1)(n+2)$ 都能被 $3!=6$ 整除，从而 $f(n)$ 能被 6 整除。

评注 证法一比较容易想到，凡与自然数有关的命题，一般都可用数学归纳法证明。证法二有一定的技巧性，证明过程比较简单。

例 3 设 a 的末位数字是 3，b 的末位数字是 7，证明：对于任意自然数 c、d，

$$a^{4c+2d}-b^{2d}$$

能被 20 整除。

证明 设 $a=10a_1+3, b=10b_1+7$（a_1、b_1为非负整数），则

$$a^{4c+2d}-b^{2d}$$
$$=(10a_1+3)^{4c+2d}-(10b_1+7)^{2d}$$
$$=(10a_2+9)^{2c+d}-(10b_2+9)^{d}.$$

其中
$$a_2=10a_1^2+6a_1, \quad (1)$$
$$b_2=10b_1^2+14b_1+4. \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式可知，a_2、b_2 均为偶数，由此依二项式定理，要证明 $(10a_2+9)^{2c+d}-(10b_2+9)^d$ 能被 20 整除，只要证明 $9^{2c+d}-9^d$ 能被 20 整除。而

$$9^{2c+d}-9^d=9^d(81^c-1)$$
$$=9^d(81-1)(81^{c-1}+81^{c-2}+\cdots+1)$$
$$=80\cdot9^d(81^{c-1}+81^{c-2}+\cdots+1) \quad (3)$$

(3)式表明，$9^{2c+d}-9^d$ 能被 20 整除，由此原题得证。

评注 本题在证明过程中，巧妙地运用了二项式定理，使复杂问题简单化。这种方法在数的整除性问题的证明中，是经常采用的。题中的条件如果改为“a、b 的末位数字是 3 或 7”，原题结论仍然成立。读者可仿照上述证法给出证明。

例 4 设 a、b 为正有理数，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 为无理数。证明 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是无理数。

证明 用反证法。

假设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数，则

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

$\because \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}\neq0,$

$$\therefore \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}. \quad (1)$$

因为有理数对四则运算是封闭的，所以依已知条件和所作假设，由(1)式可知，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$必为有理数。这样

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{a}$$

应是有理数，从而$\sqrt{a}$也应是有理数。这个结论与已知条件$\sqrt{a}$为无理数相矛盾。因此$\sqrt{a}+\sqrt{b}$必为无理数。

评注 本题用直接证法不易成功。下面是一种常见的错误证法：

依已知条件，$\sqrt{a}$和$\sqrt{b}$都是无理数，因为无理数与无理数的和是无理数，所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}$也必是无理数。

读者试指出上述证法错在什么地方，并分析产生错误的原因

对于用直接证法比较复杂，或是在特定场合难以找到直接证明根据的命题，一般都可用反证法完成证明。应用反证法证明时，有以下几个步骤：

第一步：分清命题"若A则B"的条件和结论。

第二步：作出与命题结论B相矛盾的假定$\overline{B}$。

第三步：由A和$\overline{B}$出发，应用正确的推理方法，推出矛盾结果。

第四步：断定产生矛盾结果的原因，在于开始所作的假定$\overline{B}$不正确，于是原结论B成立。这就间接地证明了原题。

例 5 设$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$是$n$个正整数，证明必能从中取出若干个数$a_i, a_{i+1}, \cdots, a_j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$来，使$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j$能被$n$整除。

思考方法 本题用通常的方法很难入手。注意到除数为n的整数除法，余数可能是$0,1,2,\cdots,n-1$，即有n种不同情

形. 为此,可以把 n 种不同的余数作为 n 个"抽屉",利用抽屉原则完成证明.

证明 令 $a_0=0$, 则不论 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有无相等的,依抽屉原则,在 $n+1$ 个数

$$A_0=a_0,$$
$$A_1=a_0+a_1,$$
$$A_2=a_0+a_1+a_2,$$
$$A_3=a_0+a_1+a_2+a_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_n=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

中,至少存在两个数,它们被 n 除有相同的余数. 不妨设这两个数为

$$A_{i-1}=a_0+a_1+\cdots+a_{i-1},$$
$$A_j=a_0+a_1+\cdots+a_{i-1}+a_i+\cdots+a_j.$$

这里, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, 那么

$$A_j-A_{i-1}=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j$$

必能被 n 整除.

评注 抽屉原则又称为重叠原则,是一个重要的数学方法,在整数论、代数、几何等方面都有广泛的应用. 抽屉原则之一是:

如果把 $n+1$ 个物品分装在 n 个抽屉里,那么至少有一个抽屉至少装有 2 个物品.

利用抽屉原则证题时,"制作抽屉"是关键性的步骤. 对于一些简单的命题,稍作分析即可得到所需的"抽屉";而对于比较复杂的命题,需要根据命题的具体要求,经过周密的分析,才能制作合适的"抽屉".

例 6 试证：对于一切大于 1 的自然数 n，

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

都不是整数。

证明 用 p 表示不超过 n 的最大素数，则 $\frac{n!}{p}$ 必为整数，而 $\frac{n!}{p^2}$ 必非整数。当 $k \neq p$，且 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，$\frac{n!}{kp}$ 也必是整数。用 $\frac{n!}{p}$ 乘 S_n，有

$$\frac{n!}{p} \cdot S_n = \frac{n!}{p} + \frac{n!}{2p} + \frac{n!}{3p} + \cdots + \frac{n!}{p^2} + \cdots + \frac{n!}{np}. \quad (1)$$

显然，(1)式右边的 n 项中，除 $\frac{n!}{p^2}$ 不是整数外，其余各项均为整数。因而(1)式右边 n 项的和不能是整数，即 $\frac{n!}{p} \cdot S_n$ 不能是整数。但 $\frac{n!}{p}$ 是整数，所以 S_n 不能是整数。

评注 本题以 $\frac{n!}{p} \cdot S_n$ 为中介，制作一个过渡等式，巧妙地利用素数的性质，从而完成证明。这种技巧在处理某些较为复杂的证明题时，是很有用处的。读者可以推敲一下，思考这种方法的来龙去脉。

练 习 一

1. 设 n 为任意整数，求证：$f(n) = n^5 - n$ 能被 30 整除。

2．设 n 为任意奇数，求证：$f(n)=n^3+3n^2-n-3$ 能被 48 整除。

3．设 n 为自然数，求证：$f(n)=3^{2n}-8n-1$ 能被 64 整除。

4．设 $x=3n+1$（n 为非负整数），求证：$f(x)=9^x+3^x+1$ 能被 13 整除。

5．证明：$53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除。

6．对于任意自然数 n，求证：$f(n)=n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除。

7．设 a、b 都是整数，且 a^2+b^2 能被 3 整除，求证 a 和 b 都能被 3 整除。

8．设 a、b 都是素数，且 $a+b=220$，求证 $a-b$ 必定能被 6 整除。

9．求证：64 不能表为若干个连续正整数的和。

10．设 n 为任意自然数，求证：$f(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{3}n^3+\frac{7}{15}n$ 是一整数。

11．设 $f=\frac{ax+b}{cx+d}$，a、b、c、d 都是有理数，x 是无理数，求证：

（1）当 $bc=ad$ 时，f 是有理数；

（2）当 $bc\neq ad$ 时，f 是无理数。

12．设 N,n 都是正整数，若 $\sqrt[n]{N}$ 不是整数，则它必是无理数。

13．设 a, b, c, d, m 都是整数，$\sqrt{m}$ 不是整数，且 $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$．证明：$a=c, b=d$．

14．设 a,b,c 都是整数，且不全为零．求证：

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\neq 0.$$

15．设 a 为有理数，α 为无理数．则 a 与 α 的和（差）必为无理数；当 $a\neq 0$ 时，a 与 α 的积（商）也必是无理数。

16．求证：当 $n>2$ 时，n 与 $n!$ 之间至少有一个素数。

17．设 m，n 是正整数，且 2^m-1 与 2^n-1 互素，求证：m，n 也必互素。

18．设 $2n+1$ 是一素数，证明 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, n^2$ 分别被 $2n+1$ 除，得到的余数是互不相同的。

19．在 $1,2,3,\cdots,2n$ 这 $2n$ 个自然数中，任意取出 $n+1$ 个数，证明其中必有一个数是另一个数的倍数．

20．求证：不存在整数 a,b,c,d，使下列等式同时成立：

$$abcd-a=\overbrace{11\cdots1}^{1977个},\qquad abcd-b=\overbrace{11\cdots1}^{1978个},$$

$$abcd-c=\overbrace{11\cdots1}^{1979个},\qquad abcd-d=\overbrace{11\cdots1}^{1980个}.$$

21．已知 $N=\overbrace{99\cdots9}^{n个}$，求证：对于 $1\leqslant M\leqslant 10^n$ 中任意整数 M，乘积 MN 的各位数字的和等于 $9n$．

22．设 p，q 是一对孪生素数（即其差等于 2 的一对素数），求证 p^q+q^p 与 p^p+q^q 必有公约数 $p+q$．

二、恒 等 式

恒等式的证明，一般是通过恒等变形来完成的．如果要证明的恒等式是 $P=Q$，那么常用的证题途径有以下各种：

1．从左到右．从 P 出发，经过逐次恒等变形，最后得到 Q，即

$$P\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow Q.$$

2．从右到左．从 Q 出发，经过逐次恒等变形，最后得到 P，即

$$P\Leftarrow\cdots\Leftarrow Q_2\Leftarrow Q_1\Leftarrow Q.$$

3．同时对 P 和 Q 进行恒等变形，最后得到相同的结果 M，即

$$P\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow M\Leftarrow\cdots\Leftarrow Q_2\Leftarrow Q_1\Leftarrow Q.$$

4．差值为零．从 P 与 Q 的差 $P-Q$（或 $Q-P$）出发，经

过逐次恒等变形，最后得到$P-Q=0$，即

$$P-Q\Rightarrow U_1\Rightarrow U_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow 0.$$

5．比值为1．若$Q\neq 0$（或$P\neq 0$），从P与Q的比$\frac{P}{Q}\left(或\frac{Q}{P}\right)$出发，经过逐次恒等变形，最后得到$\frac{P}{Q}=1$，即

$$\frac{P}{Q}\Rightarrow V_1\Rightarrow V_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow 1.$$

6．引用恒等式．从某个已知恒等式$M=N$出发，经过适当的恒等变形，最后得到$P=Q$，即

$$M=N\Rightarrow P=Q.$$

上述证题途径，可以根据命题的不同特点灵活运用．一般说来，前面三种方法应用较为广泛，后面三种用得少些．具体地说，如果P的结构比较复杂，Q的结构比较简单，可以从左到右进行证明；如果P的结构比较简单，Q的结构比较复杂，可以从右到左进行证明；如果P、Q的结构都较复杂，则可采用第三种方法；如果P、Q是分式，或用上面几种方法不够方便时，则可考虑4、5两种方法；对于某些结构比较特殊的命题，可以利用第六种方法，或利用其他特殊方法．

例1 证明恒等式

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

思考方法 注意到左、右两边各个分式分母的特点，可以把左边各个分式拆成两个分式之和，从左到右进行证明，如证