高等数学课程过关强化试卷

高等数学教学研究组／组编
王丽燕／编著

高等数学（上）

（理工类·普通院校）

真正的一线教师力作
针对性强　信息超值
考点覆盖率 100%
考试成功率 100%
保你轻松过关得高分

ISBN 7-5611-2280-2
9 787561 122808 >
ISBN 7-5611-2280-2 定价:20.00元(本册10.00元)
大连理工大学出版社
责任编辑/刘 杰　封面设计/王福刚

高等数学课程过关强化试卷系列
高等数学（上）（理工类·重点院校）
高等数学（下）（理工类·重点院校）
高等数学（上）（理工类·普通院校）
高等数学（下）（理工类·普通院校）
线性代数（理工类·本科）
概率论与数理统计（理工类·本科）
微积分（上）（经管类）
微积分（下）（经管类）
高等数学（上）单元跟踪测试及期末冲刺★级试题
（理工技术类院校·高职高专）
高等数学（下）单元跟踪测试及期末冲刺★级试题
（理工技术类院校·高职高专）
线性代数单元跟踪测试及期末冲刺★级试题
（理工技术类院校·高职高专）

高等学校数学学习辅导教材

高等数学课程过关强化试卷

高等数学(上)

(理工类·普通院校)

高等数学教学研究组　组编

王丽燕　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程过关强化试卷:高等数学(上)(理工类·普通院校) / 王丽燕编著. 大连 :大连理工大学出版社,2003.4
ISBN 7-5611-2280-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—习题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 012631 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:7.25　字数:157 千字
印数:1 ~ 8 000
2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　责任校对:刘智伟
封面设计:王福刚

定　价:20.00 元(本册 10.00 元)

前　言

《高等数学》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目，同时高等数学又是在校大学生感到比较难学的一门课。针对目前高等数学课时减少，学生学习困难，期末考试难以过关的实际问题，我们根据原国家教委审定的普通高等学校"高等数学课程教学基本要求"(教学大纲)，又根据教育部 2003 年制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求，编写了这本融期末复习与考研前期辅导热身为一体的《高等数学课程过关强化试卷》(理工类·普通院校)。本书也可以作为高等院校高等数学教师的教学工具书。

本书的特点是：

一、题型齐全，覆盖面广，难度适中

我们以普通高等学校期末考试试卷为标准，所选的题目类型齐全，题型精典，覆盖面达 100%。每套题基本题占 65 分左右，中等题占 20 分左右，综合题占 15 分左右。注重基本概念、基本理论、基本计算和基本应用，综合题可以帮助学生提高分析问题与解决问题的能力，激发学生的学习兴趣，培养应用意识与创新意识，作了本书的试卷，可以将高等数学的知识有机地联系在一起，温故知新，加深理解，使你的期末考试不仅可以顺利过关，而且成绩达到优秀。

二、展开解题思路，突出解题方法，传授解题技巧

我们对每一套题都作了详尽的解答，使读者作完每套考题后有所对照，了解自己的真实水平。另外，试题解答我们注重知识与一题多解，充分展示解题思路、解题方法与解题技巧，使你充分感受数学

的乐趣和数学的美。

本书由王丽燕编著，柳杨、铁军作了部分编写与校对工作，浙江大学秦禹春教授担任主审。本书在编写过程中得到了沈阳工业学院沙萍副教授，长春大学敬石心教授，鞍山钢铁学院李海燕教授，大连理工大学庞丽萍博士及大连大学教务处徐晓鹏教授的热情帮助与指点，编者在此向他们一并表示衷心的感谢!。

尽管编者从事高等数学教学近二十个年头，有着丰富的教学经验，但限于编者水平，加之时间仓促，错漏不当在所难免。如果你发现了本书的不足，希望你能告诉我，如果你感到本书对你确有帮助，使你在期末考试时稳操胜券，请你把书留给你的学弟学妹们。

编　者

2003 年 3 月

班级________ 姓名________ 得分________

试卷一

（时间 110～120 分钟）

一、完成下列各题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(3+x^2)}{x}$。

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

3. 求$\int_{-2}^{3}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$。

4. 求$\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x$。

5. 问 a,b 为何值时，点$(1,3)$为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

6. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处的连续性和可导性。

7. 设$\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f'(0) \neq 0$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

8. 判断广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}dx$ 的敛散性。

9. 求曲线 $y = e^x$ 与该曲线过原点的切线及 y 轴所围图形的面积。

10. 在原点附近，用一个二次多项式近似代替函数 $f(x) = 3 + \int_0^x \dfrac{1+\sin t}{2+t^2}dt$。

二、(8 分)

证明方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在[0,1]上有且仅有一个实根。

三、(8 分)

证明:当 $x>0$ 时,不等式 $e^x-1-x>1-\cos x$ 成立。

四、(8 分)

设 $f(u)$ 是连续函数,证明$\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$,并计算$\int_0^\pi x\frac{\cos x}{1+\sin x}dx$。

五、(10 分)

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点$(0,0)$,且当 $x\in[0,1]$ 时,$y\geqslant 0$,试确定 a,b,c 的值,使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为$\frac{4}{9}$,且该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小。

六、(6 分)

设函数 $\varphi(u)$ 对一切实数 u 是连续的正值函数,且

$$f(x)=\int_{-c}^{c}|x-u|\varphi(u)du$$

试证曲线 $y=f(x)$ 在区间$[-c,c]$上是凹的$(c>0)$。

班级______ 姓名______ 得分______

试卷二

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、求解下列各题（每小题 6 分，共 48 分）

1. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，问 a 为何值时，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

2. 设 $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$，求 dy。

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x+\sqrt{xy}+y=7$ 确定，求 $y'(1)$。

4. 设 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$。

6. 求 $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$。

7. 求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x - \cos^5 x}\mathrm{d}x$。

8. 设 $f(0) = 0, f'(0) = 2$，求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$。

二、求解下列各题(每小题 5 分，共 15 分)

1. 已知 $y = f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x) = \arctan x^2$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$。

2. 证明：$\dfrac{1}{2} \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

3. 设底半径为 R，高为 H，且顶点在下面的圆锥形容器内盛满水，试求吸尽容器内的水所做的功。

三、(10 分)

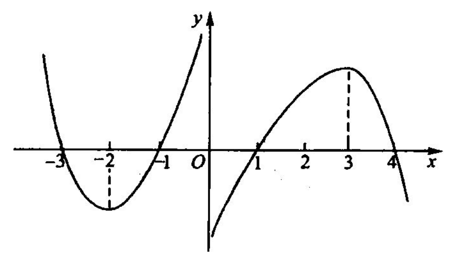
设 $f(x)$ 对所有 x 均连续，除 $x=0$ 外均二阶可导，它的导数 $y'=f'x)$ 的图形如图所示，请回答以下问题：

(1) 在何处 $f(x)$ 增加，何处减少？

(2) 在何处曲线 $y=f(x)$ 上凹(即下凸)，何处下凹(即上凸)？

(3) 在何处 $f(x)$ 有极值点？曲线上何处有拐点？

(4) 根据上述资料列表并描出 $y=f(x)$ 的略图。



(三题图)

四、(7 分)

证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，并求 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$。

五、(6 分)

曲线 $y=\frac{1}{3}x^6(x>0)$ 上哪一点的法线在 y 轴上的截距最小？

六、(8 分)

已知周期为 l 的函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ 上是连续的奇函数，证明：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 l 为周期的周期函数。

七、(6 分)

求由曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 及直线 $x=0, x=1, x$ 轴围成的无界曲边梯形绕 y 轴旋转一周形成的旋转体的体积。

班级__________　姓名__________　得分__________

试卷三

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每小题 3 分，共 9 分）

1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$ ________，其定义域为 ________。

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=$ ________。

3. $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[g(x)]=\ln x$，则 $\int g(x)\mathrm{d}x=$ ________。

二、选择题（每小题 3 分，共 9 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ 的结果是（　　）。

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. ∞　　D. 不存在

2. 当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 a,b 的值为（　　）。

A. $\frac{1}{2}$,1　　B. 1,1　　C. $-\frac{1}{2}$,1　　D. -1,1

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n}}=k>0$，其中 $n=1,2,3\cdots$，则必有（　　）。

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　D. $f(x)$ 在 x_0 邻域上单调

三、完成下列各题（每题 6 分，共 54 分）

1. 设 $y=a^{\arctan x^2}+x^{\sin x}$（$a>0,a\neq 1$ 为常数），求 y'。

2. 一平面通过平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+4=0$ 的交线，且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 45° 角，求其方程。

3. 设 x,y 满足方程 $x=\int_0^y\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t^2}}$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

4. 设 $f'(e^x)=xe^x$ 且 $f(1)=0$，求 $\int_1^2\left[2f(x)+\frac{1}{2}(x^2-1)\right]\mathrm{d}x$。

5. 求$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$。

6. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_{-\infty}^{a} te^{2t}dt$,求 a 的值。

7. 求抛物线 $y^2=2x$ 和直线 $y=x+1$ 之间的最短距离。

8. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的全长。

9. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,$F(x)=\int_0^x f(t)dt\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$,求证:

$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx$。

四、(8分)

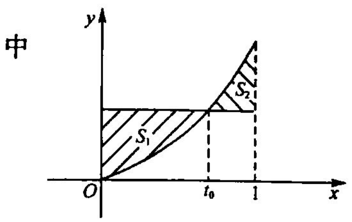
设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ x^2+bx+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上处处连续且可导,求 a,b 的值。

五、(6分)

求曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$,直线 $y=\frac{1}{2}$ 及 x 轴三者围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积。

六、(8分)

在区间$[0,1]$上给定函数 $y=x^2$,问当 t 为何值时,图中的阴影部分 S_1 与 S_2 的面积之和最小?何时最大?



(六题图)

七、(6分)

设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续,且 $x>a$ 时,$f'(x)>k>0$,其中 k 为常数。证明:若 $f(a)<0$,则方程 $f(x)=0$ 在$\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$内有且仅有一个实根。

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷四

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} =$ ________。

2. 曲线 $x^{2y} = y^{3x}$ 上一点 (x,y) 处的切线的斜率是________。

3. $\int x\sin\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x =$ ________。

4. 设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \mu\boldsymbol{k}$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\mu =$ ________，若 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，则 $\mu =$ ________。

5. yOz 坐标面上的直线 $\dfrac{z}{2} = \dfrac{y-2}{3}$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面方程为__________。

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - \mathrm{e}^{-x}$，若 $f'(x_0) = 0(x_0 \neq 0)$，则（　　）。

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

2. 设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x =$（　　）。

A. $\mathrm{e}^{-x}(x-1)+c$　　B. $\mathrm{e}^{-x}(x+1)+c$

C. $-\mathrm{e}^{-x}(1-x)+c$　　D. $-\mathrm{e}^{-x}(x+1)+c$

3. 设 $y = f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$，又 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$，则当 $\Delta x > 0$ 时有（　　）。

A. $\Delta y < \mathrm{d}y < 0$　B. $\Delta y > \mathrm{d}y > 0$　C. $\mathrm{d}y < \Delta y < 0$　D. $\mathrm{d}y > \Delta y > 0$

4. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x =$（　　）。

A. 0　B. $2\sqrt{2}$　C. $4\sqrt{2}$　D. 4

5. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} =$ ________。

A. $3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$　B. $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$　C. $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$　D. 以上均不对

三、完成下列各题（每题 9 分，共 45 分）

1. 设 $x - y + \cos y = 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

2. 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$。

3. 求 $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$。

4. 研究函数 $y = xe^{-x}$ 的性态。

5. 设 $y = f(x)$ 在$[a,b](ab < 0)$ 上具有四阶连续导数，$f^{(4)}(x) > 0, x \in [a,b]$，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \left(3 + x + \frac{1}{2}x^2\right)}{x^4} = 5$，试证当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，$f(x) \geqslant 3 + x + \frac{1}{2}x^2$。

四、(10 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - e^x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

(1) 确定 a，使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；

(2) 求 $f'(x)$；

(3) 问 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续。

五、(10 分)

在曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 上某点 A 处作切线，使之与曲线以及 x 轴所围成图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

(1) 切点 A 的坐标及过点 A 的切线方程；

(2) 由上述图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

六、(5 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：在 $(0,1)$ 内总存在 n 个不同的 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，使 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_i)}=n$。

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷五

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f'(3)=2$，$f(x)$ 为偶函数，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-3-h)-f(-3)}{2h}=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2

2. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）。

A. 等价无穷小　　B. 同阶但非等价无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

3. 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$（　　）。

A. 没有渐近线　　B. 仅有水平渐近线

C. 仅有垂直渐近线　　D. 既有水平渐近线又有垂直渐近线

4. $\int_a^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x=2-\dfrac{\pi}{2}$，则 $a=$（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，又设 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$，则 $F(x)$ 为（　　）。

A. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

C. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，$f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则 $f(x)=$ ________。

2. $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$，则 $\mathrm{d}y=$ ________。

3. 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+c$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ________。

4. 椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大的点是________，最小的点是________。

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t=$ ________。

三、试解下列各题（每题 9 分，共 45 分）

1. 求 $\int\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$。

2. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，试导出递推公式，并计算 I_{10}。

3. 计算$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$。

4. 已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt(x>0)$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$。

5. 证明：$2x\arctan x \geqslant \ln(1+x^2)$。

四、(7 分)

求过点 $A(2,-1,-1)$，且通过直线$\begin{cases}2x+y-4=0\\y+2z=0\end{cases}$的平面方程。