邮电高等函授教材

高等数学 上册

吴留芳 编

YOU DIAN GAO DENG

YOU DIAN GAO DENG

HAN SHOU

YOU DIAN GAO DENG HAN SHOU

JIAO CAI

HAN SHOU JIAO CAI

GAOHAN

邮电高等函授教材

高 等 数 学

上 册

吴留芳 编

人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册/吴留芳编．一北京:人民邮电出版社,1995.8

邮电高等函授教材

ISBN 7-115-05670-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.高等数学-高等教育:函授教育-教材　Ⅳ.013

内 容 提 要

本书是邮电高等函授教材。分上、下两册出版。

上册内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程,书末还附有几种常用的曲线、积分表和习题答案。

全书结构严谨,说理浅显,叙述详细,例题较多,便于自学。适用于函授教学,也可作为工程技术人员的自学用书或参考书。

邮电高等函授教材

高等数学

上册

吴留芳　编

*

人民邮电出版社出版发行

北京朝阳门内南竹杆胡同111号

北京顺义兴华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

*

开本:850×1168　1/32　　1995年8月第一版

印张:14.5　　1995年8月北京第1次印刷

字数:383千字　　印数:1—7 000册

ISBN 7-115-05670-6/G・327

定价:19.00元

编者的话

本书是根据邮电高等函授专科《高等数学》教学大纲的要求，结合多年函授教学实践编写的。

高等工科专科教育要培养技术应用型人才，本书从专科要求出发，以应用为目的，以必需、够用为度。因此，教材涉及的知识覆盖面较宽，保持了数学自身的系统性、逻辑性，在重点讲清基本概念和基本方法的基础上，适当地减少了难度较大的部分基础理论的严密论证和推导，加强了与实际应用联系较多的基础知识和基本方法，注重基本运算的训练。

考虑到函授教学的特点，本书力求做到重点突出、分析清楚、深入浅出、便于自学。为了加强对基本概念的理解和进行必要的基本训练，每节后都配有一定数量的思考题及练习题；每章后都有较详尽的内容小结和一定数量的习题。

本书分上、下两册，上册包括：一元函数微积分、常微分方程；下册包括：矢量代数和空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数。此外，书中还编入了一些比较重要但超出教学大纲的内容，供读者参考，这些内容都加了"△"标志。

在编写过程中，南京邮电学院函授部何悦朋副教授审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，谨致谢意。

由于编者水平有限，书中错误及不当之处请广大读者批评指正。

吴留芳

1994 年 5 月

目　　录

第一章 函 数

函数概念是高等数学中最重要的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象。

在这一章里，首先给出函数定义，然后将复习各类基本初等函数及图形，介绍复合函数，最后给出初等函数的概念。

本章基本要求：

(1) 理解函数的概念，了解反函数与分段函数的意义。

(2) 熟悉基本初等函数的性质和图形。

(3) 了解复合函数的概念，会分析复合函数的复合过程。

第一节 函数的概念

一、常量与变量

在任何一种自然现象或技术过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在所考虑的问题或过程中不发生变化，保持某一固定的数值，这种量叫做常量；而还有一些量却有变化，也就是可取各种不同的数值，这种量叫做变量。例如，将一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体分子的个数保持一定，所以是常量；与此相反，气体的温度和压强则是变量，它们取得越来越大的数值。

一个量是常量还是变量，要根据具体条件来分析。同一个量，在某种情况下可以认为是常量；而在另外一些情况下，就可能是变量。例如，在电流 i 通过负载 R 时，在负载 R 的两端产生电压 u，它们之

间有如下关系：

$$u=iR,$$

根据问题的需要，有时 i 是常量，R 和 u 是变量；有时 R 是常量，i 和 u 是变量；而在某些时候，将 i、R 和 u 都做为变量也是可以的。

通常用字母 a、b、c……等表示常量，用字母 x、y、z……等表示变量。

二、函数的定义

在实际问题中，往往同时有几个变量变化着，这些变量之间并不是孤立的，而是相互联系的。变量间的这种相互依赖关系在数学上称为函数关系。

在初等数学中，已经见过一些简单的函数，例如：

一次函数　$y=kx+b$　$(k\neq 0)$；

二次函数　$y=ax^2+bx+c$　$(a\neq 0)$；

三角函数　$y=\sin x, y=\operatorname{tg} x$，……等。

这些函数都表达了两个变量 x 和 y 之间的依赖关系。这种依赖关系给出了一种对应规则，根据这个对应规则，当一个变量在某一范围内取定一个数值时，另一个变量总有确定的数值与之对应。两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质。

定义　设两个变量 x 和 y，如果变量 x 在实数的某一范围 X 内每取定一个数值时，变量 y 按照一定的规则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y=f(x)$。

变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量或函数；X 称为这个函数的定义域；相应的 y 值的全体叫做值域，记作 Y。

由函数的定义，应注意以下几个问题：

(1) 在函数定义中："变量 y 按照一定的规则总有确定的数值与之对应"这句话表明了 y 与 x 之间是按照一定的法则联系起来的，"一定的规则"就是变量 y 与 x 之间的对应关系。

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母 f 表示了 y 与 x 之间的对应关系。

例如，$f(x)=2x^2+3$ 中的 f 就表示自变量 x 平方后乘以 2 再加上 3。

当同时讨论几个不同的函数时，为了表示 y 与 x 的不同对应关系，就用不同的字母来表示不同的对应规则。如，用 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$……等等。

（2）在函数的定义中，只讲了 x 在某范围 X 内每取定一个值后，y 总有确定的值与之对应；并没有讲 x 变化时，y 一定要改变。这样局部不加改变的量以及常量都可以看作是函数。因此，常量 $y=C$ 是函数，（定义域为一切实数，且对于 x 每取定一个值后，变量 y 总有确定的值 c 与之对应）。

（3）在函数定义中，只说 y 总有确定的值与之对应，而没有指明有几个确定的对应值。

如果自变量 x 在定义域内任取一个值后，函数 y 只有一个确定的数值与之对应，则称这个函数是单值函数，否则称为多值函数。例如

$$y=\mathrm{Arcsin}x,$$

就是多值函数。多值函数可以分成几个单值支来研究。如上例中，可研究其主值支

$$y=\arcsin x。$$

以后凡是没有特别说明，所讲函数都是指单值函数。

三、构成函数的两个要素

对应规则和定义域是构成函数的两个要素。因此，在研究函数时，首先要注意的是该函数的两个要素。

例如 $y=\arcsin(x^2+2)$，因为无论 x 取何值，y 都没有确定的值与之对应，就是说没有定义域，因此不能说 y 是 x 的函数。

有了构成函数的两个要素，才可以判定两个函数是否是相同的函数。对于两个函数只有它们的定义域和对应规则完全相同时，才能认为它们是相同函数。

如函数 $y=x+1$ 与 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，因为它们的定义域不同（第一个函数的定义域是全体实数，第二个函数的定义域是 $x\neq 1$ 的实数），所以，这是两个不同的函数。

又如，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$，虽然它们的定义域相同，均为全体实数；但它们的对应规则是不同的，第一个函数为

$$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

而第二个函数，不论 $x\geqslant 0$，还是 $x<0$，y 都等于 $x(y=x)$，因此，这是两个不同的函数。

而函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$，它们不仅定义域相同（均为全体实数），而且对应规则也相同，为

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases};\quad y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}。$$

因此，它们是两个相同的函数。

四、函数定义域的求法

在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域。

例如，在自由落体中，物体下落的时间 t 和下落的路程 s 间的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$（其中 g 为重力加速度），其定义域为$[0,T]$。（T 为物体落地时的时间）。

对于用数学式子表示的函数，它的定义域可由函数表达式的本身来确定，即要使运算有意义，我们称之为自然定义域。例如：

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 偶次根式中的被开方数不能小于零；

(3) 在对数式中，真数要大于零，而底数为非 1 的正数；

(4) 在反正弦 $\arcsin x$ 与反余弦 $\arccos x$ 中，x 的绝对值不能大于 1；

如果函数是由有限项的和组成的。那么先求出每项的定义域，再

取它们的公共部分。

求定义域的方法举例如下。

例 1 求函数 $y=x^2+e^x+\sin x$ 的定义域。

解 因为无论 x 取任何值，函数 y 都有确定的值与之对应，所以函数的定义域为全体实数，即 $(-\infty,+\infty)$。

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$ 的定义域。

解 由题意可知 $\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+4\geqslant 0,\end{cases}$

即
$$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -4,\end{cases}$$
所以函数的定义域为 $[-4,-1)$，$(-1,1)$ 和 $(1,+\infty)$。

例 3 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\lg(x-2)$ 的定义域。

解 由题意可知 $\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1 & ①\\ x-2>0 & ②\end{cases}$

由① $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$ 得到 $-1\leqslant x\leqslant 3$；

由② 得到 $x>2$。

取两式的公共部分(图 1－1)，得出函数的定义域为 $(2,3]$。

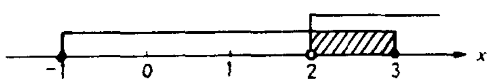

图 1－1

例 4 求函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域。

解 由题意可知 $\cos x-1\geqslant 0$，即 $\cos x\geqslant 1$，但因 $\cos x$ 的值不可能大于 1，于是 $\cos x=1$，即 $x=2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$。所以函数的定义域为 $x=2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$。

五、函数值

自变量 x 在其定义域内取某一定值 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值或特定值。记作

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0},$$

这时就说函数在 x_0 处有定义。

所有函数值的全体叫做函数的值域。例如，$y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$。

例 5 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-2)$、$f(x^2)$、$f(\dfrac{1}{x})$。

解 $f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$；

$$f(0)=\frac{1}{1+0}=1;$$

$$f(-2)=\frac{1}{1+(-2)}=-1;$$

$$f(x^2)=\frac{1}{1+x^2};$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}。$$

例 6 设 $f(x)=x^2+9$，$\varphi(x)=4+\sqrt{x}$，试求：$f[\varphi(9)]$，$\varphi[f(-4)]$。

解 因为 $\varphi(9)=4+\sqrt{9}=7$，

所以 $\qquad f[\varphi(9)]=f(7)=7^2+9=58$；

又因为 $f(-4)=(-4)^2+9=25$，

所以 $\qquad \varphi[f(-4)]=\varphi(25)=4+\sqrt{25}=9$。

例 7 若 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$。

解 设 $x+1=u$，于是 $x=u-1$，

所以 $\qquad f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$，

由于函数表达式与变量用什么字母表示无关，因此，$f(x)=$

x^2+x+3。

例 8 已知 $f(x+1)=x^2-1$，求 $f(\sin x)$。

解 因为 $f(x+1)=x^2-1=(x+1)(x-1)$

$$=(x+1)[(x+1)-2]$$

$$=(x+1)^2-2(x+1),$$

所以 $$f(\sin x)=\sin^2 x-2\sin x。$$

思 考 题

1. 什么叫做函数？函数关系的实质是什么？

2. 函数的两个要素是什么？函数 $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是相同函数吗？为什么？

3. 为什么常量也可以看做是函数？

4. 什么叫做函数的定义域？没有定义域的函数存在吗？它也能叫做函数吗？

5. 在什么情况下函数在点 $x=x_0$ 处是有定义的？函数在它的定义域内每一点处都有定义吗？为什么？

6. 如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，则 $f(x_0)$ 表示什么？

7. 如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，问函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $x=x_0$ 处是否一定有定义，为什么？

习题 1－1

1. 判断下列各对函数是否相同函数？为什么？

(1) $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$，　$g(x)=x+1$；

(2) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，　$g(x)=1$；

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$。

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=e^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；　　(4) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$；　　(6) $y=\sqrt{1-|x|}$；

(7) $y=\arcsin(x-5)$；　　(8) $y=\frac{x}{\sin x}$；

(9) $y=\mathrm{tg}(x+1)$；　　(10) $y=\sqrt[3]{x+2}+\lg\frac{1}{1+x}$；

(11) $y=\sqrt{\lg x-1}$；　　(12) $y=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\lg(x+1)}$；

(13) $y=\sqrt{x}+3\sqrt{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$；

(14) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{2-x}{3}$。

3. 求函数值

(1) $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$；

(2) $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{\sqrt{3}}{2})$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$；

(3) $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$；

(4) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f(\frac{1}{x})$，$\frac{1}{f(x)}$。

4. 设 $f(x)=x^2-2x+3$，试分别求出下列方程的根：

(1) $f(x)=f(0)$；　　(2) $f(x)=f(-1)$。

5. 若 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$，试确定函数 $f(x)=ax^2+bx+c$。

6. 设函数 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，试求：$f[f(2)]$，$f[\varphi(-1)]$，

$\varphi[f(\frac{\sqrt{2}}{2})]$，$\varphi[\varphi(\frac{1}{2})]$。

7. 设 $f(x)=\ln x$，证明 $f(x)+f(x+1)=f[x(x+1)]$。

8. 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f(\frac{1}{t})$。

9. 设 $f(x+2)=x^2+2x+3$，求 $f(x)$。

10. 已知 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)(x>0)$。

第二节　函数的表示法

表示函数的方法，最常用的有公式法、表格法和图示法三种。这三种方法各有优缺点。

一、公式法

用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫公式法。例如，$y=3x^2+4x-1$，$y=\sin(2x+3)$，$y=\sqrt{1+\lg x}$等等，都是用公式法表示的函数。

用公式法表示的函数其优点是准确，便于作理论分析和推导运算，但是不够直观。

在用公式法表示函数时，经常会遇到在定义域的不同区间内用不同式子表示的函数。如在电子技术中见到的如图 1－2 所示的三角波中的一个波形。电压 u 与时间 t 的函数关系式为

$$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ 30-\frac{3}{2}t, & 10<t\leqslant 20。\end{cases}$$

这种在不同区间内用不同式子来表示的函数称为分段函数。

例 1　已知函数

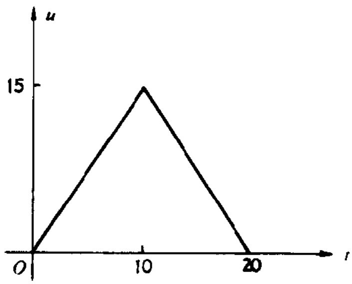

图 1－2

$$f(x)=\begin{cases}x^2, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ -x, x<0。\end{cases}$$

试求：$f(1)$，$f(2)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(-2)$，$f(4)$；指出 $f(x)$ 的定义域，并作出它的图形。

解 因为 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^2$，

所以 $f(1)=1^2=1$，$f(2)=2^2=4$，$f(0)=0^2=0$；

又因为 $x<0$ 时，$f(x)=-x$，

所以 $f(-1)=-(-1)=1$，

$f(-2)=-(-2)=2$；

因为在 $x=4$ 处函数没有定义，所以 $f(4)$ 不存在。

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2]$。

它的图形如图 1－3 所示。

对于分段函数我们应注意的是，它表示的是一个函数，而不是几个函数。

例 2 作出函数 $y=|x+1|$ 的图形。

解 先去掉函数表达式中的绝对值符号。

因为当 $x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -1$ 时，$y=|x+1|=x+1$，

当 $x+1<0$，即 $x<-1$ 时，

$y=|x+1|=-(x+1)$，

所以该函数可用分段函数表示

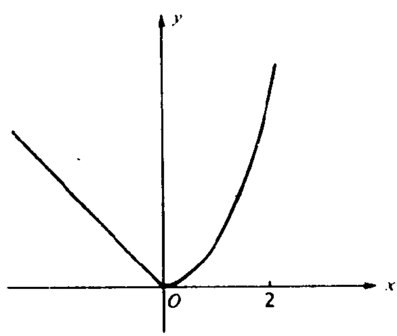

图 1－3