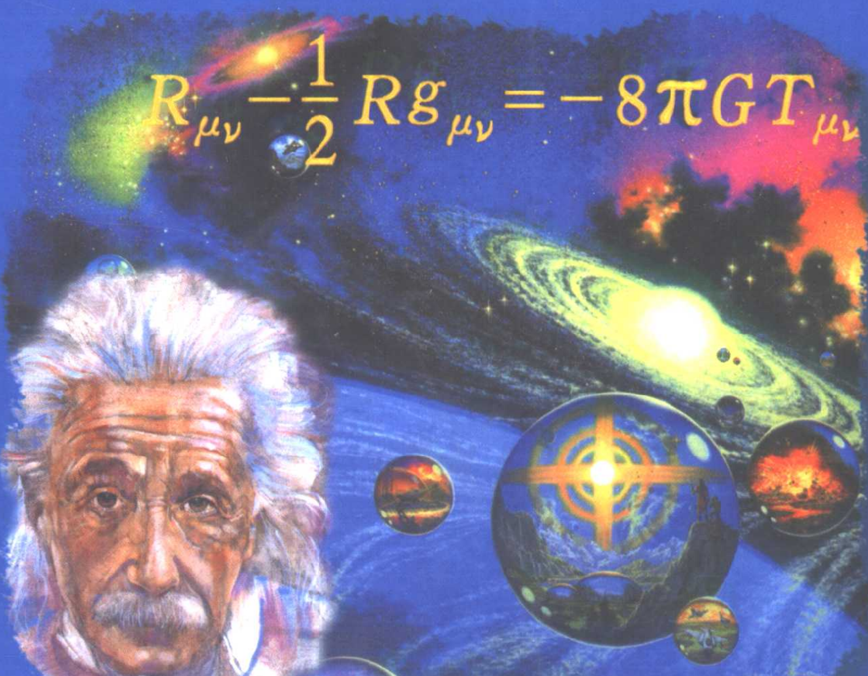
广义相对论教程

吴时敏 编



北京师范大学出版社

广 义 相 对 论 教 程

吴时敏　编

北 京 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

广义相对论/吴时敏编．—北京：北京师范大学出版社，1998

ISBN 7-303-04705-0

Ⅰ．广…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．广义相对论　Ⅳ．O412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 09710 号

北京师范大学出版社出版发行

（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）

出版人：谢维和

北京东晓印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本：850mm×1168mm　1/32　印张：7.75　字数：185 千字

1998 年 8 月第 1 版　1998 年 8 月第 1 次印刷

印数：1～2 000 册　　定价：11.00 元

前　言

这本教程是编者连续十多年为北京师范大学天文系研究生讲授该课程的讲义修改而成。

广义相对论是理论物理、天文学等专业研究生的必修基础课。由于天文观测技术的不断改善，引力效应在大尺度范围内已不容忽视，因而它也将成为更多专业不可或缺的理论知识。不少数学家也为此作出了卓越的贡献。多年来广义相对论一直是对理科学生最有吸引力的学科之一。此外，编者还不时收到一些业余爱好者的来信，提出他们在自学过程中遇到的问题和看法，尽管其中不少的基本概念有问题，主要原因是他们未能掌握数学计算，但由此可知，他们对相对论爱好之深是不言而喻的。

抽象的概念和繁重的运算是初学者的两大难点。尤其是后者。广义相对论的数学工具是黎曼几何，这不难学。运算量大，也难不倒学生，其中不少技巧性的运算步骤，才是真正的难点。而这在国内外有关专著中却都很简略。为了使学生读后能立即顺利地进入课题，一本适合研究生或理科高年级学生深度广度，篇幅不宜太多，又易于入门的教材是很关键的。

第 5、6、7 三章采自温伯格的“引力论和宇宙”，但作了一些简化处理，消除了其中数学难点，对非天文专业的读者可略去，其中第 7 章主要对天体力学专业学生很有用。6、7 两章难度稍大，却有助于运算能力的提高。第 9 章宇宙论虽然篇幅较多，却仍较简略，也未能包含更多有意义的内容，读者可阅读俞允强著《大爆炸宇宙学》(高教出版社)，另一本值得推荐的是赵峥编著《探求上帝的秘密——从哥白尼到爱因斯坦》(北京师范大学出版社)，这两本虽是科普性的，却是不可多得的好书，对广义相对论爱好者

来说，列入必读亦不为过。

一个学期60学时的课堂讲授，未能包含更多有用的题材。不到之处，希不吝指正。

编者在教学过程中，经常和我的同窗，复旦大学陆全康教授探讨各种问题。另外，我的同行，北京大学邓国祥教授也给予不少帮助和鼓励。最后，北京师范大学出版社对本书的出版作了热情的支持，在此一并致谢。

吴时敏

1998年7月于北京师范大学天文系

目　录

第 1 章　狭义相对论

§ 1-1　数学准备

三维正交变换　直角坐标系 Σ 绕原点 O 旋转一个角度后成了 Σ'，则矢量 $\boldsymbol{x}$ 在 Σ 和 Σ' 中的分量 x_i 和 x'_i 满足正交变换：

$$x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x'_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

以后采用“约定求和法则”，即凡同一项中出现相同指标，表示从 1 到 3 求和，故上式简化为

$$x'_i=a_{ij}x'_j. \tag{1-1-1}$$

变换系数 $a_{ij}=\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}$满足 $a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk}$.

矢量长度不变　$x'_ix'_i=x_ix_i=$不变量.

两矢量的内积不变 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_iy_i=$ 不变量.

这正是欧氏几何的特点.

若 T_{ij}和 T'_{ij}分别是 Σ 和 Σ' 系中九个量，如果它们之间满足如下的变换关系

$$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl},$$

则称 T_{ij}和 T'_{ij}是同一张量在不同坐标系 Σ 和 Σ' 中的分量.

推广到四维　坐标系 $\Sigma(x_1,x_2,x_3,x_4)$经正交变换到 $\Sigma'(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)$，则四维空间中的矢量和张量满足如下的变换规律：

$A'_\alpha=a_{\alpha\beta}A_\beta$，$A_\alpha A_\alpha=$不变量.

$T'_{\alpha\beta}=a_{\alpha\rho}a_{\beta\sigma}T_{\rho\sigma}$，$(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

标量函数 $\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$经坐标变换后不变 $\phi(x')=\varphi(x)$.

$$d\varphi' = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'^{\alpha}} dx'^{\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} = d\varphi.$$

因为 dx'^{α}，dx^{α} 是矢量，所以$\frac{\partial\varphi}{\partial x'^{\alpha}}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}$也是矢量，称为标量 φ 的四维梯度. $\frac{\partial}{\partial x'_{\alpha}} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}$，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_{\alpha}} = \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\beta}}.$$

$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$是四维梯度算符，与三维空间中的$\nabla$相当.

矢量 A_{α} 的散度$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$.

令 $A_{\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}}$，则$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}} = \Box\varphi.$

$$\Box\varphi = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}.$$

矢量 A_{α} 的旋度定义为 $\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$，是反对称张量.

§1-2　洛仑兹张量

令 $x^0 \equiv t$*，$x^1 \equiv x$，$x^2 \equiv y$，$x^3 \equiv z$.

定义　四维坐标逆变矢量（Contravariant Vector）为

$x^{\alpha} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z).$

定义　闵可夫斯基张量

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1-2-1}$$

---

* 按惯例我们采用光速 $c=1$ 的自然单位制.

又称二阶协变度规张量（Covariant metric tensor of rank two）.

定义 坐标协变矢量 $x_\alpha=\eta_{\alpha\beta}x^\beta=(t,\ -x,\ -y,\ -z)$.

即 $x_0=x^0$, $x_i=-x^i$ ($i=1,\ 2,\ 3$).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2=(\mathrm{d}x^0)^2-(\mathrm{d}x^1)^2-(\mathrm{d}x^2)^2-(\mathrm{d}x^3)^2\\
&=\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta=\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x_\alpha.
\end{aligned}
$$

在三维空间中，同一项出现重复指标表示从 1 到 3 求和，且都用拉丁字母 i, j, k, …表示. 在四维空间中，用希腊字母 α, β, γ, …表示，重复指标表示对 0, 1, 2, 3 求和.

逆变度规张量 $\eta^{\alpha\beta}$ 由下式定义：

$$x^\alpha=\eta^{\alpha\beta}x_\beta.$$

$\eta^{\alpha\beta}$ 是 $\eta_{\alpha\beta}$ 之逆. $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma}=\eta^\alpha_\gamma=\delta^\alpha_\gamma$.

易证 $\eta^{\alpha\beta}$ 与 $\eta_{\alpha\beta}$ 的分量相同，即 $\eta^{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}$.

上指标叫逆变指标（Contravariant index）.

下指标叫协变指标（Covariant index）.

一对求和指标叫傀标（dummy index），求和以后它自动消失. 例如

$$x^\alpha=\eta^{\alpha\beta}x_\beta=\eta^{\alpha0}x_0+\eta^{\alpha1}x_1+\eta^{\alpha2}x_2+\eta^{\alpha3}x_3,$$

β 就是傀标，显然上式也可写成

$$x^\alpha=\eta^{\alpha\gamma}x_\gamma=\eta^{\alpha\tau}x_\tau.$$

傀标的字母可任意变动，但不得与该项中的其它指标相同，例如上式绝不可写成

$$x^\alpha=\eta^{\alpha\alpha}x_\alpha.$$

有了上之记号就可把洛仑兹变换（简记为 L. T.）及其逆变换写成以下之形式：

$$
\begin{cases}
x'^\alpha=a^\alpha{}_\beta x^\beta\\
x^\beta=a_\alpha{}^\beta x'^\alpha
\end{cases}
\quad\text{或}\quad
\begin{cases}
x'_\alpha=a_\alpha{}^\beta x_\beta.\\
x_\beta=a^\alpha{}_\beta x'_\alpha.
\end{cases}
\tag{1-2-2}
$$

$$a^{\alpha}{}_{\beta}=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma v & 0 & 0\\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \tag{1-2-3}$$

$$a_{\alpha}{}^{\beta}=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma v & 0 & 0\\ \gamma v & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}. \tag{1-2-4}$$

其中，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

下面定义在L. T. 下的标量、矢量和张量.

标量（Scalar）：又称零阶张量的定义是，通过L. T. 以后保持不变的量叫标量. 例如 $\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}\tau$，c….

矢量或称一阶张量满足如下变换规则：

$A'^{\alpha}=a^{\alpha}{}_{\beta}A^{\beta}$，$B'_{\alpha}=a^{\beta}{}_{\alpha}B_{\beta}$.

张量：二阶逆变张量和二阶协变张量的变换规则分别是：

$T'^{\alpha\beta}=a^{\alpha}{}_{\rho}a^{\beta}{}_{\sigma}T^{\rho\sigma}$，$T'_{\alpha\beta}=a_{\alpha}{}^{\rho}a_{\beta}{}^{\sigma}T_{\rho\sigma}$.

二阶混合张量的变换规则是

$T'^{\alpha}{}_{\beta}=a^{\alpha}{}_{\rho}a_{\beta}{}^{\sigma}T^{\rho}_{\sigma}$.

类似地可以定义高阶张量.

利用度规张量 $\eta^{\alpha\beta}$ 和 $\eta_{\alpha\beta}$ 可以将矢量或张量的下指标提升和上指标下降，例如：

$\eta^{\alpha\beta}A_{\beta}=A^{\alpha}$，　$\eta_{\alpha\beta}A^{\beta}=A_{\alpha}$，　$A_{\alpha}{}^{\beta}=\eta_{\alpha\rho}A^{\rho\beta}=\eta^{\rho\beta}A_{\alpha\rho}$，

$A^{\alpha}_{\beta}=\eta^{\alpha\rho}A_{\rho\beta}=\eta_{\rho\beta}A^{\alpha\rho}$，　$A_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma}A^{\rho\sigma}$，　$A^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}A_{\rho\sigma}$等.

下面引进几个新的矢量.

定义　四维(逆变)速度(矢量)　$U^{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}$.

由 $\mathrm{d}s$ 的定义知，原时 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}s=\dfrac{dt}{\gamma}$　(1-2-5)

或$\frac{dt}{ds}=\gamma$，则

$$U^{\alpha}\equiv\frac{dx^{\alpha}}{ds}\equiv\gamma(1,v^{i}),(i=1,2,3). \tag{1-2-6}$$

其中v^i是粒子的速度分量，$v^1=\dot{x}$，$v^2=\dot{y}$，$v^3=\dot{z}$.

定义 四维(逆变)动量 $p^{\alpha}=m_0U^{\alpha}=(E,p^i)=E(1,v^i)$. (1-2-7)

m_0是粒子的静质量. $E=m$， $m=m_0\gamma$，$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$.

相应的协变量很易写出为：

$$U_{\alpha}=\eta_{\alpha\beta}U^{\beta}=\gamma(1,-\boldsymbol{v}^{i}).$$

$$U_{\alpha}U^{\alpha}=1. \tag{1-2-8}$$

$$p_{\alpha}=\eta_{\alpha\beta}p^{\beta}=(E,-p^{i}).$$

$$p_{\alpha}p^{\alpha}=E^{2}-p^{2}=m_0^{2}.$$

定义 四维力 $f^{\alpha}=m_0\frac{dU^{\alpha}}{ds}$.

则 $f^{\alpha}U_{\alpha}=U_{\alpha}m_0\frac{dU^{\alpha}}{ds}=\frac{m_0}{2}\frac{d}{ds}(U_{\alpha}U^{\alpha})=0.$

f^{α}的空间分量为

$$f^{i}=m_0\frac{dU^{i}}{ds}=m_0\frac{d}{ds}(\gamma v^{i})=\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}(m_0\gamma v^{i})=\gamma\frac{d}{dt}(mv^{i})$$
$$=\gamma F^{i}.$$

F^i是三维力的分量即$\boldsymbol{F}=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})$.

又因 $f^0U_0=-f^iv_i=\gamma^2F^iv^i=\gamma^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}$，

$U_0=\gamma$，所以 $f^0=\gamma\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$.

因此， $f^{\alpha}\equiv m_0\frac{dU^{\alpha}}{ds}=\gamma(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{F})$.

定义 Levi-Civita 张量：

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{cases}+1, & \alpha\beta\gamma\delta\text{ 是 }0,1,2,3\text{ 的偶置换},\\ -1, & \alpha\beta\gamma\delta\text{ 是 }0,1,2,3\text{ 的奇置换},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases} \tag{1-2-9}$$

下降全部指标后数值相同差一符号：

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

顺便写下梯度算符（gradient opeator）

$$\partial_\alpha\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\ \frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x^3}\right),$$

按协变矢量变换. 这是因为

$$\partial'_\alpha=\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}=\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}=a_\alpha{}^\beta\partial_\beta.$$

$$\partial^\alpha\equiv\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\ -\frac{\partial}{\partial x^1},\ -\frac{\partial}{\partial x^2},\ -\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_0},\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$ 按逆变矢量变换，$\partial'^\alpha=a^\alpha_\beta\partial^\beta$.

$$\partial^\alpha\partial_\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2.$$

是 Laplace 算符，它对 L. T. 不变，即

$$\partial'^\alpha\partial'_\alpha=\partial^\alpha\partial_\alpha.$$

§1-3　相对论电动力学

狭义相对论（Special Relativity 以后简书成 S. R.）要求物理定律是洛仑兹不变的. 根据任意张量的变换规律：

$$T'^{\alpha\beta\gamma\cdots}=a^\alpha{}_\rho a^\beta{}_\sigma a^\gamma{}_\lambda\cdots T^{\rho\sigma\lambda\cdots}.$$

若张量的各个分量 $T^{\rho\sigma\lambda\cdots}$ 在某惯性系 Σ 内全为零，则它在另一惯性系 Σ' 内也为零. 因此，如果在某个惯性系 Σ 内，物理规律都能写成张量方程 $T^{\rho\sigma\lambda}=0$，则经过 L. T. 以后，在任意惯性系 Σ' 中亦为零，即规律不变. 因此，现在要将电动力学方程改写成张量方程.

用国际单位表示的麦克斯韦方程组是

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho & \nabla\times\boldsymbol{B}-\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=j\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & \nabla\times\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0\end{array}\right\}\qquad(1\text{-}3\text{-}1)$$

电荷守恒 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$ (1-3-2)

场势关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}.$ (1-3-3)

洛仑兹条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$ (1-3-4)

将（1-3-3）代入（1-3-1）首两式，并利用（1-3-4），麦克斯韦方程可改写为

$$\left.\begin{aligned}\Box\varphi&=(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2})\varphi=-\rho\\ \Box A&=(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2})\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j}\end{aligned}\right\}\tag{1-3-5}$$

所有这些都是三维矢量方程，为了将它们改写成四维的张量方程，必须先引进几个四维矢量和四维张量

定义 四维电流密度.

$$j^{\alpha}=(\rho,j_x,j_y,j_z)=(\rho,j^i)=\rho(1,v^i),\quad \boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}.\tag{1-3-6}$$

则电荷守恒（1-3-2）可书成 $\frac{\partial j^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=0$， 或记作 $j^{\alpha}_{|\alpha}=0$*.

(1-3-7)

定义 四维势 $A^{\alpha}=(\varphi,A_x,A_y,A_z)=(\varphi,A^i).$ (1-3-8)

则洛仑兹条件（1-3-4）可书为 $\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=A^{\alpha}_{|\alpha}=0,$ (1-3-9)

即电流密度及四维势的散度都为零.

定义 $$F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0&-E_x&-E_y&-E_z\\E_x&0&-B_z&B_y\\E_y&B_z&0&-B_x\\E_z&-B_y&B_x&0\end{pmatrix},\tag{1-3-10}$$

* 注意，我们用符号 $|\alpha$ 表示对 x^{α} 求导数.

则
$$F_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}=\eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma}F^{\rho\sigma}.$$
(1-3-11)

注意 $F^{\alpha}{}_{\beta}=F^{\alpha\rho}\eta_{\rho\beta}=F_{\rho\beta}\eta^{\rho\alpha}$ 与 $F_{\beta}{}^{\alpha}=F^{\rho\alpha}\eta_{\rho\beta}=F_{\beta\rho}\eta^{\rho\alpha}$ 的区别.

于是,麦克斯韦方程(1-3-1)和场势关系(1-3-3)分别改书为:

$$F^{\alpha\beta}_{\ |\alpha}=j^{\beta},\quad F_{\alpha\beta|\gamma}+F_{\beta\gamma|\alpha}+F_{\gamma\alpha|\beta}=0. \tag{1-3-12}$$

$$F^{\alpha\beta}=\frac{\partial A^{\beta}}{\partial x_{\alpha}}-\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\beta}}=A^{\beta|\alpha}-A^{\alpha|\beta\,*}. \tag{1-3-13}$$

故有 $F^{\alpha\beta}=-F^{\beta\alpha}$, $F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$.

(1-3-5) 可合书为

$$\partial_{\beta}\partial^{\beta}A^{\alpha}=j^{\alpha}. \tag{1-3-14}$$

所有上面得到的四维方程都是L. T. 不变的. 即在L. T. 下,电动力学方程在不同惯性系中有相同形式, 这正是爱因斯坦引入相对论的最终目的.

习题 求电场和磁场的变换,并由此证明 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 和 E^2+B^2 都是L. T. 不变量.

最后, 洛仑兹力密度公式 $\boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 可改书成:

$$f^{\alpha}=F^{\alpha}{}_{\beta}j^{\beta}. \tag{1-3-15}$$

将 (1-3-12) 的第一式代入上式

$$f^{\alpha}=F^{\alpha}_{\ \beta}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}F^{\rho\beta}=\left[\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}(F^{\rho\beta}F^{\alpha}_{\ \beta})-F^{\rho\beta}\frac{\partial F^{\alpha}_{\ \beta}}{\partial x^{\rho}}\right]. \tag{1-3-16}$$

$$F^{\rho\beta}\frac{\partial F^{\alpha}_{\ \beta}}{\partial x^{\rho}}=F^{\rho\beta}\eta^{\alpha\sigma}\frac{\partial F_{\sigma\beta}}{\partial x^{\rho}}=\frac{\eta^{\alpha\sigma}}{2}\left(F^{\rho\beta}\frac{\partial F_{\sigma\beta}}{\partial x^{\rho}}+F^{\beta\rho}\frac{\partial F_{\sigma\rho}}{\partial x^{\beta}}\right)$$
$$=\frac{\eta^{\alpha\sigma}}{2}F^{\rho\beta}\left(\frac{\partial F_{\sigma\beta}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

---

* 注意符号的差别: $A^{\alpha}_{\ |\beta}=\dfrac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$, $A^{\alpha|\beta}=\dfrac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$ 等.

$$=-\frac{\eta^{\alpha\sigma}}{2}F^{\rho\beta}\frac{\partial F_{\beta\rho}}{\partial x^{\sigma}}=\frac{\eta^{\alpha\sigma}}{2}F^{\rho\beta}\frac{\partial F_{\rho\beta}}{\partial x^{\sigma}}=\frac{\eta^{\alpha\sigma}}{4}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(F^{\rho\beta}F_{\rho\beta}).$$

代入（1-3-15）

$$f^{\alpha}=\left[\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}(F^{\rho\beta}F^{\alpha}_{\ \beta})-\frac{\eta^{\alpha\sigma}}{4}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(F^{\rho\beta}F_{\rho\beta})\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(F^{\beta\rho}F^{\alpha}{}_{\rho}-\frac{\eta^{\alpha\beta}}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right).$$

定义 电磁场的能量-动量张量为：

$$T^{\alpha\beta}=-\left(F^{\beta\rho}F^{\alpha}{}_{\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right), \tag{1-3-17}$$

则 $$f^{\alpha}=-\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}=-T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}. \tag{1-3-18}$$

习题 求出所用 $T^{\alpha\beta}$ 的分量并证明 $T^{\alpha}_{\ \alpha}=0$.

注意：场的动量和能量并不组成四维矢量，而是组成四维张量，这是场和实物不同之处.

§1-4 流和密度

考虑位于 $\boldsymbol{x}_n(t)$，电荷 e_n 的粒子系.

定义

$$\begin{cases}\text{电荷密度 } \rho(\boldsymbol{x},t)=\sum\limits_n e_n\delta^3[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)].\\ \text{电流密度 } \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=\sum\limits_n e_n\delta^3[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n}{\mathrm{d}t}.\end{cases}$$

定义 $x^0_n(t)=t$，$j^0=\rho$，则上两式可合并为：

$$j^{\alpha}(x)=\sum_n e_n\delta^3[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)]\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}_n(t)}{\mathrm{d}t}.$$

$$=\int\mathrm{d}t'\sum_n e_n\delta^4[x-x_n(t)]\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}_n(t')}{\mathrm{d}t'}.$$ 写成后一等式是为了看出 j^{α} 是四矢. 其中 t' 可以换成固有时 τ，则由于 $\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}_n}{\mathrm{d}\tau}$ 是矢量，$\delta^4[x-x_n(t)]$ 是标量，所以 j^{α} 是矢量.