高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

线性代数习题全解

XIANXINGDAISHU XITI QUANJIE

人大·线性代数修订版

王艳芳 李海燕/编 著

大连理工大学出版社

Dalian University of Technology Press

线性代数习题全解

王艳芳　李海燕　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题全解 / 王艳芳,李海燕编著 .—大连：大连理工大学出版社，2003.9(2004.1 重印)
ISBN 7-5611-2386-8

Ⅰ.线… Ⅱ.①王… ②李… Ⅲ.线性代数—高等学校—解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 081499 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:9.75 字数:243 千字
印数:10 001 ~ 16 000
2003 年 9 月第 1 版 2004 年 1 月第 2 次印刷

责任编辑:范业婷 责任校对:王 鹏
封面设计:王福刚

定 价:11.50 元

卷首赠言

进将有为，退必自修。

——薛　瑄

古之立大事者，不惟有超世之才，亦必有坚韧不拔之志。

——苏　轼

前言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

《线性代数》是大学理工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者学好《线性代数》，扩大课堂信息量，提高应试能力，我们根据原国家教委审定的普通高等学校"线性代数"课程教学基本要求（教学大纲）编写了这本具有工具书性质的《线性代数习题全解》。

本书按照被全国许多院校经济、管理等专业采用的赵树嫄主编的《线性代数》（第三版）（中国人民大学出版社）的章节顺序，分为五章，每章的习题都作了较为详细的解答。有的题还给出了多种解法及其注意事项。编写这本书的目的是为了方便读者对照和分析。值得提醒的是：解题需亲自动手，通过本身的实践，积累经验。

本书使用了中国人民大学出版社出版的赵树嫄主编《线性代数》中的全部习题，在此表示衷心的感谢！本书得到了大连大学教务处徐晓鹏同志和信息工程学院赵植武同志，鞍山科技大学理学院李大为博士，沙秋夫教授的热情帮助，得到了大连理工大学出版社的大力支持，王丽燕教授担任主审，提出了宝贵的意见，张金利、柳杨等作了大量的校对工作，编者在此向他们一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，不妥之处一定存在，恳请广大读者提出批评和指正！

编著者

2003 年 9 月

目 录

第一章　行列式

（A）

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

解　原式$=1\times4-3\times1=1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

解　原式$=2\times2-1\times(-1)=5$

(3) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$

解　原式$=6\times12-9\times8=0$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

解　原式$=ab^2-a^2b=ab(b-a)$

(5) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

解　原式$=(x-1)(x^2+x+1)-x^2$

$$=x^3-x^2-1$$

(6) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

解 原式$=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{-2t}{1+t^2}$

$=\dfrac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}$

$=\dfrac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & \log b^a \\ \log a^b & 1 \end{vmatrix}$

解 原式$=1\times1-\log b^a\cdot\log a^b=0$

---

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解法 1 （对角线法则）

原式$=1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-3\times1\times2-2\times3\times1-1\times3\times2$

$=1+8+27-6-6-6=18$

解法 2 （化上三角形）

原式$\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2+2r_3}6\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-6\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=-6\times1\times1\times(-3)=18$$

解法 3　[按行(列)展开]

$$\text{原式}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-2\times3-2\times(3\times1-2\times2)+3\times(3\times3-1\times2)$$

$$=1-6+2+21$$

$$=18$$

解法 4　(综合法)

$$\text{原式}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-5&-7\\0&-1&-5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5&-7\\-1&-5\end{vmatrix}$$

$$=(-5)\times(-5)-(-7)\times(-1)$$

$$=25-7$$

$$=18$$

注意　对于二、三阶行列式可以使用对角线法则，但对于三阶行列式，使用对角线法则计算并不简单，可以利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式，其值为主对角线上元素之积，这是计算行列式的一种最常用的方法。四阶以上的行列式不满足对角线法则，在计算高阶行列式时，常使用综合法，首先利用行列式的性质将行列式的某行(列)化为仅含有一个非零元素，然后按此行(列)展开，变为低一阶行列式，如此继续下去，直到化为二阶行列式为止，再计算其值，使计算大大简化。

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

解 原式$\xlongequal[r_3-8r_1]{r_2-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=1\times(-1)^2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$=(-2)\times(-3)-1\times1=5$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

解 原式$\xlongequal{r_2-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5\times1-3\times4=-7$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

解 原式$=a\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

注意到在计算行列式时，有一行(列)的元素全为零，其值为零。

---

3. 证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}左式&=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\\&=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\\&=右式\end{aligned}$$

---

4. $k=?$ 时，$\begin{vmatrix}k&3&4\\-1&k&0\\0&k&1\end{vmatrix}=0$

解　因为$\begin{vmatrix}k&3&4\\-1&k&0\\0&k&1\end{vmatrix}=k^2-4k+3=(k-3)(k-1)=0$

所以　　$k=3$ 或 $k=1$ 时，$\begin{vmatrix}k&3&4\\-1&k&0\\0&k&1\end{vmatrix}=0$

---

5. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix}3&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}\neq0$

解　因为$\begin{vmatrix}3&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}=2x^2-4x=2x(x-2)$

所以当 $x\neq0$ 且 $x\neq2$ 时，$\begin{vmatrix}3&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}\neq0$

---

6. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 因为 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = -a^2+4$

所以 $-a^2+4>0$ 的充分必要条件是 $|a|<2$。

---

7. 求下列排列的逆序数：

(1)41253

解 $N(41253)=1+1+2+0+0=4$

(2)3712456

解 $N(3712456)=2+2+0+1+1+1+0=7$

(3)36715284

解 $N(36715284)=3+4+0+4+2+0+0+0=13$

(4)$n(n-1)\cdots21$

解 $N[n(n-1)\cdots21]$

$$=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{[(n-1)+1](n-1)}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

注意 在计算逆序数时，最好按一定顺序计算：与 1 构成逆序的个数，与 2 构成逆序的个数，…，与 $n-1$ 构成逆序的个数，然后累加起来为逆序总数。

---

8. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$

解　因为行指标已按自然顺序排列，该项的符号由列指标组成排列的逆序数来确定。

$$N(532416)=4+2+1+1+0+0=8$$

而 8 为偶数，所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$在六阶行列式中取正号。

(2)$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

解　因为行指标已按自然顺序排列，该项的符号由列指标组成排列的逆序数来确定

$$N(162435)=0+1+2+1+1+0=5$$

而 5 为奇数，所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$在六阶行列式中取负号。

(3)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$

解　行指标和列指标都没按自然顺序排列，该项的符号由行指标组成排列与列指标组成排列的逆序数之和来确定

$$N(251463)=2+0+3+1+0+0=6$$

$$N(136254)=0+2+0+2+1+0=5$$

而　$N(251463)+N(136254)=11$ 为奇数，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 在六阶行列式中取负号。

(4)$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$

解　列指标已按自然顺序排列，该项的符号由行指标组成排列的逆序数来确定

$$N(531462)=2+4+1+1+0+0=8$$

而 8 为偶数，所以 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$在六阶行列式中取正号。

(5)$a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$

解　列指标已按自然顺序排列，该项的符号由行指标组成排列的逆序数来确定。

$$N(654321)=5+4+3+2+1+0=15$$

而 15 为奇数，所以 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$在六阶行列式中取负号。

9. 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$成为 5 阶行列式$|a_{ij}|$中带有负号的项。

解 由行列式定义，每一项中的元素取自不同行不同列，故有 $k=1,l=5$ 或 $k=5,l=1$。

当 $k=1,l=5$ 时，该项为

$$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$$

行指标已按自然顺序排列，该项的符号由列指标组成的排列的逆序数来确定

$$N(31425)=1+2+0+0+0=3$$

而 3 为奇数，所以

当 $k=1,l=5$ 时，$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}a_{55}$为 5 阶行列式$|a_{ij}|$中带有负号的项。

当 $k=5,l=1$ 时，$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$为 5 阶行列式$|a_{ij}|$中带有正号的项。这是因为：在排列 31425 中仅对换两个数码 1 和 5，奇偶性发生改变。所以，奇偶排列发生改变。

10. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式为零。

证明 根据 n 阶行列式定义，$|a_{ij}|$的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

又$|a_{ij}|$中零元素个数大于 n^2-n，所以$|a_{ij}|$中不等于零的元素个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，由此可知行列式$|a_{ij}|$的任一项都等于零，所以，该行列式为零。即$|a_{ij}|=0$。

11. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在一般项中，$a_{1n}=1, a_{1j_1}=0, (j_1=1,2,\cdots,n-1)$；$a_{2,n-1}=2, a_{2j_2}=0, (j_2=1,2,\cdots,n-2,n)$；…；$a_{n-1,2}=n-1, a_{n-1,j_{n-1}}=0, (j_{n-1}=1,3,\cdots,n)$；$a_{n1}=n, a_{nj_n}=0(j_n=2,3,\cdots,n)$。因此，在该行列式中只有$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$这一项不为零，其他项均为零。由于

$$N(n(n-1)\cdots 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)n}{2}$$

于是

$$原式=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}n!$$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在一般项中，$a_{12}=1, a_{1j_1}=0, (j_1=1,3,\cdots,n)$；$a_{23}=2, a_{2j_2}=0, (j_2=1,2,4,\cdots,n)$；…；$a_{n-1,n}=n-1, a_{n-1j_{n-1}}=0, (j_{n-1}=1,2,\cdots,n-1)$；$a_{n1}=n, a_{nj_n}=0, (j_n=2,3,\cdots,n-1)$。因此，在该行列式中只有 a_{12}

$a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$这一项不为零，其他项均为零。由于行指标已按自然顺序排列，列指标的逆序数为

$$N(23\cdots n1)=n-1$$

于是 $$原式=(-1)^{n-1}n!$$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

若 j_3,j_4,j_5 中有两个取 1,2 列，则必有一个取 3,4,5 列中之一的零元素，故该行列式的值为零。

即 原式$=0$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

在一般项中，只有 $a_{13}=a_{22}=a_{34}=a_{41}=1$，$a_{1j_1}=0$，$(j_1=1,2,4)$，$a_{2j_2}=0$，$(j_2=1,3,4)$，$a_{3j_3}=0$，$(j_3=1,2,3)$，$a_{4j_4}=0$，$(j_4=2,3,4)$，因此，在该行列式中只有 $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$这一项不为零，其他项均为零。由于

$$N(3241)=3+1+0+0=4$$

于是 原式$=(-1)^4=1$