常微分方程

王兴涛 编

哈尔滨工业大学出版社

常微分方程

王兴涛　编

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 简 介

本书共分七章：绪论，初等积分法，线性方程组与方程，常系数线性微分方程与方程组，一般理论，稳定性初步，一阶偏微分方程。为了巩固所学知识，每章均配有一定量的习题，书后附有部分习题答案与提示。

本书可作为高等院校数学系本科学生的教材，也可供工科学生及工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程/王兴涛编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.3

ISBN 7-5603-1805-3

Ⅰ.常… Ⅱ.王… Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 090050 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451-6414749
印　　刷	哈尔滨市龙华印刷厂
开　　本	850×1168　1/32　印张 7.75　字数 200 千字
版　　次	2003 年 3 月第 1 版　2003 年 3 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1805-3/O·138
印　　数	1～3 000
定　　价	11.80 元

前　言

面临21世纪各门学科相互渗透和加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要，数学呈现出越来越重要的作用。而常微分方程除了作为各门学科的重要工具以外，在提高人才全面素质及培育理性思维和审美功能方面也起到了重要作用。

常微分方程是数学类专业及相关专业的重要基础课。它对先修课程及后修课程起到承前启后的作用，是数学科学理论中必不可少的一个重要环节。对训练学生分析问题和解决问题的能力起着不可替代的作用。常微分方程又是理论联系实际的重要数学分支之一。解决问题固然很重要，但作为基础，本书更强调学到解决问题的方法。

本书是为高等院校应用数学专业而编写的基础数学教材，但同时考虑到21世纪工科高级人才急需提高数学素质的要求，注意了工科学生所学的常微分方程知识与应用数学专业常微分方程内容的衔接。这也就为那些想深入学习常微分方程课程的工科学生提供了一本实用的参考书。主要内容包括：绪论，初等积分法，线性方程组与方程，常系数线性微分方程与方程组，一般

理论，稳定性初步，一阶偏微分方程。为了巩固所学知识，每章均配有一定量的习题，书后附有部分习题答案与提示。本书的起点低，具有基本微积分的知识即可阅读自学。

本书是在作者十多年讲授常微分方程的教学基础上形成的。哈尔滨工业大学数学系张宗达教授进行了审阅，提出了许多宝贵意见，在此深表谢意。虽经本人努力，但书中难免有不妥之处，恳请读者指正。

哈尔滨工业大学数学系

王兴涛

2002 年 10 月

目　　录

第一章 绪 论

虽然用一元函数关系能对某些客观事物作定量分析，但在实际问题中，寻求的某些变量之间的函数关系时，常常不能或不易直接找出，而按问题所服从的客观规律，却能建立含有未知函数的导数或微分的关系式，并称之为**常微分方程**。常微分方程是数学的重要分支之一，是数学科学理论联系实际的一个重要途径。它几乎和微积分同时产生，牛顿和莱布尼茨确立的微积分运算的互逆性，实际上就解决了最简单的常微分方程 $y'=f(x)$ 的求解问题。

例如 求 x^2 的一个原函数，如果把原函数记为 $y=f(x)$，则应满足

$$y'=x^2$$

把 y 看成未知函数，上式便是一个常微分方程。x^2 的一个原函数 $y=\dfrac{x^3}{3}$ 就是该常微分方程的一个解(称为特解)，而 x^2 的所有原函数的全体，即不定积分 $y=\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$ 也是该常微分方程的解(称为通解)。

1.1 几个例子

例 1 求过坐标原点的曲线方程，其上各点的切线斜率等于该点横坐标的平方。

解 设曲线方程为 $y=y(x)$，由条件知

$$y'=x^2 \tag{1.1}$$

又曲线过点（0, 0），于是满足条件 $y|_{x=0}=0$（称为初始条件）。

由初始条件确定通解

$$y=\frac{x^3}{3}+C \tag{1.2}$$

中的 $C=0$，于是所求过坐标原点的曲线方程为

$$y=\frac{x^3}{3} \tag{1.3}$$

它是满足初始条件的特解。

例 2 在考古学当中，利用碳–14 是测定年代的方法之一。碳–14 的半衰期为 5 730 年。1972 年出土长沙马王堆一号汉墓时，分析出了棺椁外用以防潮的木炭中碳–14 含量约为大气中的 0.775 7 倍（大气中碳–14 含量为 1.2×10^{-12}，当动植物活着时，体内碳–14 含量与大气中碳–14 含量大致相同。死后，随着时间的增加，体内的碳–14 含量将逐渐减少），试确定木炭的烧制年代（以此确定墓主下葬的年代）。

解 设在 t 时（年）的碳–14 的剩余量为 $R(t)>0$，于是衰变速率为 $-\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$，因为放射性元素的衰变规律为衰变速率与剩余量成正比，所以

$$-\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=kR \tag{1.4}$$

化成

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-k \qquad \frac{\mathrm{d}\ln R}{\mathrm{d}t}=-k$$

得到

$$\ln R = -kt + C \tag{1.5}$$

再由条件知

$$R(0) = 1.2 \times 10^{-12} \qquad R(5\,730) = \frac{1}{2}R(0)$$

从而

$$\ln R(0) = C \qquad \ln R(5\,730) = -5\,730k + \ln R(0)$$

解得

$$k = -\frac{1}{5\,730}[\ln R(5\,730) - \ln R(0)] = \frac{1}{5\,730}\ln 2$$

于是当 $R = 0.775\,7R(0)$ 时，有

$$\ln[0.775\,7R(0)] = -kt + C = -\frac{t}{5\,730}\ln 2 + \ln R(0)$$

得

$$t = -\frac{5\,730\ln 0.775\,7}{\ln 2} \approx 2\,100 \tag{1.6}$$

从而估计出墓主下葬的年代大约为公元前 128（1 972–2 100=–128）年。

上面两个例子中的常微分方程只含有一阶导数。下面再看一个含有二阶导数的例子。

例 3　以初速度 v_0 铅直向上抛一质量为 m 的物体，设物体运动只受重力影响，求任意时刻 t 物体的高度 $H(t)$。

解　设 g 表示重力加速度。而物体运动的速度 $v(t)$和加速度 $a(t)$可分别表示为

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \qquad a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}t^2}$$

由牛顿第二定律，应有

$$m\frac{d^2H}{dt^2}=-mg \tag{1.7}$$

即

$$\frac{d^2H}{dt^2}=-g \tag{1.8}$$

积分两次，得

$$H(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.9}$$

其中，C_1和C_2表示任意常数。又初始时刻满足的条件为

$$H\big|_{t=0}=H(0)=0 \qquad \left.\frac{dH}{dt}\right|_{t=0}=v\big|_{t=0}=v(0)=v_0 \tag{1.10}$$

从而确定出$C_1=v_0, C_2=0$，于是得时刻t物体的高度为

$$H(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1.11}$$

习 题 1.1

1. 求(t,x)平面上的一曲线，使其上每点处的切线与该点的向径和Ox轴构成一等腰三角形。

2. 已知一平面曲线经过某定点M_0，且曲线上每一点M（点M_0除外）的切线与直线M_0M的交角恒等于定数α_0，试求该曲线所适合的微分方程。

3. 一个高温物体在20°C的恒温介质中冷却，设在冷却过程中降温速度与物体和其所在介质的温差成正比。已知物体的温度为u_0，试求物体的温度$u(t)$所满足的微分方程，并写出初始条件。

4. 一质点在重力作用下沿某曲线无磨擦地滑动，在水平方向等速运动，试求该曲线所适合的微分方程。

5. 已知曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项，试求此曲线所适合的微分方程。

1.2 一般概念

能化成联系只有一个自变量、一个此自变量的未知函数及其未知函数导数的一个等式，称为**常微分方程**（简称微分方程或方程）。一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.12}$$

其中 F 为 $n+2$ 个自变量的已知函数。当中的未知函数导数的最高阶数，称为该常微分方程的**阶**。

如果把一个函数代入微分方程后变为恒等式，则称该函数为此微分方程的**解**（也称显示解）。如果 $\Phi(x,y)=0$ 确定的一个隐函数 $y=y(x)$是微分方程的解，则称 $\Phi(x,y)=0$ 是该微分方程的**隐式解**。如果一个 n 阶微分方程的解中含有 n 个独立的任意常数，则称该解为此微分方程的**通解**。如果一个 n 阶微分方程的隐式解中含有 n 个独立的任意常数，则称该解为此微分方程的**隐式通解**。

注意 通解并不一定是所有解，如微分方程

$$y'=3y^{\frac{2}{3}}$$

的通解为

$$y=(x+C)^3$$

但是特解 $y\equiv 0$ 不在通解之中。

对于给定的 $n+1$ 个数 $x_0,y_{1_0},y_{2_0},\cdots,y_{n_0}$，称 n 个条件

$$y\big|_{x=x_0}=y_{1_0},\ y'\big|_{x=x_0}=y_{2_0}\ ,\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_{n_0} \tag{1.13}$$

为微分方程(1.12)的**初始条件**。满足初始条件的解称为**特解**。把式(1.12)和式(1.13)放在一起称为**初值问题**。

如果 t 为自变量, $x(t)$表示未知函数, 则微分方程可写成

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \tag{1.14}$$

初始条件可写成

$$x\Big|_{t=t_0}=x_{1_0},\ x'\Big|_{t=t_0}=x_{2_0}\ ,\ \dots,\ x^{(n-1)}\Big|_{t=t_0}=x_{n_0} \tag{1.15}$$

如果能解出最高阶导数 $x^{(n)}$，得到

$$x^{(n)}=f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) \tag{1.16}$$

则称为**正规形微分方程**（也称为显式方程），其中 f 为 $n+1$ 个自变量的已知函数。

一种特殊的正规形微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \tag{1.17}$$

称为 n 阶**线性方程**，其中 $a_1(t),\cdots,a_n(t),f(t)$ 都是已知函数。

类似可以定义微分方程组。设 t 为自变量， $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 表示 n 个未知函数。这时**微分方程组**的一般形式为

$$F_i(t;x_1,x_1',\cdots,x_1^{(m_1)};x_2,x_2',\cdots,x_2^{(m_2)};\cdots;x_n,x_n',\cdots,x_n^{(m_n)})=0 \tag{1.18}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

对于给定的 $1+m_1+\cdots+m_n$ 个数 $t_0,x_{i1_0},x_{i2_0},\cdots,x_{im_{i0}}$， $i=1,2,\cdots,n$ 称 n 组条件

$$x_i\Big|_{t=t_0}=x_{i1_0},\ x_i'\Big|_{t=t_0}=x_{i2_0}\ ,\ \dots,\ x_i^{(m_i-1)}\Big|_{t=t_0}=x_{im_{i0}} \tag{1.19}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

为该微分方程组的**初始条件**。把式(1.18)和式(1.19)放在一起称为微分方程组的**初值问题**。

正规形微分方程组的一般形式为

$$x_i^{(m_i)} = f_i(t;x_1,x_1',\cdots,x_1^{(m_1-1)};\cdots;x_i,x_i',\cdots,x_i^{(m_i-1)};\cdots;x_n,x_n',\cdots,x_n^{(m_n-1)})$$

$$i=1,2,\cdots,n \tag{1.20}$$

一阶正规形微分方程组的一般形式为

$$x_i' = f_i(t,x_1,\cdots,x_n) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.21}$$

一种特殊的一阶正规形微分方程组

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.22}$$

称为**线性微分方程组**，其中 $a_{ij}(t), f_i(t)$ （$i,j=1,2,\cdots,n$）都是已知函数。

本书将主要研究正规形微分方程和一阶正规形微分方程组。

习 题 1.2

1．设 $x=\varphi(t)$ 是微分方程

$$F(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n})=0$$

在区间 $a<t<b$ 上的解（注意方程中不显含自变量 t），试证明对任何常数 C，$x=\varphi(t+C)$ 也是这个微分方程的解，并确定它的定义区间。

2．下列曲线族所满足的微分方程

（1） $x=\sin(t+C)$ （2） $x=Ct+C^2$

（3） $(t-C_1)^2+(x-C_2)^2=1$ （4） $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t-1$

3．求二次曲线族

$$\frac{t^2}{C^2}+\frac{x^2}{C^2-1}=1$$

的微分方程，并从微分方程本身证明此曲线族是自正交曲线族，即此曲线族中的任何两条曲线如果相交，则必正交。

1.3 正规形微分方程和一阶正规形微分方程组的等价关系

设 $x=\varphi(t)$ 是正规形微分方程

$$x^{(n)}=f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) \tag{1.23}$$

在区间 I 上的解，即对任何 $t\in I$，都有

$$\varphi^{(n)}(t)=f(t,\varphi(t),\varphi'(t),\cdots,\varphi^{(n-1)}(t)) \tag{1.24}$$

从

$$\begin{cases}[\varphi(t)]'=\varphi'(t)\\ [\varphi'(t)]'=\varphi''(t)\\ \quad\vdots\\ [\varphi^{(n-2)}(t)]'=\varphi^{(n-1)}(t)\\ [\varphi^{(n-1)}(t)]'=f(t,\varphi(t),\varphi'(t),\cdots,\varphi^{(n-1)}(t))\end{cases} \tag{1.25}$$

知

$$x_1=\varphi(t),x_2=\varphi'(t),\cdots,x_n=\varphi^{(n-1)}(t) \tag{1.26}$$

是一阶正规形微分方程组

$$
\begin{cases}
x_1' = x_2 \\
x_2' = x_3 \\
\vdots \\
x_{n-1}' = x_n \\
x_n' = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{cases}
\tag{1.27}
$$

在区间 I 上的解。反之，设

$$
x_1 = \varphi(t), x_2 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_{n-1}(t) \tag{1.28}
$$

是一阶正规形微分方程组(1.27)在区间 I 上的解，即对任何 $t \in I$，都有

$$
\begin{cases}
\varphi'(t) = \varphi_1(t) \\
\varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\
\vdots \\
\varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t) \\
\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t))
\end{cases}
\tag{1.29}
$$

于是

$$
\varphi_1(t) = \varphi'(t), \varphi_2(t) = \varphi''(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t) = \varphi^{(n-1)}(t) \tag{1.30}
$$

所以

$$
\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)) \tag{1.31}
$$

这说明 $x = \varphi(t)$ 是正规形微分方程(1.23)在区间 I 上的解。这样称正规形微分方程(1.23)与一阶正规形微分方程组(1.27)是等价的。

如果 $x = \varphi(t)$ 是正规形微分方程(1.23)满足初始条件

$$
x\big|_{t=t_0} = x_{1_0}, x'\big|_{t=t_0} = x_{2_0}, \ldots, x^{(n-1)}\big|_{t=t_0} = x_{n_0} \tag{1.32}
$$

的解，则由上面的推导可看出

$$x_1 = \varphi(t), x_2 = \varphi'(t), \cdots, x_n = \varphi^{(n-1)}(t) \tag{1.33}$$

是一阶正规形微分方程组(1.27)满足初始条件

$$x_i(t_0) = x_{i0} \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.34}$$

的解。反之，如果 $x_1 = \varphi(t), x_2 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_{n-1}(t)$ 是一阶正规形微分方程组(1.27)满足初始条件(1.34)的解，则 $x = \varphi(t)$ 是正规形微分方程(1.23)满足初始条件(1.32)的解。这样称正规形微分方程(1.23)的初值问题与一阶正规形微分方程组(1.27)的初值问题是等价的。

1.4 方向场

下面从几何角度来讨论一阶正规形微分方程

$$x' = f(t, x) \tag{1.35}$$

解的问题。

设 $f(t,x)$ 在 t、x 平面上某区域 G 上有定义。方程(1.35)在 G 中的解的曲线称为方程(1.35)的**积分曲线**。方程(1.35)描述为它的积分曲线在点(t,x)处的切线斜率等于函数值 $f(t,x)$。

假若在 G 中每一点都画上一个以函数值 $f(t,x)$ 为斜率并一律指向 t 增加方向的有向小线段，则称在 G 中做出了由方程(1.35)确定的**方向场**。在 G 中，由 $f(t,x) = C$（常数）确定的点的轨迹，称为**等倾线**，即等倾线在方向场中的斜率取同一值 C。

方程(1.35)的一条积分曲线所经过的每一点都与方向场在该点的方向相切，直观说，积分曲线就是始终顺着方向场中的方向行进的曲线。因此，求方程(1.35)的满足初始条件

$$x\Big|_{t=t_0} = x_0$$