

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

平面幾何學
直線圖形

林鶴一 管集人著

黃元吉譯

商務印書館發行

平面幾何學
直線圖形

林鶴一 菅集人著
黃元吉譯

算學小叢書

編主五雲王
庫文有萬
種千一集一第

形圖線直一學何幾

著人集營 一鶴林
譯吉元黃

路山寶海上
館書印務商 者刷印兼行發

埠各及海上
館書印務商 所行發

版初月四年九十國民華中

究必印翻權作著有書此

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

RECTILINEAR FIGURE
By
HAYASHI and SUGA
Translated by
HUANG YUAN CHI
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930
All Rights Reserved

記 號

幾何學普通所用之記號如次

$\angle$ 角	$\perp$ 垂直, 正交
$R\angle$ 直角	$=$ 相等
$\equiv$ 全等	$\neq$ 不等
$>$ 大於	$<$ 小於
$\nlessgtr$ 不大於	$\nlessgtr$ 不小於
$\therefore$ 故	$\because$ 因
$\triangle$ 三角形	$\square$ 平行四邊形
$\parallel$ 平行	$\sim$ 差
ab a, b 二直線所包之矩形	$\simeq$ 相似
a^2 a 直線上之正方形	

目 次

緒 論

幾何學之目的	1
立體, 面, 線, 點,	1
體面線點之關係	2
直線, 平面, 圖形	2
幾何學之構成	3
公理, 定義, 定理及系	4
定理之關係	5

第一章 直線及角

角, 共軛角, 隣角, 平角, 直角, 銳角, 鈍角, 外角, 餘角	8
測角法	9
例題 I.	10
定理 1. 平角必相等	11
定理 2. 二隣角之和	12
定理 3. 逆	12
主要問題 1.	13
例題 II.	13
定理 4. 對頂角必相等	15
主要問題 2.	15
例題 III.	16
定理 5. 垂線有一無二	17
定理 6. 垂線	17

定理 7. 斜線.....	18
定理 8. 斜線相等.....	18
定理 9. 凸折線之周.....	20
定理 10. 斜線	21
雜題 I.....	23

第二章 平行線

定義, 公理	25
定理 11., 12.	25
定理 13., 14.,	26
主要問題 3.....	27
例題 IV.....	27
定理 15. 錯角相等	28
定理 16. 逆	29
主要問題 4.....	31
例題 V.....	31

第三章 三角形及多角形

第一節 三角形之疊合

定理 17. 二邊夾角	35
主要問題 5.....	35
例題 VI.....	36
定理 18. 二角夾邊	37
主要問題 6.....	38
例題 VII.....	38
定理 19. 三邊相等	39

主要問題 7.	40
例題 VIII.	40
定理 20. 直角三角形全相等	41
主要問題 8.	41
例題 IX.	42
第二節 邊角之關係	
定理 21. 三角形二邊之和	43
定理 22. 三角形三內角之和	43
主要問題 9.	45
例題 X.	45
定理 23. 二等邊三角形之底角	46
定理 24. 逆	46
主要問題 10.	47
例題 XI.	48
定理 25. 二邊不等	48
定理 26. 逆	49
主要問題 11.	49
例題 XII.	50
定理 27. 二邊相等, 夾角不等	51
定理 28. 逆	52
主要問題 12.	53
例題 XIII.	53

第三節 多角形

定理 29. 多角形內角之和	55
----------------	----

定理 30. 多角形外角之和	55
主要問題 13, 14.	56
例題 XIV.	57
雜題 II.	57

第四章 平行四邊形

定義	61
定理 31. 平行四邊形之性質	61
定理 32. 平行四邊形之條件	62
定理 33. 矩形之對角形	63
主要問題 15.	64
例題 XV.	64
定理 34. 三角形二邊中點之距離	65
主要問題 16.	67
主要問題 17.	68
例題 XVI.	68
定義 對稱	70
主要問題 18.	72
例題 XVII.	72
雜題 III.	73
全編之雜題	76
解法指針	87

平面幾何學 直線圖形

緒 論

1. 幾何學之目的 試觀種種物體，有長，有短，有厚，有薄，有大，有小，有輕，有重，其性質千差萬別，不遑枚舉；然熟察之，無論何種物體，必有其所同具者；計凡三事：即形狀大小及位置是也。是蓋就一切物體，剔去其所組織之物質，而惟餘形骸以呈斯跡象者也，物體有種種之屬性，其由何物質組織而成，概置不論，惟就形狀大小位置，考究其真理，是即幾何學之目的。

2. 立體 此類之物體，如不論其所組織者為何物質，惟論形狀，大小，位置；則僅為物體之所占空間之一部分是也，因稱之為立體；立體有高，有

縱，有橫。

3. 面 立體爲有限之物，其立於無限之空間，必有其境界，此境界屬於立體而爲與空間最接近之部分，因稱之爲面，面有廣無厚。

4. 線 面之端爲線，面有廣無厚，故其端之爲線，有長無關。

5. 點 線之端爲點，以無關者之端，無復有大小之別，故點僅占一位置。

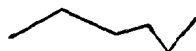
6. 體面線點之關係 體面線點云者，實皆假想物，不能見，不能觸，惟知而已；以鉛筆之尖端，着於紙上即生一小黑印，通例所云點是也，然非幾何學上之點，因其不能無廣也。又以此尖端在紙上移動，即生一條線，此亦非幾何學上之線，因其不能無闊也；必也小黑印之極限爲限點，而以此點移動，循其所留之跡，僅有長可紀者，乃可得幾何學上線之觀念；依同理，移動其線即生面，移動其面即生立體；然立體非面之集合，面非線之集合，線非點之集合，須注意於此爲要。（譯者按面無厚非體之一部，故立體非面之集合，餘類推。）

注意 移動其線有不生面，移動其面有不生立體者，此亦宜究其原因，又移動其立體又生何物乎？

7. 直線 線之中最單純者，厥惟直線，以細絲張之，即呈其形；若嚴格言之，則任於線中截取一部分，而以疊於其餘之部分上無弗密貼者，此線

乃爲直線。

直線之長，雙方無限，截取其一部分者，稱爲有限直線，或稱線分；又直線有時單稱線，以二點爲兩端之有限直線，其長卽此二點間之距離，其線由二以上之線分接成者，此線稱爲折線；其一線有一部分，不爲直線者，此線稱爲曲線。同通過一點之二直線，稱爲相交，其點稱爲交點。



8. 平面 面之中最單純者，厥惟平面，有如鏡面是也；嚴格言之，則任於面上取二點，通過此二點之直線，無弗與面密貼者，此面乃爲平面，其面有一部分不爲平面者稱爲曲面。

9. 圖形 係由體面線點及體面線點之集合而成，其同在一平面圖形，係由點線構成，平面幾何學專論平面圖形。

10. 幾何學之構成 幾何係就體面線點，考究真理，而順序以致其研究者也；先由經驗而得單純若干事件，認爲真確定爲基礎，由推理法以推及其他事理之真確，次更依此闡發新理，就種種之真理而次第以研究之，如是愈推愈進研求新理，或由常識，或由實驗，但既定爲真確者，此外不容遷就，卽其初雖由實驗認爲真確而定爲基礎，迨其後，必全歸於演繹，蓋幾何學者務在演繹論理之嚴正而已；人之思想求其精密，對於推理法之練習，幾何

學爲最適當之學科也。

11. 公理 由經驗而認爲真確，無待證明者，此稱爲公理；公理分二種：屬於普通者，稱爲普通公理；屬於幾何學者，稱爲幾何學公理；普通公理之重要者如次：

1. 同等於某量之二量必相等。
2. 全量等於其部分之和，故全量比一部分大，而一部分比全量小。
3. 二量以上之和，其相加之次序任何變更，皆相等。
4. 等量與同量或等量之和或差，必相差。
5. 等量之同倍量或同分量，必相等。
6. 不等量與同量或等量之和或差，不相等。
7. 諸大量之和比諸小量之和大。

注意 同與等之區別，同者就一個言，等者就二個以上言也。

幾何學公理如次：

1. 任意二點間之最短距離，必爲直線。
2. 通過二點之直線，有一而無二，依此公理推之，得(a)(b)二項如次：(a)公有二點或一部分之二直線，必疊成一直線；(b)二直線祇有一交點。
3. 在直線兩側之二點，聯成直線，必與原直線相交。
4. 圖形之位置雖變，其形狀大小不變。
5. 以平面之一部分，於其中任取一直線爲折

痕，而返折之，得疊合於他部分之上。

6. 平行線之公理詳後。

12. 定義 係就其所用之語，而明定其意義也。

13. 定理及系 定理由定義，公理及認為真確之事件依推理法，斷定此理之必為真確。

例如 a, b, c, d 成比例，其內項之積 bc 必等於外項之積 ad 。

定理由假設終結二者而成；假設者假定之意，終結者假定之結果也。

如前例 a, b, c, d 成比例，此為假設，以下即終結也。

論由假設所以得終結之故者曰證明，乃證明終結之為真確也，其所引用之事件，必係先認為真確自不待言；由定理易於證明者，特稱之為系，然系亦不外定理也。

14. 定理之關係 如前項所述，定理係由假設，終結二者而成；其普通所用之形式如次：

甲若為乙丙必為丁，

甲若為乙云者，假設之詞也，丙必為丁云者，終結之詞也；此形式可簡之如次：為 A 者，必為 B ，為 A 者假設，必為 B 者終結，今於「為 A 者為 B 」之定理，以其終結之反對「不為 B 者」為假設，而以其假設之反對「必不為 A 」為終結，使別成一定理如次：不為 B 者，必不為 A ；此定理稱為前定理之對偶，對偶定理與原定理，祇是詞意反對，其內容之無變化可知。

一定理若為真確，其對偶亦必真確。

例如：某整數之第一位爲 0 「爲 A 者」，此數必爲 10 之倍數「必爲 B 」；其對偶則爲某整數不爲 10 之倍數。「不爲 B 者」，其第一位必不爲 0。「必不爲 A 」，此爲真確明甚；次以一定理之假設終結，爲他定理之終結假設，此二定理互爲逆，即爲 A 者必爲 B ，其逆爲 B 者必爲 A ；例如某數之第一位爲 0，此數必爲 10 之倍數，其逆某數爲 10 之倍數，其第一位必爲 0，又例知某數之第一位爲 5 此數必爲 5 之倍數，其逆某數爲 5 之倍數，其第一位必爲 5；由此二例觀之，某定理之逆，有真確，（前例），有不真確，（後例）。

故一定理雖爲真確，其逆未必真確。

又次以一定理假設終結之反對，爲他定理之假設終結，此二定理互爲裏：即爲 A 者必爲 B ，其裏不爲 A 者必不爲 B 。例如：某數之第一位爲 0，此數必爲 10 之倍數，其裏某數之第一位不爲 0，此數必不爲 10 之倍數；又例如：某數之第一位爲 5，此數必爲 5 之倍數，其裏某數之第一位不爲 5，此數必不爲 5 之倍數，此二例，亦前例真確，後例不真確。某定理爲 A 者必爲 B ，其逆爲 B 者必爲 A 。其裏不爲 A 者必不爲 B 。如是則某定理之逆理，有互爲對偶之關係，而對偶定理固真否與公者也。

故一定理雖爲真確，其裏未必真確。

茲就定理之對偶，逆及裏相互之關係，綜列之如次：

- (1) 爲 A 者必爲 B 。
- (2) 不爲 B 者必不爲 A 。
- (3) 爲 B 者必爲 A 。
- (4) 不爲 A 者必不爲 B 。

對 偶	(1), (2)	(3), (4)
逆	(1), (2)	(3), (4)
裏	(1), (2)	(3), (4)

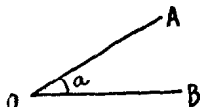
今若提出此四定理，而求其證明，則依逆，裏及對偶之關係而利用之，對於此四定理不必一一證明；蓋如前所述對偶定理，真否與共，則證明其可也。若逆及裏則與原定理非真否與共者須證明爲要，故前表逆及裏之欄，凡四組，無論何組，均須詳爲證明。

第 一 章

直 線 及 角

定義 1. 由一點引二直線，如是所成之圖形，謂之角；其點稱為角之頂點，二直線為角之邊。

例如由 O 點引二直線 OA, OB ，此圖形謂之角， O 為頂角之頂點， OA ， OB 為角之邊，稱角者，以頂所記之字居中而以各邊所記之字左右之如 AOB 角，或 BOA 角是也，又或記之如次：

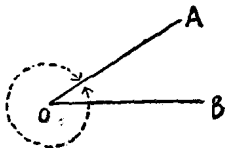


$$\angle AOB, \quad \angle BOA,$$

有時僅以頂點所記之字或角內所記之字稱之，如所稱 O 角 α 角是也，或稱 $\angle AOB$ 為 OA, OB 所夾之角。

定義 2. AOB 角之所由成，其始 OA 係疊於 OB 之上，取與時針旋轉相反之向，以 O 為中心，依平面旋轉，至 OA 之位置，即成 AOB 角。

又其始 OA 疊於 OB 之上，與計時針旋轉同向，以 O 為中心，依平面旋轉，至 OA 之位置，亦成 AOB 角，故由一點引二直線實成二角，

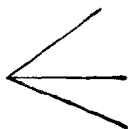


似此公有頂點及二邊之二角稱為共軛角，其大者為優角，小者為劣角；通常所稱角，係指劣角言也。

據此則一直線 OA ，以 O 為中心，依平面旋轉，即成一角，是角大小由於動線旋轉之多少，而於動線 OA 之長短絕無關係。

定義 3. 公有頂點及一邊之二角，而在公有之邊之兩側者，此二角稱為鄰角，或稱接角。

定義 4. 平角云者，角之二邊在頂點之兩側而成為一直線者也。



例如： $\angle AOB$ 之二邊 OA, OB 在頂點之兩側而成為一直線，此 $\angle AOB$ 為平角，似此則二共軛角相等。



定義 5. 一直線與他直線相交，所成二鄰角相等者，各稱之為直角，此由定義，知平角等於二直角，而直角等於平角之半，二直線相交成直角者，此二直線互為垂線，或稱垂直，又稱正交，其交點稱為正交點，其線不為垂線者，稱為斜線。

定義 6. 其角比直角小者，稱為銳角，比直角大而比二直角小者，稱為鈍角。

定義 7. 二角之和等於一直角者，此二角互為餘角，二角之和等於二直角者，此二角互為外角。

定義 8. 以直角為單位，計算角之大小，所餘不免過多，因分直角為九十等分，其每一等分謂之度，又分一度為六十等分，其每一等分謂之分，又分