高中数学

极限 导数 微积分

龙门专题

主编 傅荣强

本册主编 傅荣强等

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

龍門書局

龙门专题

极限 导数 微积分

龙门专题

极限 导数 微积分

主编 傅荣强

本册主编 傅荣强 朱岩 于长军 杨启发 常青 孙吉利

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

极限 导数 微积分/傅荣强主编;朱岩等编著.—北京:龙门书局,2003

(龙门专题)

ISBN 7-80160-806-2

Ⅰ.极…　Ⅱ.①傅…　②朱…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 012317 号

责任编辑:王　敏　韩　杨　/　封面设计:郭　建

龍門書局出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国人民解放军第 1201 工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2003 年 6 月第　一　版　开本:A5(890×1240)

2003 年 6 月第一次印刷　印张:6 1/4

印数:1－50 000　字数:224 000

定　价:7.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计55种,其中初中数学12种,高中数学12种,初中物理5种,高中物理7种,初中化学4种,高中化学10种,高中生物5种。应广大读者的要求,2002年又新增地理4种,研究性学习5种,初中语文8种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——"基础篇"和"综合应用篇"(高中为"3+X"综合应用篇)。"基础篇"中的每节又分为"知识点精析与应用"、"视野拓展"两个栏目。其中**"知识点精析与应用"**着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。**"视野拓展"**则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩"更上一层楼"而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为"拓展",但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行"3+X"高考模式以后,这一趋势更加明显。"综合应用篇"正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. *以“专”为先* 本套书共计72种，你尽可以根据自己的需要从中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. *讲解细致完备* 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3. *省时增效* 由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. *局限性小* 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5. *主次分明* 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2003年3月

编委会 （高中数学）

目　录

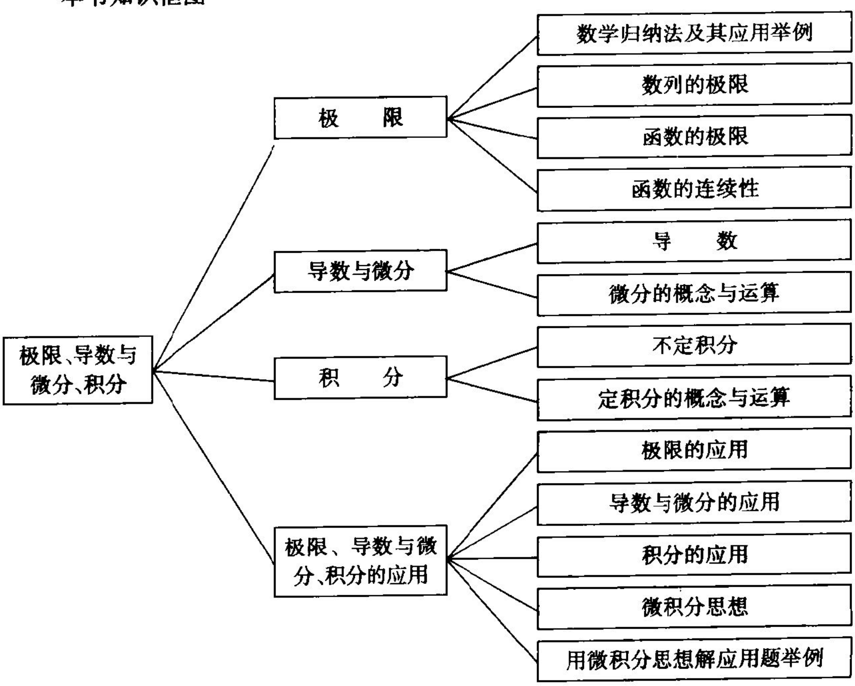
第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说是研究“数”与“形”的学科．数学来源于实践又反过来作用于实践，其中普遍存在着对立统一、运动变化、相互联系、相互转变，并可为自然现象、社会系统提供应用模型．

本书分为四大部分：极限，导数与微分，积分，极限、导数与微分、积分的应用．

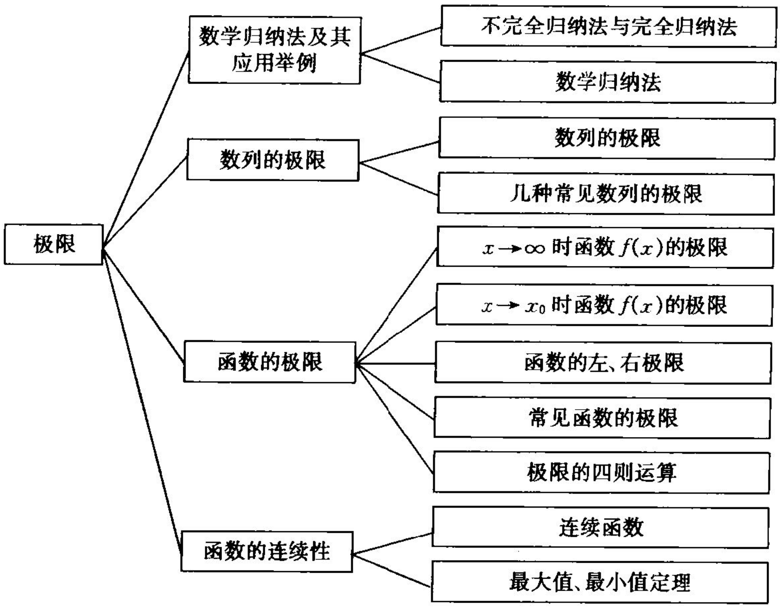
导数与微分、积分是特殊形式的极限．极限是研究变量在无限变化中的变化趋势的一门科学，它的本质是从静止中认识运动，从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变．

本书知识框图



第一讲 极 限

本讲知识框图



1.1 数学归纳法及其应用举例

重点难点归纳

重点 数学归纳法的一般步骤.

难点 对数学归纳法原理的领悟.

本节需掌握的知识点 ①了解不完全归纳法和完全归纳法的相同点和不同点.

②数学归纳法的一般步骤.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1．不完全归纳法与完全归纳法

(1)不完全归纳法

不完全归纳法是根据事物的部分特例得出一般结论的推理方法.

由不完全归纳法得到的命题,可能是真命题,也可能是假命题.因此,不完全归纳法不能作为推理论证的方法.尽管如此,我们仍然可以把不完全归纳法视为研究数学的一把钥匙,用它去打开数学研究中的特例研究的大门,通过这些特例的不完全归纳,先是形成一些猜想,或者说发现其中的规律,然后再试图去证明猜想或规律的正确性,或者否定这些猜想与规律.

(2)完全归纳法

完全归纳法是一种在研究了事物的所有特殊情况后得出一般结论的推理方法,它又叫枚举法.

用完全归纳法得出的结论是可靠的.

如果事物包括的特殊情况不多,那么对该事物的推理,通常采用完全归纳法.

2．数学归纳法

(1)数学归纳法的适用范围

用数学归纳法可以判断与正整数有关的数学命题的真假.

(2)数学归纳法

对于由不完全归纳法得到的某些与正整数有关的数学命题,常用两个步骤来证明它们的正确性:

①证明当 n 取第一个值 n_0(如 $n_0=1$ 或 $n_0=2$ 等)时,命题成立;

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时,命题成立,证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

在完成了这两个步骤以后,就可以判定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立.这种证明方法叫做数学归纳法.

用数学归纳法证明某些数学命题时,①的完成往往是通过验证的方式去实施的,其中 n_0 称为初值.②中的"假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时,命题成立",一般称为"归纳假设",归纳假设的起始值从 n_0 开始.①、②都完成以后,命题对 $n=n_0$成立,对 $n=k+1(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$也成立,于是命题对

$$n_0,n_0+1,n_0+2,\cdots$$

都成立.

值得注意的是用数学归纳法证明数学命题时，必须使用归纳假设，否则，无论怎样，其证明都要算作是错误的，因为它脱离了数学归纳法的轨道.

【解题方法指导】

1. 用数学归纳法证明等式

[例 1] 用数学归纳法证明

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1(n\in\mathbf{N}^*).$$

证明 (1)当 $n=1$ 时，有

左边 $=1\cdot1!=1$，右边 $=(1+1)!-1=2-1=1$，

∴ 等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时等式成立，即

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1,$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!\\&=(k+1)!\,[1+(k+1)]-1\\&=(k+1)!\,(k+2)-1\\&=(k+2)!-1.\end{aligned}$$

$(k+1)!-1$源于归纳假设

∴ $n=k+1$ 时等式也成立.

由(1)、(2)知，等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

2. 用数学归纳法证明不等式

[例 2] 用数学归纳法证明

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2).$$

证明 (1)当 $n=2$ 时，有

$$1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2},$$

∴ 不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant2)$ 时不等式成立，即

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k},$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

使用了归纳假设

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=2-\frac{1}{k+1},$$

$\therefore$ $n=k+1$ 时不等式也成立.

由(1)、(2)知,不等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\geqslant2$ 都成立.

点评 本例证明过程中的"$\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}$"是对不等式实施加强的产物,依据是$(k+1)^2>k(k+1)$.

[例 3] 用数学归纳法证明

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{3n}{2n+1}\quad(n\in\mathbf{N}^*).$$

分析 用数学归纳法证题的关键是第二步.难点也是第二步.在本例中,我们不能像证等式那样将$\frac{3k}{2k+1}$和$\frac{1}{(k+1)^2}$相加,一般来说,这两项相加并不恰好等于$\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1}$,这正是问题的难点所在.本例可考虑融归纳假设、分析法、求差比较法或放缩法于一体,实施对不等式的证明.

证明 (1)当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=\frac{3\times1}{2\times1+1}=1$,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(n\in\mathbf{N}^*)$时,不等式成立,即 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\geqslant\frac{3k}{2k+1}$,则

当 $n=k+1$ 时,要证 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1}$,只要证 $\frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2k+3}$.

这步的意思是先看一看结果什么样?把求证式中的"n 换成 $k+1$"就知道了!知道结果以后,执果索因,用分析法证明

$$\because\frac{3(k+1)}{2k+3}-\left(\frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$=\frac{3}{4(k+1)^2-1}-\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$=\frac{1-(k+1)^2}{(k+1)^2[4(k+1)^2-1]}$$
$$=\frac{-k(k+2)}{(k+1)^2(4k^2+8k+3)}<0,$$
$$\therefore\frac{3k}{2k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2k+3},$$

即
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\geqslant\frac{3(k+1)}{2(k+1)+1},$$

$\therefore$ $n=k+1$ 时不等式成立.

由(1)、(2)知,不等式对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

3．用数学归纳法证明整除问题

[例 4] 设 n 是任意的正整数，求证：n^3+5n 能被 6 整除.

分析 用数学归纳法证明整除问题，要把 $n=k$ 时的式子设为整除形式，即除式乘以一个整式，以便在后面的 $n=k+1$ 时的被除式中依此去变形.

证明 (1)当 $n=1$ 时，$n^3+5n=1^3+5\times1=6$ 能被 6 整除.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，k^3+5k 能被 6 整除，则

由于$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$

$$=(k^3+5k)+3k(k+1)+6,$$

其中，k^3+5k 与 $3k(k+1)$分别能被 6 整除，

所以，当 $n=k+1$ 时，n^3+5n 也能被 6 整除.

由(1)、(2)知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，n^3+5n 都能被 6 整除.

点评 $3k(k+1)$能被 6 整除，其理论依据是 $k(k+1)$能被 2 整除，或者说，k 与 $k+1$ 是两个连续的正整数，其积 $k(k+1)$一定是偶数.

4．用数学归纳法证明数列问题

[例 5] 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n 是其前 n 项的和. 当 $n\geqslant2$ 时，a_n，S_n，$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列，求 a_2，a_3，a_4 的值，由此猜想$\{a_n\}$的一个通项公式，并证明所得的结论.

分析 由于 a_n，S_n，$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列，所以 $S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$，由此可得出 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 与 a_n 的关系.

解 当 $n\geqslant2$ 时，由 a_n，S_n，$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列，可得

$$S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right),$$

所以 $S_2^2=a_2\left(S_2-\frac{1}{2}\right)$，

即
$$(a_1+a_2)^2=a_2\left(a_1+a_2-\frac{1}{2}\right),$$

把 $a_1=1$ 代入上式，得 $a_2=-\frac{2}{3}$；

又 $S_3^2=a_3\left(S_3-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $(a_1+a_2+a_3)^2=a_3\left(a_1+a_2+a_3-\frac{1}{2}\right)$，

把 $a_1=1$，$a_2=-\frac{2}{3}$代入上式，得 $a_3=-\frac{2}{15}$；

同理可求出 $a_4=-\frac{2}{35}$.

猜想当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=-\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$，这时$\{a_n\}$的一个通项公式是

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

下面用数学归纳法去证明猜想是正确的：

(1)当 $n=2$ 时，$a_2=-\dfrac{2}{(2\times2-1)(2\times2-3)}=-\dfrac{2}{3}$，

所以，猜想正确.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant2)$时猜想正确，即 $a_k=-\dfrac{2}{(2k-1)(2k-3)}$，则

$$\begin{aligned}S_k&=1-2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k-3)}\right]\\&=1-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)\\&=1-\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)=\frac{1}{2k-1}.\end{aligned}$$

假设中为什么取 $n\leqslant k$，“$\leqslant$”起什么作用？S_k中的“小括号里面的中间的各项互相抵消，剩下首末两项”，即 $1-\dfrac{1}{2k-1}$. 这种“抵消”至少要有两项才行，那么初值也必须至少两项

由 $S_{k+1}^2=a_{k+1}\left(S_{k+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，即$(S_k+a_{k+1})^2=a_{k+1}\left(S_k+a_{k+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，得

$$a_{k+1}=\frac{-S_k^2}{S_k+\frac{1}{2}}=-\frac{\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2}{\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{(2k+1)(2k-1)},$$

所以，当 $n=k+1$ 时猜想也是正确的.

由(1)、(2)知，猜想对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant2$ 是正确的.

结合 $a_1=1$ 知，对

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)} & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

的猜想是正确的.

5. 用数学归纳法证明几何问题

[例 6] 证明任一凸 $n(n\geqslant4)$边形都可以变形成一个与它面积相等的三角形.

分析 本例采用数学归纳法来证明，其中初值 $n=4$.

证明 如图 1-1.

(1)当 $n=4$ 时，在凸四边形 $ABCD$ 中，连结 AC，过 D 作 $DE\parallel CA$，交 BA 的延长线于E，连结 CE.

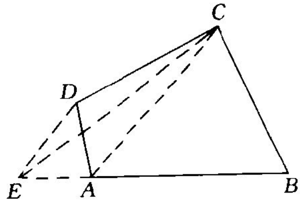


图 1-1

∵ $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACE$ 等底等高，

∴ $\triangle ACD$ 与 $\triangle ACE$ 的面积相等，

∴ 四边形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle BCE$ 的面积相等，

∴ 命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 4)$ 时，凸 k 边形可以变形成一个与它面积相等的三角形，则

当 $n=k+1$ 时，有

∵ 凸四边形可以变形成一个与它面积相等的三角形，

∴ 凸 $k+1$ 边形可以变形成一个与它面积相等的凸 k 边形.

由归纳假设，可知**凸 k 边形可以变形成一个与它面积相等的三角形**.

∴ 当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)、(2)知，命题对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 4$ 都成立.

点评 本例的证明中，难点在"凸 $k+1$ 边形可以变形成一个与它面积相等的凸 k 边形"上.对此的解释如下：把凸 $k+1$ 边形分为一个凸四边形和一个凸$(k+1)-4$ 边形，其中凸四边形可以变形为一个与它面积相等的三角形；再把这个三角形与凸$(k+1)-4$ 边形合在一起，其结果就是一个凸 k 边形.

【基础训练题】

一、选择题

1. 下列结论中，正确的是 ( )

A. 用数学归纳法证明数学命题时，初值 n_0 的值一定是 1

B. 用数学归纳法证明数学命题时，不使用归纳假设也是允许的

C. 用数学归纳法证明数学命题时，$n=k+1$ 时命题成立即可保证命题成立

D. 用数学归纳法证明数学命题时，命题的成立是靠 $n=n_0$(初值)和 $n=k+1(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时命题都成立共同保证的

2. 用数学归纳法证明命题"$(n+1)(n+2)\cdots(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$"时，第二步在假设 $n=k$ 时命题成立，去证明 $n=k+1$ 时命题也成立，需在等式的两边同乘的因式是 ( )

A. $2k+1$　　B. $2k+2$　　C. $(2k+1)(2k+2)$　　D. $4k+2$

3. 用数学归纳法证明：当 n 为正奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除，第二步的假设应写成 ( )

A. 假设 $n=k$(k 为正奇数)时命题正确，再推证 $n=k+1$ 时命题正确

B. 假设 $n=2k+1\ (k\in\mathbf{N}^*)$时命题正确，再推证 $n=2k+2$ 时命题正确

C. 假设 $n=2k+1\ (k\in\mathbf{N}^*)$时命题正确，再推证 $n=2k+3$ 时命题正确