Xianxing Daishu Xuexi Zhidao

线性代数学习指导

四川大学数学学院 杨志和 主编

四川大学出版社

线性代数学习指导

主　编　杨志和
编　者（按姓氏笔画排序）
牛健人　吕子明　杨志和
张慎语　周厚隆　徐小湛

四川大学出版社
2003·成都

责任编辑:李川娜
责任校对:廖　敏
封面设计:罗　光
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导 / 杨志和主编．—成都：四川大学出版社，2003.8
ISBN 7-5614-2679-8

Ⅰ.线...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 078684 号

内容提要

本书是根据教育部非数学类数学课程指导委员会制定的教学基本要求，兼顾研究生入学考试要求编写的，是编者多年来从事数学教学、辅导工作的结晶．

本书紧密配合线性代数现行教材内容，按章介绍了内容提要、学习要求、答疑辅导、例题解析、自我检测题及解答等内容，以帮助读者深入理解基本概念与基本理论、掌握基本运算技巧，避免易犯的错误，拓宽解题思路和提高分析、解决问题的能力．

本书可供理、工、经、管、医、农等非数学类专业大学生学习线性代数同步使用，也可供参加硕士研究生入学考试的考生复习使用．另外亦可作为从事线性代数教学的教师与非数学类专业研究生的参考书．

书名　**线性代数学习指导**

主　编　杨志和
出　版　四川大学出版社
地　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印　刷　郫县犀浦印刷厂
发　行　四川大学出版社
开　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　张　9.25
字　数　206 千字
版　次　2003 年 9 月第 1 版
印　次　2004 年 1 月第 2 次印刷
印　数　3 001～7 000 册
定　价　13.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

在阅读本指导书之前，我们希望同学们对这门课程与本书总的情况有所了解.

1. 线性代数课程的目的与任务

线性代数是非数学类(理、工、经、管)专业大学本科生的一门重要的数学基础课程，是提供处理离散量的数学思想与方法的知识载体.通过对线性代数的基本概念、理论和方法的学习，培养学生熟练的运算能力，一定程度的逻辑思维和推理能力，初步具有应用线性代数(线性方程组、矩阵方法)解决一些实际问题的能力，为进一步学习其他后继课程奠定必要的数学基础.

代数是现代数学的重要基石，它的基本内容早已成为现代数学基础的重要组成部分.这门课的学习，除了可以使学生初步领略到数学的理性美外，在训练学生逻辑思维、形象思维、以及抽象和模式思维等方面，都非常重要.

2. 线性代数课程的内容与特点

线性代数主要研究线性系统的表述和处理，主要是以行列式、矩阵、向量为工具，集中处理解线性方程组和二次型化为标准形的问题(有时还包括线性变换).线性代数课程具有以下特点：

(1)抽象性强　线性代数研究抽象集合中的代数运算与结构，由此引进了与微积分完全不同的工具，建立了一整套新的基础理论与方法.它与微积分相比，其研究方法与对象均不相同，很多概念与理论都较抽象，无直观背景，不像微积分课程中研究的函数大都有图像可以借鉴，故而不易理解.如矩阵的秩、向量空间、向量组的线性相关与线性无关等.

(2)概念与理论多　线性代数的不少内容是概念与定理集中出现，一个接一个，这会给初学者带来较大困难.

(3)解题方法灵活，富于技巧性　线性代数的概念与论证题往往带有归纳、综合的特点，且一般涉及的都不是具体数据，而是用字母表示的元素，需要用到较多的分析、比较、归纳、综合技巧.而计算题则往往工作量较大，且容易出错.

3. 学习线性代数课程的要求

(1)要注意对基本概念的理解，弄清其内涵与其他概念的关系.

(2)要注意弄清基本理论提出的背景，即它们是为了解决什么问题而建立起来的，其条件与结论是什么，有什么作用.

(3)要注意掌握基本的、典型的运算方法与技巧，力求做到熟练并能正确运用.

为达到以上总的要求，同学们必须做到认真听讲，认真复习，及时完成作业，积极思考问题.我们提倡独立思考与集体讨论相结合，教师辅导与学生自学相结合.

4. 本书有关情况介绍

在多年的教学实践中我们发现,多数同学在学习线性代数这门课程时均有不同程度的困难,有的甚至长期难以入门;同时这门课程的课堂授课时间安排并不充裕,教师难以在课堂上对若干基本概念进行深入探讨,难以对一些知识点做到融会贯通,更不要说扩大知识面了;再则,近年来研究生入学考试对线性代数的要求在教学大纲范围内也在不断提高.为了克服以上诸多矛盾,我们组织编写了这本学习指导书,期望它能成为同学们学习本门课程及以后考研复习时的良师益友.

本书与当前已出版的多数线性代数教材配合紧密,但在章节、次序、术语、符号上可能略有不同.其基本内容均按章展开,主要包含以下几个方面:

(1)内容提要　以简要文字阐明本章的基本内容,提出重点、难点,以及在本门课程中的地位和作用,同时归纳出本章的知识结构图.

(2)学习要求　参照有关课程教学大纲和本章的内容,从概念、理论、方法、能力诸方面给同学们提出具体要求.

(3)答疑辅导　采用一问一答方式编写,每章提出若干问题,它们涉及概念内涵、定理意义、运算技能、难点分析,易犯错误的提示,必要内容的适当补充,一些重要的反例等,这些问题大都是初学者普遍感到疑惑、理解不好的问题.

(4)例题解析　精选了一批有代表性的,涉及本门课程主要内容的例题,力求在解法上有典型性,在内容上对教材有巩固、补充、开拓、提高的作用,尤其侧重剖析解题的思路与方法.例题中大部分是基础性的题目,少数是涉及多个知识点的综合性题目,个别的是近年来全国硕士研究生入学考试题目.

(5)知识结构图与自我检测　每章开始提出本章知识结构图,以图表形式列出了各个知识点的有机联系,帮助同学们从总体上把握这一章的内容与结构.在每一章最后选编了一套自我检测题,供同学们在学完有关内容并复习后,通过自我解题检测其掌握与运用这部分知识(概念、理论、方法)的程度与能力.检测题分A、B两组,A组题大多是基本题,B组题普遍有一定难度,两组题各有其不同作用,均附有简要的参考解答或提示.有的题目可能有多种解答,但我们往往只介绍其中一种,其余解法留给同学们自己思考,建议同学们先试着独立思考解题后,再根据参考解答或提示予以核对检查.

本指导书由杨志和担任主编,负责全书的统一协调、编纂与定稿.第一章由杨志和编写,第二章由牛健人编写,第三章由徐小湛编写,第四章由吕子明编写,第五章由张慎语编写,第六章由周厚隆编写.

由于作者水平所限,书中难免存在不足与错误,敬请读者批评指正,以待将来进一步修改.

编　者

2003年8月

目　　录

第一章　行列式

内容提要

行列式是线性代数中的一个最基本的概念,它是研究线性代数的一个重要的工具.本章主要包含以下内容:

1. 介绍行列式的概念.首先从求解二元(三元)一次方程组自然地引出二阶(三阶)行列式,对于一般的 n 阶行列式则借助于排列及其逆序数建立.

2. 讨论了行列式的一些基本性质.这些性质主要是指当行列式具有某种特殊结构或对其行(列)作某种变换时,该行列式的值为零、不变或反号.

3. 介绍了行列式按一行(列)展开定理.这里要用到代数余子式这个重要的概念,它的实质是将高阶行列式降阶.

4. 利用行列式的基本性质及展开定理可以简化行列式的计算.本章介绍了几种特殊行列式——上(下)三角形行列式、范德蒙(Vandermon)行列式.

重点　行列式的概念、性质与按一行(列)展开定理

难点　行列式的运算技巧

本章知识结构图

$$
\text{行列式}\begin{cases}
\text{行列式的概念(排列、逆序)} \\
\text{行列式的性质(为零、保值变换、反号、加法)} \\
\text{行列式按一行(列)展开定理} \\
\text{行列式的计算(定义、性质、展开定理)}
\end{cases}
$$

学习要求

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 掌握三阶、四阶行列式的算法,会计算简单的 n 阶行列式.

答疑辅导

问 1.1 研究行列式有什么意义?

答 在生产实践、经济管理、科学技术工作中,一些变量(不止两个)之间的关系常常可以直接地或近似地用比较简单的一次函数形式表示,这些用一次函数形式表示的关系就是所谓的线性关系,或者称线性函数.因此研究线性函数是很重要的问题.而线性代数就是主要研究线性函数的一个数学分支.行列式是线性代数中的一个最基本的概念,它是研究线性代数的一个重要的工具.读者可以见到,在线性方程组、矩阵、二次型、线性变换等内容的讨论中都大量地用到行列式.行列式最先是从人们求解线性方程组的需要中建立起来的,除此之外,它在数学科学本身及其他科学,如物理学、力学、管理科学等中都有广泛的应用.

问 1.2 如何正确理解行列式的概念?行列式的定义有什么应用?

答 按通常定义,一个 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积,而其符号则与这 n 个元素的列(行)标组成排列的奇偶性有关.因此行列式可看为一种特定的算式,当行列式的元素全是数时,这个行列式也就表示一个数,只不过这个数(或值)必须按照行列式定义的规则来计算.

行列式的定义有如下几方面的应用:用定义直接计算较简单的行列式(对角形,三角形及含有较多零元素的行列式);决定行列式中某一项的符号;确定行列式中某些特定项的表达式.

注意 有的书上采用归纳方式定义行列式,即用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式,这实质上就是利用行列式按行(列)展开定理.

问 1.3 行列式的性质有很多条,应该怎样去掌握它们呢?

答 首先要明白,讨论行列式性质的目的是什么?由定义本身当然可以直接计算行列式,但除了少数较简单的行列式外,用定义来计算是很困难和麻烦的,如计算一个 n 阶行列式,要作 $n!(n-1)$次乘法,即使使用计算机也不方便.为此人们才对其作了进一步研究,探讨其一些基本性质,引用这些性质,可以大大简化行列式的计算.此外在理论研究上,行列式的性质也有着重要的意义.

行列式的性质看起来又多又杂,但如果针对其结论大致可以分为三类(以下均对行叙述):第一类性质属于其值为零的,它包括某行全为零,两行全同,两行元素成比例;第二类性质属于保持值不变的变换(简称保值变换),它包括行列互换(转置),把某行的倍数加到另一行上(倍加);第三类性质包含其他几种情形,它包括两行互换(其值反号),某行提公因子(或数乘行列式某行),按某一行拆为两个行列式的和(加法法则).后两条性质主要是为了使行列式的结构由复杂变为简单.行列式的性质作了如上归类后,就比较容易记忆与

应用了.

问 1.4 如何记好、用好行列式展开定理?

答 这里首先要理解行列式的某个元素的代数余子式概念,决不能把代数余子式与余子式混为一谈;其次要记住,行列式的某一行(列)元素各乘以自己的代数余子式再求和,就等于行列式的值,而与另一行(列)对应元素的代数余子式相乘的积之和则为零.

行列式展开定理应用较广,有的教材甚至直接利用这个定理给出行列式的归纳性定义,即每个行列式总可以经过连续多次的展开最终表示为一些二阶行列式的线性组合,而这些二阶行列式可以直接按规则(对角线法则)计算出来.

从正面来看,行列式展开定理可以用来计算行列式的值.例如,D 是一个 n 阶行列式,则有

$$D = |a_{ij}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

但从逆向思维即从反面来看,它还可以用来计算某行(列)元素的代数余子式的线性组合之值,如 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是n 个实数,求和式$\sum\limits_{j=1}^{n}k_iA_{ij}$ 之值,则只需计算将 D 的第i 行元素依次换为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 所得的行列式的值$\tilde{D}$.

克莱姆(Gramer)法则的证明中就有这种应用,把线性方程组的第 i 个方程两端分别乘以A_{ik},再把全部 n 个方程的左、右端分别加到一起,由展开定理得

$$Dx_k = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \cdots + b_nA_{nk},$$

若 $D\neq0$,则 $x_k=\dfrac{D_k}{D}$.行列式 D_k 就是利用逆向思维得到的,即将系数行列式 D 的第k 列换为方程组的常数列后产生的新行列式.

问 1.5 如何才能又迅速又正确地算出行列式的值?

答 行列式的计算是行列式这部分知识的重点,也是一个难点,可以作为一个专题来讨论,有不少理论与计算方法是按类型提出的成型的方法.但由于提出的类型较多,相应的运算技巧也较复杂,对初学者来讲难以一下掌握,我们这里是作为基础课介绍最基本的方法与技巧.

计算行列式的基本途径有三条,用定义、用性质、用展开定理,它们各有相应的有效适用范围,故而或单独用,或结合起来用,其中结合起来用是最为有效的方法.这里常用的方法与技巧是先根据行列式的性质尽可能化简行列式(如提公因子、倍加、拆项,但要作保值变换),使某一行(列)含有较多零,再按这行(列)展开,或使其变为三角形行列式,直接得出结果.有时也可将其变形为一些特殊的已有结论的行列式来进行计算,如化为范德蒙行列式.

例题解析

例 1.1 考查下列乘积是否包含于相应阶数的行列式中,如果是,应取什么符号?

(1)$a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$； (2)$a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{62}a_{43}$.

解 (1)先改变所给项中元素的先后顺序,使其行标按自然顺序排列,可得 $a_{16}a_{27}a_{33}a_{44}a_{55}a_{61}a_{72}$,由于此时列标排列为 6734512,是一个 7 阶排列,故所给项是 7 阶行列式的一项,又由行列式的定义,此项前面的符号为

$$(-1)^{\tau(6734512)}=(-1)^{5+5+2+2+2}=(-1)^{16}=1,$$

故该项前面应为正号.

此题也可以这样判断,注意到所给乘积的行标 3172564 构成一个 7 阶排列,$\tau(3172564)=8$,列标 3627514 也构成一个 7 阶排列,$\tau(3627514)=12$,故该乘积是 7 阶行列的一项,由于

$$(-1)^{\tau(3172564)+\tau(3627514)}=(-1)^{20}=1,$$

所以该项前面应为正号.

(2)对乘积 $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{62}a_{43}$,由于其行标 2357264 不是一个 7 阶排列(因数组中有两个 2,但没有 1),故它不包含在该行列式的展开式中.

注 题中所给的两个数都是行列式中不同元素的乘积,因此,要判断它们是否为行列式中的项,关键是看它们是否满足行列式定义展开式的要求,即该乘积是否为不同行不同列的 n 个元素的乘积,如确属行列式中某一项,再由其下标排列的奇偶性来确定其前面的符号,这里又有两种确定方法如(1)中所示.

例 1.2 用定义计算下列行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不为 0.

解 由行列式定义知,若求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 的列标 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 的所有 5 阶排列,即可求出行列式的所有非零项,为此可先由第 1 行的非零元素及其位置,写出 j_1 可能取的数码;再由第 2,3,4,5 行的非零元素及其位置分别写出 j_2,j_3,j_4,j_5 可能取的数码,在所有可能取的数码中,求出 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 的所有 5 阶排列,具体如下:

$$j_1=2,3;\quad j_2=1,2,3,4,5;\quad j_3=1,2,3,4,5;\quad j_4=2,3;\quad j_5=2,3.$$

因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 在上述可能取的数码中,一个 5 阶排列也不能组成,故 D_5 无非零项,即 $D_5=0$.

注 从本题解法还可推知,一个 n 阶行列式 D 中位于某 s 行,k 列交叉处元素全为 0,且 $s+k>n$,则此行列式 D 等于 0. 如行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (用字母表示的元素都为非零元素).}$$

由此题可知,只有含零元素较多的行列式,用定义计算才有效.

例 1.3　试求 $f(x)$中 x^4 项的系数,已知:

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　$f(x)$中含 x 因子的元素有

$$a_{11} = -x,\quad a_{21} = x,\quad a_{23} = 2x,\quad a_{32} = x,$$
$$a_{35} = 3x,\quad a_{44} = x,\quad a_{52} = -7x.$$

因而,含有 x 因子的元素 a_{ij_i} 的列标只能取

$$j_1 = 1;\quad j_2 = 1,3;\quad j_3 = 2,5;\quad j_4 = 4;\quad j_5 = 2.$$

于是含 x^4 的项中,元素 a_{ij_i} 的列标只能取

$$j_1=1,\quad j_2=3,\quad j_3=2,\quad j_4=4;\quad j_2=1,\quad j_3=5,\quad j_4=4,\quad j_5=2.$$

相应的 5 阶排列只有 13245, 31542,含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55} = 4x^4,$$
$$(-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52} = 21x^4,$$

故 $f(x)$中 x^4 项的系数为 $4+21=25$.

注　本题介绍了行列式中含特定元素的所有项的求法,这些方法的关键仍是元素的列标组成的可能的排列如何确定,这时行标自然是按标准(或自然)顺序排列.

例 1.4　计算下列行列式的值:

$$(1)\ \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解　(1) 原式$\xlongequal[\text{(1列)提公因子 1 000}]{\text{(1列)+(2列)·(1)+(3列)·(1)}} 10^3\begin{vmatrix} 1 & 427 & 327 \\ 2 & 543 & 443 \\ 1 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[(2列)提公因子100]{(2列)+(3列)\cdot(-1)} 10^5\begin{vmatrix}1 & 1 & 327\\2 & 1 & 443\\1 & 1 & 621\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(3行)+(1行)\cdot(-1)]{(2行)+(1行)\cdot(-2)} 10^5\begin{vmatrix}1 & 1 & 327\\0 & -1 & -211\\0 & 0 & 294\end{vmatrix} = -294\times 10^5.$$

(2) 原式$\xlongequal[(1行)与(2行)交换]{(3行)提公因子(\frac{1}{2})} -\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\-2 & 3 & 0 & -1\\1 & 4 & 2 & -5\\0 & 1 & -2 & 4\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[(3行)+(1行)\cdot(-1)]{(2行)+(1行)\cdot(2)} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\0 & -1 & 2 & -1\\0 & 6 & 1 & -5\\0 & 1 & -2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(4行)+(2行)\cdot(1)]{(3行)+(2行)\cdot(6)} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\0 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & 13 & -11\\0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

$=\dfrac{39}{2}.$

注 本例题的计算方法称为“化成三角形法”，这是计算行列式的一种常用的典型方法. 在化为三角形行列式时，往往要用到若干行列式的性质，如提公因子、倍加等. 若有分数时应像(2)小题一样，先将分数行列式变成整数行列式再进行计算.

例 1.5 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}4 & 1 & 2 & 4\\1 & 2 & 0 & 2\\10 & 5 & 2 & 0\\0 & 1 & 1 & 7\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\2 & \lambda+2 & -1\\1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$.

解 (1) 原式$\xlongequal[(3行)+(4行)\cdot(-2)]{(1行)+(4行)\cdot(-2)}\begin{vmatrix}4 & -1 & 0 & -10\\1 & 2 & 0 & 2\\10 & 3 & 0 & -14\\0 & 1 & 1 & 7\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{按第3列展开}(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}4 & -1 & -10\\1 & 2 & 2\\10 & 3 & -14\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(3列)+(1列)\cdot(-2)]{(2列)+(1列)\cdot(-2)}(-1)\begin{vmatrix}4 & -9 & -18\\1 & 0 & 0\\10 & -17 & -34\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按第2行展开}(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-9 & -18\\-17 & -34\end{vmatrix}$$

$=0$（两列成比例）.

(2) 原式 $\xlongequal[(3列)+(2列)(1-\lambda)]{(1列)+(2列)\cdot(-1)}\begin{vmatrix}\lambda+1 & -5 & 5\lambda-3\\-\lambda & \lambda+2 & -\lambda^2-\lambda+1\\0 & 1 & 0\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{按第3行展开}-\begin{vmatrix}\lambda+1 & 5\lambda-3\\-\lambda & -(\lambda^2+\lambda-1)\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1.$$

注　行列式按某行(列)展开能将高阶行列式的计算转化为若干个较低阶行列式的计算,这是计算数字型行列式的常用方法.但值得注意的是,展开前往往先利用行列式性质,将某一行(列)的元素尽可能多的化成零,然后按这一行(列)展开后降阶计算.

本例两小题均是利用行列式的展开定理来计算行列式,这里特别要注意代数余子式所带的符号$(-1)^{i+j}$,千万不要遗忘.

例1.4,1.5集中讨论了计算行列式的两种主要方法,读者一定要掌握.对例1.5(2)小题这种行列式一定要会计算,因为以后在计算矩阵的特征值时要用到.

例1.6　记行列式

$$\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$$

为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D)4.

解　$f(x)\xlongequal[i=2,3,4]{(i列)+(1列)\cdot(-1)}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\2x-2 & 1 & 0 & -1\\3x-3 & 1 & x-2 & -2\\4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{(4列)+(2列)\cdot(1)}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\2x-2 & 1 & 0 & 0\\3x-3 & 1 & x-2 & -1\\4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行列式的乘积}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

显然 $f(x)=0$ 的根的个数为 2,故应选(B).

注　含有字母的行列式比纯数字型的行列式计算要困难一些,求解这一类行列式的关键在于应设法利用行列式的性质使字母元素尽量减少,再照数字型行列式处理.本例中最后一步用到了行列式的一种乘法规则,对此可用展开定理证明.

例 1.7　设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,求 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$,其中 $A_{i2}(i=1,2,3,4)$为 D 中元素 a_{i2}的代数余子式.

解法 1　因 A_{i2}为 D 中元素 a_{i2}的代数余子式($i=1,2,3,4$),故将 D 中第 2 列元素依次换为 3,7,4,8,即得

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}=0.$$

解法 2　因 3,7,4,8 恰为 D 中第 3 列元素,而 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$为 D 中第 2 列元素的代数余子式,故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$表示 D 中第 3 列元素与另一列(第 2 列)的对应元素的代数余子式乘积的和.由展开定理知此和应等于零,即

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=0.$$

注　本题属于行列式代数余子式的一种应用,一般不直接计算出各个元素的代数余子式,而是想法根据行列式按某行(列)展开定理转化为一个新行列式讨论.这一新行列式往往具有某些特殊结构,易于求值.这类题还可以有其他一些类型.

例 1.8　用行列式性质,证明下列行列式能被 13 整除:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

证　本题虽未给出能被 13 整除的 3 个数为某行(列)元素,但如将 D 的 3 个行分别看成 3 个 3 位数 104,325,416,则不难验证,它们都能被 13 整除.故知应设法把某一列(如第 3 列)的各元素分别化成上述 3 个数,如将第 1,2 列分别乘以 10^2,10,且都加到第 3 列上,得到

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 104 \\ 3 & 2 & 325 \\ 4 & 1 & 416 \end{vmatrix}.$$

根据行列式的性质,因第 3 列能被 13 整除,故 D 也能被 13 整除.

注　本题方法特别适用于除数 m 为素(质)数的情形.如果 m 为合数,且其各因数分别能整除行列式某行(列)或某些行(列),由行列式性质便知该行列式能被合数 m 整除.这就是证明行列式能被某整数整除的常用方法.

例 1.9　计算下列行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1+\sin\varphi_1 & 1+\sin\varphi_2 & 1+\sin\varphi_3 & 1+\sin\varphi_4\\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \sin\varphi_3+\sin^2\varphi_3 & \sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4\\ \sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1 & \sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2 & \sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3 & \sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4\end{vmatrix}.$$

解　在 D 的第 2 行中去掉与第 1 行成比例的分行(或第 2 行减去第 1 行),得到

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 & \sin\varphi_4\\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \sin\varphi_3+\sin^2\varphi_3 & \sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4\\ \sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1 & \sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2 & \sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3 & \sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4\end{vmatrix}.$$

在上行列式的第 3 行中去掉与第 2 行成比例的分行(或第 3 行减去第 2 行),得到一个新行列式,在此新行列式的第 4 行中去掉与第 3 行成比例的分行(或第 4 行减去第 3 行),最后得到范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 & \sin\varphi_4\\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \sin^2\varphi_3 & \sin^2\varphi_4\\ \sin^3\varphi_1 & \sin^3\varphi_2 & \sin^3\varphi_3 & \sin^3\varphi_4\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(\sin\varphi_i-\sin\varphi_j).$$

注　本题展示了如何利用范德蒙行列式来计算行列式,这里首先要掌握范德蒙行列式的结构特点,还要记住其结果的表达式;其次在于灵活应用行列式的性质将所给行列式化为一个范德蒙行列式(或与原行列式有关的范德蒙行列式),再利用范德蒙行列式的公式得出结果.常用手法有提取公因式,调换各行(各列)次序,某行(列)乘数加到另一行(列)上,添加一行(列)适当方幂元素等等.

例 1.10　计算下列各 n 阶行列式的值:

$$(1)\ D_1=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix};\qquad (2)\ D_2=\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}.$$

解　(1) D_1 中的每行元素的和相等,故把后面 $n-1$ 列全加到第 1 列,再提出因式

$a+(n-1)b$,得

$$D_1=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix},$$

然后再把第 1 行乘(-1)分别加到第 2 行,第 3 行,…,第 n 行后,将 D_1 化为下三角形行列式

$$D_1=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$
$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(2) D_2 每行之和虽均为 $a+b$,但用(1)之方法解却有困难,化不成三角形行列式(读者可自行检验之),但根据 D_2 的具体特点,可将此行列式按第 1 列展开,就得到两个对角形行列式,最终可得

$$D_2=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

如 $a\neq0$,也可以设法将 D_2 化为三角形行列式.方法为从左向右,逐列消去 b,即将第 1 列乘以 $-\frac{b}{a}$加到第 2 列,再将新的第 2 列乘以 $-\frac{b}{a}$加到第 3 列……最后将新的第 $n-1$ 列乘以 $-\frac{b}{a}$加到第 n 列上,得到一上三角形行列式

$$D_2=\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0\\0&a&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&-\frac{b^2}{a}&\left(-\frac{b}{a}\right)^2b&\cdots&a+\left(-\frac{b}{a}\right)^{n-1}b\end{vmatrix}$$
$$=a^{n-1}\left[a+(-1)^{n-1}\frac{b^n}{a^{n-1}}\right]=a^n+(-1)^{n-1}b^n.$$

注 对像(1)小题中行列式所有行(列)对应的元素相加后相等的行列式,可以把其第 2 到第 n 行(列)加到第 1 行(列)后,提取公因子,化简计算.这是一种常用的方法,读者应注意这种方法的应用.类似地,常见的行列式计算题如

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

均可如此处理.

(2)小题属于非零元素特别少的行列式,对这类行列式可以直接按定义计算,也可按行或列展开降阶计算.这也是一种计算行列式常用的方法.

例 1.11　已知 $a_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$,计算下列行列式的值:

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式除第 1 行,第 1 列及主对角线元素外,其余元素全为零.把所有的第 $i+1$ 列($i=1,2,\cdots,n$)的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍加到第 1 列上,得到一下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i c_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} \right).$$

常见的计算题如

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}$$

通过简单变形(如第 2 至第 n 行分别减去第 1 行)也可转化为具有上述特征的行列式.

同理,可用类似方法求解的行列式如: