多元函数微积分

大学数学

主编 李林曙 施光燕

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

大学数学

多元函数微积分

主编　李林曙
施光燕

中央广播电视大学出版社
北京·2002

图书在版编目（CIP）数据

多元函数微积分/李林曙，施光燕主编．—北京：中央广播电视大学出版社，2002．7

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

ISBN 7－304－02249－3

Ⅰ．多...　Ⅱ．①李...②施...　Ⅲ．微积分—电视大学—教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 055288 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

大 学 数 学

多元函数微积

主编　李林曙　施光燕

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京首师大印刷厂

开本/850×1168　1/32　印张/4.875　字数/117 千字

版本/2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷

印数/0001－15000

社址/北京市复兴门内大街 160 号　邮编/100031

电话/66419791　68519502　（本书如有缺页或倒装，本社负责退换）

书号：ISBN 7-304-02249-3/O·121

定价：9.00 元

前　　言

《大学数学》这套文字教材是中央电大基础课改造工程中“数学课程整合”教学改革的阶段性成果.

我们知道，大学数学课程的改革是高校教学改革的重点，特别是在大学数学如何满足不同规格层次、不同专业科类的需要的改革上，更加困难．随着中央电大人才培养模式改革和开放教育试点的开展，电大专科和专科起点本科的理工、文经类专业相继开出，中央电大数学课程的教学改革同样成为十分重要和紧迫的工作．为配合试点工作，深化以人才培养模式改革为核心、以教学内容和课程体系改革为重点的教学改革，中央电大从 1999 年起，与试点工作同步启动了中央电大基础课改革工程，“数学课程整合”便是其中的一个重点项目.

为搞好大学数学课程的建设，项目组经过较长时间的调研和教学实验，确定了“科学性、应用性、开放性；模块化、信息化、一体化”的课程建设和改革原则.

①科学性：通过数学大师和数学教育家的联合把关，确保数学课程教学内容的准确无误，并在此基础上，充分考虑各类大学生在数学基本素养和能力的培养上应有的要求，以调整和改革人才培养的知识、能力和素质结构.

②应用性：坚持“必需、够用”的原则，在保证学生数学基本素养和后续课程需要的前提下，强调数学方法的掌握、计算能力的培养和数学建模的训练，注重数学在各有关学科、特别是在社会经济生活和工作实际中应用，注重典型例子的选取和案例教学，全方位提高学生的数学实践和应用能力，以实现电大应用性人才培养目标.

③开放性：教学内容的可选择性是远程开放教育的重要特征. 本教材在教学内容的选择上，力求在尽可能大的范围内适应不同类别、不同专业、不同层次和不同水平学生的需要. 既考虑电大内部各类学生的需要，也考虑社会各种办学形式的需要；既考虑当前专业教学之急需，也考虑学科发展与学生未来知识更新、拓宽视野的需要，在教学内容的选择、阐述和教学媒体的设计等方面留有充分的开口和接口.

④模块化：为体现“科学性、应用性、开放性”的原则，在内容的选择上，将大学数学基本内容按照多元函数微积分、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组、二次型）、概率论与数理统计（概率论、数理统计）等三大部分进行模块化设计、编排，使这套教材具有更好的模块组合能力、更大的可选择性和更广泛的适应性. 按照教学计划，这些模块的具体安排如下：

经济管理类（专科起点本科）：多元函数微积分、线性代数、概率论与数理统计.

工科水利水电工程专业（专科）：高等数学（2）、概率论与数理统计.

计算机数学基础（A）（工科计算机应用专业（专科））：多元函数微积分（多元函数微分、多元函数积分）、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组）、概率论与数理统计（概率论、数理

统计）.

工科土木工程专业（本科）：线性代数（行列式、矩阵、线性方程组、二次型）、概率论与数理统计（概率论、数理统计）.

⑤信息化：充分应用现代信息技术和教育技术进行本课程的设计和开发．根据课程目标要求和各模块特点，发挥现代远程教育媒体手段的教学功能和技术实现优势，采用文字、音像、CAI课件、计算机网络等多种教学媒体和手段实施课程教学，使本课程教学媒体更为丰富、教学方式和方法更为灵活、学生的学习更具自主性.

⑥一体化：按照现代教育理论和教学设计思想，对课程选择的多种教学媒体进行优化设计，使各种不同的教学媒体根据其不同的教学功能和特点，在远程教学中发挥出应有的作用，力争达到各媒体间密切配合、优势互补、导学、助学、整体化、一体化的优良教学效果.

按照上述原则，在众多专家直接指导下，课程组做了大量工作．《线性代数》由大连理工大学施光燕教授编写第1、4章，中央电大李林曙教授编写第3章、赵坚副教授编写第2章，《概率论与数理统计》由中央电大顾静相副教授编写第1章、陈卫宏副教授编写第2章、张旭红副教授编写第3章，《多元函数微积分》由中央电大周永胜编写，大连理工大学施光燕教授、中央电大李林曙教授担任本套教材的主编，首都师范大学石生明教授担任主审．赵坚副教授和张旭红副教授协助主编分别在《多元函数微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》的统稿中做了大量工作.

在此，特别感谢主审专家石生明教授和审定专家：北京师范大学杨文礼教授、北京大学姚孟臣副教授，他们在教材编写过程

中，自始至终给予了认真、细致的指导，提出了许多宝贵意见；中央电大出版社何勇军副编审也为本书的编辑出版付出了不少心血，特别是在本书的版式工艺教学设计上提出了许多很好的建议，在此一并表示感谢.

教学改革需要各位同学、老师和读者的共同参与，我们的工作一定有不尽如人意的地方，我们真诚地期待大家的使用反馈意见，以便再版时及时改进，切实推进以人才培养模式改革为核心、教学内容和课程体系改革为重点的教学改革.

数学课程整合项目组

2002 年 7 月

目　　录

第 1 章　多元函数微分学

学习目标

1. 理解二元函数的概念.
2. 知道二元函数极限、连续的概念及性质.
3. 熟练掌握求偏导数和全微分的方法；掌握复合函数的微分法和求隐函数偏导数的方法.
4. 记住多元函数极值存在的必要条件，会运用拉格朗日乘数法求解较简单条件极值的应用问题.

1.1　预 备 知 识

1.1.1　空间直角坐标系

我们知道，平面直角坐标系 Oxy 是由两条互相垂直并以交点为原点的数轴 Ox，Oy 构成的；把它所在的平面称为 Oxy 平面（如图 1－1－1 所示）. 现在，将此 Oxy 平面置于空间中，并过 O 点作一垂直于 Oxy 平面的数轴 Oz（如图 1－1－2 所示），这样，

Ox、Oy，Oz 就构成一空间直角坐标系 $Oxyz$，O 仍称为坐标原点；Ox 轴、Oy 轴仍分别称为横轴、纵轴，或称为 x 轴、y 轴，Oz 轴则称为立轴，或称为 z 轴，统称为坐标轴.

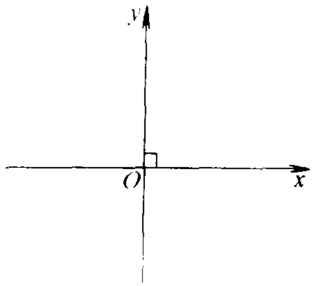


图 1-1-1

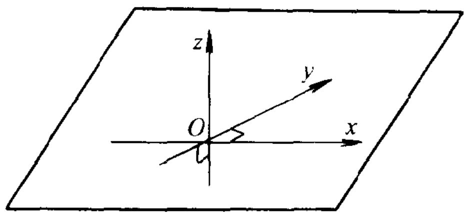


图 1-1-2

注意到上面所作的垂直于 Oxy 平面的 Oz 轴其方向可以有两个，一个朝上，一个朝下，我们将如图 1-1-2 所示的朝上的坐标系称为右手系（即用右手四指由 x 轴正向到 y 轴正向的方向握住 z 轴，大拇指的指向规定为 z 轴的正向）. 以后我们均采用右手系.

x 轴与 y 轴，y 轴与 z 轴，z 轴与 x 轴所张成的平面分别称为 Oxy 平面，Oyz 平面，Oxz 平面，统称为坐标平面.

对于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的任意一点 P_0，我们可用类似于平面直角坐标系中的方法来规定 P_0 的空间直角坐标.

如图 1-1-3 所示，从点 P_0 作 Oxy 平面的垂线，与 Oxy 平面交于点 P_1（P_1 称为点 P_0 在 Oxy 平面上的投影），设 P_1 在平面直角坐标系 Oxy 中的坐标为（x_0，y_0），再过点 P_0 作 z 轴的垂直平面，并与 z 轴相交，设此交点在 Oz 轴上的坐标为 z_0，这样，空间中任意一点 P 就对应了三个有序实数（x_0，y_0，z_0），反之，任给三个有序实数（x_0，y_0，z_0），都可以下列方式确定

空间中一个相应的点：先在 Oxy 平面上确定一点 P_1，其平面坐标为（x_0，y_0），再过 P_1 点作 Oxy 平面的垂直线段 P_1P，使得 P_1P 的长度为 $|z_0|$，P 在 Oxy 平面的上方或下方取决于 z_0 的值为正或为负，称（x_0，y_0，z_0）为 P 点的空间直角坐标.

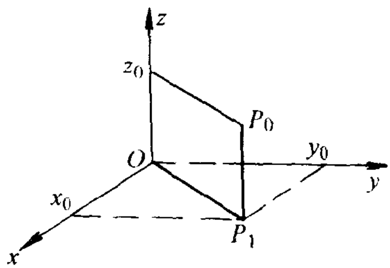


图 1-1-3

由上可见，在空间直角坐标系中，空间中的点与三个有序实数是一一对应的.

显然，坐标原点的坐标是（0，0，0），点（A，0，0）在 x 轴上. 对于一般的点，例如（4，3，-2），我们可按照如图1-1-4所示的方法确定其在空间直角坐标系中的位置.

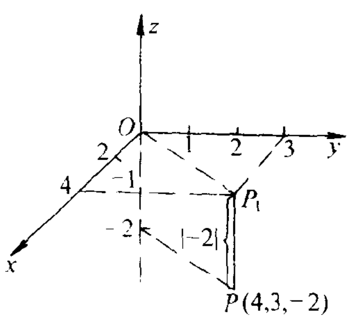


图 1-1-4

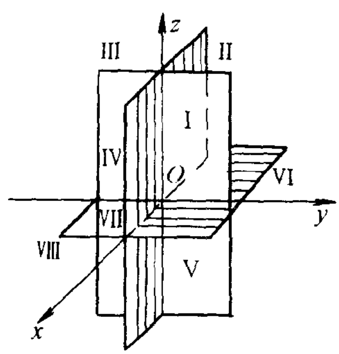


图 1-1-5

三个坐标平面把空间划分成八个区域，如图 1-1-5 所示.

每一个区域称为卦限. 在每个卦限内，点的坐标的符号是固定的.

由图 1－1－5 可知，八个卦限中坐标的符号依次为

Ⅰ（+，+，+），	Ⅱ（－，+，+），
Ⅲ（－，－，+），	Ⅳ（+，－，+），
Ⅴ（+，+，－），	Ⅵ（－，+，－），
Ⅶ（－，－，－），	Ⅷ（+，－，－）

例 1 求空间中任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离 d.

解 记点 P_1 与 P_2 在 Oxy 平面上的投影分别为点 Q_1, Q_2，显然在 Oxy 平面上点 Q_1 和点 Q_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，按照平面上两点距离公式

$$|Q_1Q_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

连接 P_1, P_2 和 Q_1, Q_2，并过点 P_1 作 Q_1Q_2 的平行线交 P_2Q_2 于 A 点，由图 1－1－6 可知

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AP_2|^2$$

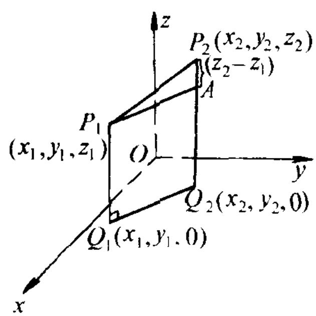


图 1－1－6

而

$$|P_1A| = |Q_1Q_2|$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AP_2| = |z_2 - z_1|$$

于是得

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

即

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1-1-1}$$

此即空间直角坐标系中两点间距离公式. 显然,它是平面直角座标系中两点间距离公式的直接推广.

例 2 写出空间中的球面方程.

解 设有一个球面,球心为 P_0,半径为 $R(R>0)$. 在建立空间直角坐标系后,球心 P_0 的坐标便是确定的,设为(x_0, y_0, z_0). 我们来考虑位于该球面上的点的坐标应满足什么样的关系式. 显然,球面上任一点到球心 P_0 的距离恒为 R,故若设$P(x, y, z)$为球面上任意一点,则根据两点间距离公式(1-1-1),有

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

或

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \tag{1-1-2}$$

易知,球面上点的坐标必满足方程(1-1-2),球面外的点的坐标则不满足方程(1-1-2). 我们称(1-1-2)为球心在 P_0、半径为 R 的球面方程.

特别地,球心在原点(0,0,0),半径为 R 的球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1-1-3}$$

其图形如图 1-1-7 所示.

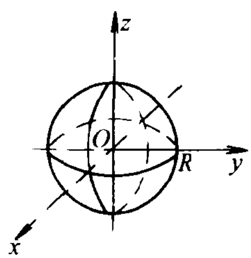


图 1-1-7

方程(1-1-2)又可写成

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

一般地,在空间直角坐标系中的一个曲面 S 可以用一个关于 x, y, z 的方程

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1-1-4}$$

来表示，其中$F(x,y,z)$是一个三元函数.

确切地说，如果曲面 S 上每一点的坐标(x,y,z)都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而任一组满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的有序数组(x,y,z)所对应的点都在曲面 S 上，则称 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程，也称曲面 S 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

例 3 画出下列方程的图形：

(1)$x+y-z-1=0$；　　(2)$x+y+z=0$；

(3)$y+z-1=0$；　　(4)$z=1$；

(5)$z=0$.

解 我们知道，空间三点可以确定一个平面. 因此，我们可以先找出三点，然后画出图形.

(1)$x+y+z-1=0$

当 $x=0,y=0$ 时，$z=1$. 所以，点$(0,0,1)$在方程 $x+y+z-1=0$ 上. 同理，点$(1,0,0)$，$(0,1,0)$也在方程 $x+y+z-1=0$ 上. 画出方程 $x+y+z-1=0$ 的图形，如图 1－1－8 所示.

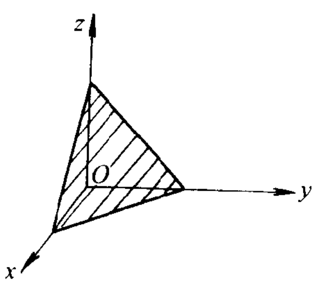
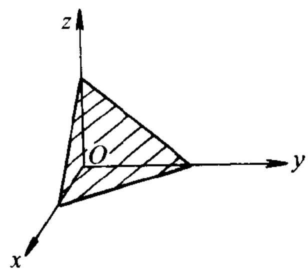
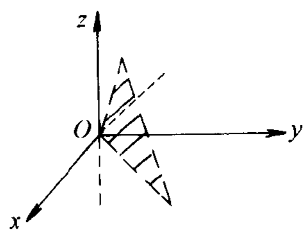
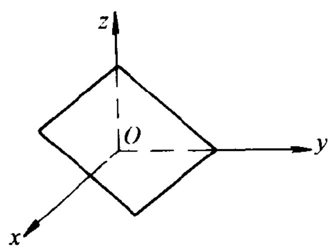


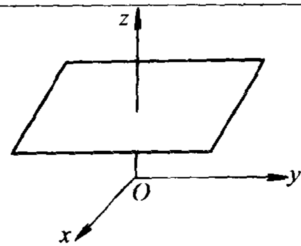
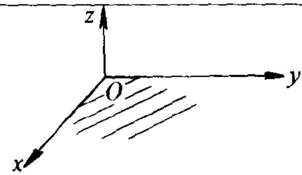
图 1－1－8

同(1)，我们可以画出(2)，(3)，(4)，(5)的图形. 如表 1.1.

表 1.1 空间平面方程及其图形

方　　程	方程特点	图形特征	图　　形
$ax+by+cz+d=0$	空间平面的一般方程	平面	略
$x+y+z-1=0$	三元一次方程	平面	
$x+y+z=0$	$d=0$	平面过原点	
$y+z-1=0$	$a=0$	平面平行于 Ox 轴	

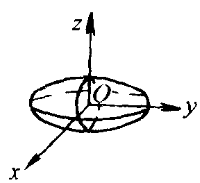
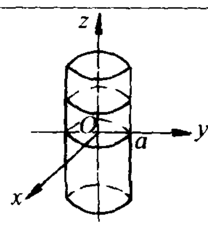
续表

方　　程	方程特点	图形特征	图　　形
$z=1$	$a=b=0$	平面平行于 Oxy 平面	
$z=0$	$a=b=d=0$	平面即为 Oxy 平面	

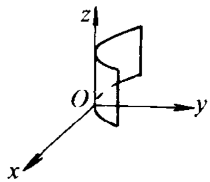
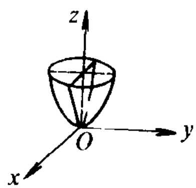
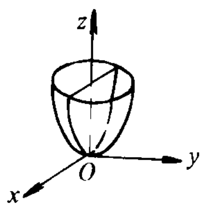
可见，在空间直角坐标系中，三元一次方程的图像是一个平面；空间平面的方程是三元一次的.

下面给出一些常见的三元二次方程的图形，如表 1.2.

表 1.2　空间曲面方程及其图形

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所用截平面　截痕 // xOy 面　椭圆 // yOz 面　椭圆 // zOx 面　椭圆	
圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所用截平面　截痕 // xOy 面　圆 // yOz 面　两平行于 z 轴的直线 // zOx 面　两平行于 z 轴的直线	

续表

抛物柱面 $x^2=2py$		
所用截平面	截痕	
// xOy 面	抛物线	
// yOz 面	一平行于 z 轴的直线	
// zOx 面	两平行于 z 轴的直线	
椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$		
所用截平面	截痕	
// xOy 面	椭圆	
// yOz 面	抛物线	
// zOx 面	抛物线	
旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz$		
所用截平面	截痕	
// xOy 面	圆	
// yOz 面	抛物线	
// zOx 面	抛物线	

说明:(1)空间曲面比较复杂,这里,我们只介绍了一些常见的三元二次方程的图形——二次曲面.

(2)从表1.2中可以看出,对于椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,如果用一组平行平面

$$z=h \quad (h\text{ 取不同数值})$$

去截,就会得到一组平行的椭圆.同理,对于抛物柱面 $x^2=2py$(p