什么是非欧几何

吴宗初著

新知識出版社

什么是非欧几何

吳宗初著

新知識出版社

一九五八年·上海

內 容 提 要

本書根据目前中学程度讀者的水平，簡單地介紹一些关于非欧几何創立的历史及其与欧几里得几何的不同之处，并且通过非欧几何的介紹启发讀者进一步重視几何学的严密的邏輯論証。此外，本書还通过非欧几何三个創始人——高斯、鮑里埃、罗巴契夫斯基——对待新的几何学的态度的对比，鼓励讀者在党的領导下，克服困难，坚决向科学进軍，献身于人民的科学事业。

什 么 是 非 欧 几 何

吳 宗 初 著

*

新 知 識 出 版 社 出 版

（上 海 湖 南 路 9 号）

上海市書刊出版業營業許可証出 015 号

大东集成联合厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：2　插頁：1　字数：45,000

1957年2月第1版　1958年2月第3次印刷

印数：24,001—29,000 本

統一書号：13076·68

定　价：(7) 0.20 元

序　言

几何学是数学中最基本的一种。在中学階段里，除了第一学年外，每一学年都有几何学科；因此不僅中学数学教师对几何学有足够的重視，就是一般中学生也大多对几何学習有一定的体会。正是这些体会，一方面使我們系統地掌握了物件的形狀、大小和位置的概念，發展了我們的空間想像力；另一方面也鍛煉了我們的思維能力，使我們習慣于应用嚴密的、邏輯推理的論証。

我們所学的每一个学科，都包含着教会我們正确論証的內容；但是沒有任何一个学科，在教会我們正确論証的作用中，比几何学占有更重大的地位。几何学的論証方法是这样嚴密，以至于任何微小的錯誤都不能認为是可以容許的。

在我們开始学習几何学时，由于年齡还很小，抽象的能力不很高，因此我們对几何学的認識多半是通过模型、圖形等直观形象而獲得的。在以后的学習过程中，我們逐漸發展愈來愈复雜的几何元素的想像力，我們想像的对象逐漸轉向沒有大小的点，沒有粗細的綫，沒有厚薄的面等等。在学習了比例綫段后，我們看見 $x^2=ab$ 就能想像出所求綫段 x 与已知綫段 a，b 的关系；学習了立体几何的初步定理以后，我們能够把明明是平面上的圖形看成是立体，并且从而作出正确的运算；通过三角公式的运用与代数方程求有理根的方法，我們确定用圓規、直尺不能三等分一个 60° 的角，并从而推論出不能用圓規、直尺來三等分一个任意的已知角，不必作無窮次的徒劳無功的試驗。这些情形說明随着学習的逐步深入，邏輯的論証愈來愈廣泛地代替了直观的形象。

但是，对剛学完初等几何学或即將学完初等几何学的人們來說，正确地認識几何論証的嚴密性并不是一件簡單的事，实际上，我們在这一方面很可能存在着不少的缺点。下列各項缺点就是經常被發現的：

1. 在許多几何命題中分不清哪些是定义，哪些是定理，哪些是公理。
2. 对几何定义認識不够，在考慮証題时很少从定义出發。
3. 滿足于用直观的圖形或模型來說明定理，对邏輯的論証要求不高。特别是沒有意識到数学証明較之直接試驗研究的优越性。
4. 在証題的方法上，存在着一些主观主义，特别不欢迎归謬証法(或称为反証法)；总是对归謬証法的可靠性表示怀疑。正是由于对归謬証法缺乏正确認識，因此在自己証題过程中，也出現了因不会用而摒弃不用，或虽不会用而乱用兩种錯誤情况。
5. 对于什么是公理、为什么要有公理很少追究。錯誤地認为公理在几何学中所占地位并不重要，甚至于認为公理是可有可無的。大部分中学生以及一部分中学几何教师很少注意到由平行公理所得出的結果，不知道平行公理的特殊作用以及只有一部分命題可以不依靠平行公理而証明和考慮。
6. 对于某些几何術語的認識还不很清楚，例如“必要且充分”是什么意义？“在某种情形下且只在某种情形下”应該怎样解釋等。

以上这一些几何学学習上的缺点，并不都是由于主观上不够努力才產生的；我們并不以为有了以上的缺点就不能成为一个好的几何学学習者。但是几何学畢竟是培养我們辯証唯物主

义世界观的重要陣地；而这些缺点却是与这样一个陣地的重要性不相称的。当我們已学完或即將学完初等几何的时候，把这些缺点糾正过來是旣必要又及时的。

为了解释我們所学的欧几里得几何学的邏輯結構，我們有必要对非欧几何作初步探討。非欧几何，特别是罗巴契夫斯基的几何学，在我們初中二年級的几何課本上曾經提到过，它跳出了兩千多年來的欧几里得几何的狹窄的籠子，躍入了一个新天地。罗巴契夫斯基的几何迫使数学的学者重新審察、补充和推廣欧几里得的基礎；幷給整个几何学打开了寬廣的發展前途。只有通过关于罗巴契夫斯基的几何学的初步認識，才能使我們对几何事实建立正确的观念，才能使我們接近于几何学以及对科学的近代观点。

这一本小册子將从几何学的起源談起，通过对几何学的公理系統的認識，总結一些欧几里得几何的重要意义和缺点。它特别突出平行公理問題；然后引進一些試証平行公理的非欧几何先驅者的工作以加深对平行公理問題的認識；接着介紹了非欧几何創造者的一些故事及罗巴契夫斯基几何学的一部分內容。

这样一本小册子不可能包含全部罗巴契夫斯基几何学。本書的目的只是介紹一些中学程度能够接受的罗巴契夫斯基几何学中最淺近的部分。我們把这一本小册子貢献給高中学生，借以喚起中学生对几何公理乃至对几何学的嚴密的邏輯推論的認識，以收到進一步端正学習方法与培养学習兴趣的效果。我們也把这一本小册子貢献給尙未研究过近世几何的中学数学教师，使他們一方面从初等几何方法入手初步認識一些罗巴契夫斯基几何，一方面提出对几何論証的更高的要求，以進一步培养学生的辯証唯物主义世界观。

吳宗初 1956.10.

目　　錄

一　几何的起源，欧几里得几何的偉大意义

几何学是研究物体的形狀、大小及位置的科学，它不討論物体的其他性質，如顏色、比重、硬度等；因此在几何学中一个同样大小的金球和木球是被看待为完全一样的。几何学和其他科学一样是在人类的長期劳动实踐中產生的，并且在許多年代中丰富、發展和精煉起來。

在文字記載的歷史中最早發現"几何学"这个名詞的是公元前2000年到1700年左右的埃及社会。那时埃及的尼罗河年年泛濫，为了進行治水工作，为了識別泛濫后的田地，測量的技術特別需要，几何学就成为一門被重視的科学。拉丁文中"几何"的意譯也就是"測地術"。

以后几何学逐漸走向邏輯推論的道路，不僅为从事技術工作和从事数学工作的人們所应用和研究，而且也成为哲学家們討論的对象。实际上，在公元前的一段时期內，哲学家和数学家常常是合而为一的；也就是說，很少有哲学家而不是数学家的。他們中有不少人企圖按照邏輯相关的次序把几何学的命題排列起來。在这些人中值得称道的是畢德哥拉斯（公元前569—500年，希臘哲学家和数学家）。

畢德哥拉斯的發現

下面一些我們熟悉的定理都是畢德哥拉斯和他的繼承者發

現的:

1. 三角形的內角和等于 $2d$(即 180°)。

2. 可以用几何作圖法解代数二次方程。

3. 作一个多边形相似于一个已知多边形并与另一已知多边形的面積相等。

4. 存在着無公度的兩綫段。

5. 存在着五种宇宙体。(在我們現在的立体几何中称为正多面体者,当时被称为宇宙体)

6. 直角三角形斜边上的正方形等于兩直角边上的正方形的和。(我國的商高發現"勾三股四弦五"比畢德哥拉斯还早些,但沒有一般性的証明)

由此可見在距离我們的时代 2500 年以前,几何学已經成为非常燦爛的科学。与其他数学学科或与其他自然科学來比,几何学可以算是發展很早的了。

在畢德哥拉斯以后学習几何学与学習哲学簡直是合流了。邏輯推理的論証被提高到第一位。哲学家和数学家柏拉圖(公元前 429—348 年,希臘人)在他所設的学院門口挂着这样一塊牌子:"不懂几何的人,請勿入內"。可見当时研究几何風气之盛。

欧几里得几何的偉大意义

欧几里得(約公元前 330—275 年,希臘哲学家和数学家)是柏拉圖派的学生,曾在亞歷山大教过数学。他所編寫的"几何学原本"使几何学的命題有了完整而有系統的叙述。

不难想像,把許多几何事实統一起來,搜索不同定理的証明,特別是把它們排成邏輯的鏈子,是一个重要而且困难的問題。这个关于几何系統的第一个邏輯結構的問題,由欧几里得在他的时代用高度的技巧解决了。

欧几里得的著作在很長的时期内是傳播重要的几何知識的唯一書籍。即使今天,我們的几何課本,仍旧保留着大部分欧几里得著作的特点。

欧几里得最先提出几何学根据的問題。他列举定义和公理为所有后面定理的嚴格的邏輯証明提供先决条件,这件事使他的数学事業得到很高的評价。

在欧几里得的时代,古代的哲学和邏輯学达到了最盛时期。从当时遺留下來的某些数学資料中,可以看到希臘学者顯示出很深的和很微妙的思想。就在这样的情况下,欧几里得的"几何学原本"居然勝过所有其余的同类著作而廣泛地傳留下來,足見欧几里得所完成的几何的邏輯結構,对他的时代說來,确实是非常嚴密。并且即使在此后許多世紀的長时期內,欧几里得証明的嚴密性还不失为一种比較的标准。

在欧几里得以后,歷史上还不断出現着杰出的几何学家,我們不可能也沒有必要一一列举。但是在欧几里得以后不久的希臘哲学家、物理学家和数学家阿基米德(公元前 287—212 年)的成就还是必須提一提的。阿基米德創立了一条重要的公理:在兩条不等的綫段、兩个不等的面或者兩个不等的体中,只要把小的增加到適当的倍数,大的就反而会变成較小的量。

这一条公理的第一部分(綫段)在我們高中一年級的几何課本上曾經列出,实际上,这是測量几何量的根据。本書將要研究的是非欧几里得几何,也就是取消了欧几里得几何中的一条公理而代以另一条公理所組成的。另外,也还有非阿基米德几何,也就是否定了上述的公理所組成的。但是,在这一方面本書將不加以叙述。

二 几何学的公理系統

欧几里得“几何学原本”之所以得到很高的評价是由于他提出了几何学根据的問題。就是說，定理的証明是根据以前已証明过的定理，而后者是前面的已証明的定理的推論。但是这样归复到前面已証明的定理的过程，不可能無限地繼續下去。于是可以断定存在着某些原始的命題，不能用通常的方法(即引証以前已証的断言)証明。就这种意义來說，我們接受这样的原始命題不加証明。

在数学理論內，不加証明而接受的命題称为公理。例如，我們把“过任意兩点，可以引一条直綫并且只能引一条直綫”作为公理。

公理虽然沒有証明，但是它們的眞实性要在实踐中受到考驗。如果我們在实际活动中利用公理以及它們的推論(定理)，总得到正确的結果，那末就是說公理眞实地描述了現实世界的数量关系和空間形式的基本性質。

但是，我們也不能这样想像：“凡是眞实地描述了現实世界的数量关系和空間形式的基本性質的数学命題都可以看成是公理。”我們初学几何时，碰到要証明“等腰三角形的底角相等”时不免会想到：“等腰三角形的底角当然相等，同学們已做过不少模型証明这一事实，所以这一叙述可以看成公理，不必再証明了。”然而几何学終究是一門嚴格的邏輯推論的科学，它的命題假使不是确实沒有前面已証的定理可以引証，我們决不肯把它看成公理，而是要嚴格地从其他已証的命題推証出來的。

其次，我們也决不能把互相矛盾的兩个公理放在同一个几何系統中。因为假使这样，所有以后的推論都將会無所依据。

然而我們又不能沒有足够的公理，在現在已嚴格整理了的希尔倍脫的几何公理系統中(后文將比較詳細地介紹)若去掉了任何一条，就会有一連串的命題失去依据。也就是說，若公理不完备，則几何学內容或者是不完整，或者是在邏輯論証上要有缺陷。这兩种情况中的任一种，都是不能容許的。

按上面所說，我們的公理就应該具备以下几个条件：

1．公理的顯而易見性。①

2．公理的無矛盾性。

3．公理的最少个数。

4．公理的完备性。

在公理的选擇上，并不是所有数学家都一致的。他們各自选擇的公理，不僅在文字上有不同，而且在內容上也完全不同。但是不同的公理所導出的几何命題(除了非欧几何以外)都是大致相同的。

为什么不同的公理能導出相同的命題呢？原來他們所选擇的公理，尽管內容上不同，但在作为論証根据來說，都是等价的。

什么叫做等价？我們先举例來看：

甲：兩綫平行，則被第三綫所截成的同位角相等。

乙：兩綫平行，則被第三綫所截成的內錯角相等。

我們若把"甲"看成公理，就可以推証出"乙"；反过來說，我們若把"乙"看成公理，就可以推証出"甲"。归根到底，这兩个命題中的任一个成立了，就会使兩个命題都成立；因而我們把这兩个命題說成是等价的。"价"的意思是作用，"等价"是說明兩个命題的作用相等。今后我們还会發現这兩个命題和我們熟悉的平行公理："过已知直綫外一点所作平行于已知直綫的直綫有一条

① 由于公理的是否顯而易見，很难定出一个明确的界限，因此这一条件只作为一个一般的要求，而不是像以下三个那样作为嚴格的邏輯的要求。

且只有一条”也是等价的。

等价的問題在本書中占有特別重要的地位，今后还將繼續加以解釋。

在欧几里得几何学原本中，有公設和公理兩部分；实际意义是相同的。为了便于閱讀后文的参考，現把欧氏的公設和公理引述于下：

公　設

要求下面一些事項：

1. 从每一点到另一点可引直綫。
2. 有限的直綫可以無限延長。
3. 从任何中心可用任何半徑画圓周。
4. 所有的直角都是相等的。
5. 若兩直綫和第三直綫相交且在同一側所構成的兩个同側內角之和小于兩直角，則把这兩直綫向这一側適当地延長之后一定相交。

公　理

1. 各与同一第三个相等的兩个也一定相等。
2. 若相等的加上相等的，那末整个也相等。
3. 若从相等的減去相等的，那末所獲的差也相等。
4. 互相重合的一定相等。
5. 整个大于部分。

在几何命題中，單憑公理仍旧不能作为論証的根据。一个命題所涉及的几何名詞还必須有确切的涵义。沒有一个确切的界限，我們很难对任何一个几何量、几何圖形或圖形間的关系下任何断語。因此“定义”也是几何論証的重要依据。

定义也是一种几何命题，它説明一个名称或術語的意义。定义的一般形式是引用已有的最接近的范圍較大的名詞，再列举其特性來説明的。例如：

平行四边形是兩組对边各相平行的四边形。

圓的直徑是过圓心的弦。

这兩个例説明：要明确被下定义的几何名称（平行四边形、直徑），先要明确比它范圍較大的几何名称（四边形、弦），然后再明确其特性（兩組对边各相平行、过圓心）。

給出定义所容易犯的錯誤是“惡性循环”。例如有人説：“直角是兩条互相垂直的直綫相交所成的角”。这样的定义初看似乎沒有錯，但实际是错了的；因为我們如果再問他垂直的定义，他就無法回答了。实际上，我們知道“相交成直角的兩条直綫叫做是互相垂直的”；因此上面所述的定义就犯了惡性循环的錯誤，其結果是兩个概念“垂直”和“直角”都無法得到有根据的概念。（正确的直角的定义应該是周角的四分之一）

欧几里得几何学原本第一卷有三十五个定义，它們是：

1. 点是沒有部分的。
2. 綫是有長度而沒有寬度的。
3. 綫的各端是点。
4. 直綫是关于它的任何一点一样地放置着的。
5. 面是只有長度和寬度的。
6. 面的端緣或边緣是綫。
7. 平面是关于它的任何直綫一样地攤放着的。
8. 平的角度是一平面上相交而不在同一直綫上的兩直綫的相互傾斜。
9. 当形成一角度的兩綫是一直綫的时候，那角度称为平角。

以下的定义是关于直角和垂綫，鈍角和銳角，圓、圓周和中心，直綫形，三角形，直角三角形，菱形及其他。

最后一个定义对本書所討論的內容关系很大，它是：

35.平行直綫是在同一平面上而且尽管向兩側延長也決不相交的直綫。

我們用今天的眼光來分析，这些定义是不够嚴密的，在下一節中將加以批判。

公理和定义組成了几何学的論証的根据，当一个似是而非的命題出現了而我們無法找到它的邏輯論証上的錯誤时，不能不回头來看公理和定义本身有沒有破綻。

三　欧几里得几何的缺点

上面已經說过，欧几里得"几何学原本"中的邏輯結構在他的时代說來是非常嚴密的，在以后的許多世紀的長时期里也不失为一种比較标准。因此用歷史眼光來看，我們不能不对欧几里得表示崇高的敬意。在数学和哲学發展过程中，欧几里得的功績确实是不可磨滅的。

但是崇敬歷史人物并不等于盲目地承認歷史人物的創造的完全正确性。用現代的眼光來看，欧氏几何学原本的缺点实在有不少。欧氏"几何学原本"之所以得到很高的評价是由于他第一个提出几何根据的問題。然而就是在这个問題上，我們找到了不少破綻。

首先，欧几里得所給予的許多定义完全不是在邏輯的意义下的定义，而只是对几何形象的一目了然的描寫。例如"綫是有長度而沒有寬度的"等等。从这样的定义不可能帶來任何邏輯嚴密的推論；并且在以后的結論中，它僅成为对一目了然的概念的

工作的表示而已。換句話說，这样的定义既不能邏輯地明确几何名称或術語的涵义，也不能在以后的邏輯推論中应用到。那末这些定义又有什么用呢？

其次，从欧几里得所創立的公理來研究，我們發現有些公理是多余的，例如“所有的直角是相等的”。

应該承認，欧几里得的公理系統的沒有矛盾是完全做到的。这就是說，欧几里得几何本身找不出互相矛盾的命題來。但是从公理的完备性來看欧氏的公理就顯得太不够了。欧几里得公理系統的第一个漏洞是缺少关于位置的公理。

为了說明这一問題，我們举一个大家熟知的似是而非的命題來研究。

命題：所有三角形是等腰三角形。(圖一)

已知：三角形 ABC.

終結：$AB=AC$.

証：作 BC 的中垂綫 OD,

作 $\angle A$ 的二等分綫 AO,

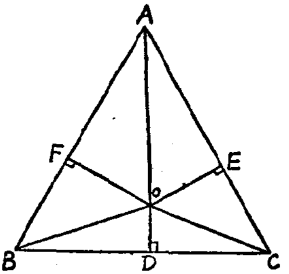
AO 交 OD 于 O,

联 OB, OC.

过 O 作 $OE\perp AC, OF\perp AB$.

則直角 $\triangle AEO\cong$ 直角 $\triangle AFO$.

(銳角，斜边相等)



圖一

$\therefore\quad OE=OF,\quad AE=AF,$

直角 $\triangle ODC\cong$ 直角 $\triangle ODB$.(兩直角边相等)

$\therefore\quad OB=OC$.

$\therefore$ 直角 $\triangle OEC\cong$ 直角 $\triangle OFB$.(斜边直角边相等)

$\therefore\quad BF=CE$.

$\therefore\quad AE+CE=AF+BF$.

即 $AC=AB$.

这一命题当然是不正确的，但是在証題过程中并沒有邏輯性的错誤。关鍵在于 OE,OF 的位置；若正确地作圖，必然会發現 O 点在 BC 的另一側。若 $AB>AC$，則 F 在 AB 上，而 E 在 AC 的延長綫上；这样 $AE+CE$ 就不等于 AC 了。

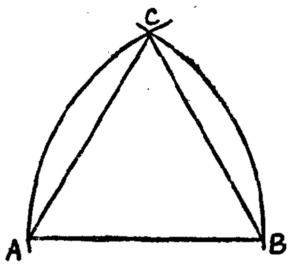
这样的錯誤在欧几里得的公理系統中却是得不到肯定的。那就是說，在欧氏几何中“在某綫段上”或“在某綫段的延長綫上”只能依靠人們的直接感覚，并沒有嚴格的邏輯論証。同样的，不限于綫段，一切“在……之中”或“在……之外”的問題，在欧氏几何中都找不到理論的依据。

这一类問題，今后我們將称之为“介于”的問題。

欧几里得公理系統的第二个漏洞是缺少关于連續的公理。我們举出下列作圖題來說明这一問題。

命題：在定綫段上作一等边三角形。

这一个作圖題，讀者能作，不必詳述。在作圖的过程中，一定有这样的一句：“以 A 为圓心，AB 为半徑的圓，与以 B 为圓心，AB 为半徑的圓交于 C”。(圖二)



圖二

現在提出的問題是：这兩个圓是否一定相交?

讀者可能会对这一个問題的提出感到驚奇，会想：“这兩圓相交，难道还不够明白嗎?”

关于兩圓的一个通过另一个的圓心时，必有共同交点这一件事确实是十分明白的。可是問題不在明白性上，几何里所証的定理中有許多东西比我們証明里所引用的还要明白些(例如等腰三角形的底角相等)，但是我們仍