中学数学手册

李忠映
张　森　编

上集

云南人民出版社

前　言

本手册是根据全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）的要求选取材料编写的。内容包括：基本概念、定义、定理、中学数学常用的基本公式，并配备适当的例题。分上下册出版。可供中学生、上山下乡知识青年及中学数学教师参考使用。

本手册在编写过程中，得到了昆明师范学院数学系许多教师的支持和帮助，特别是朱德祥教授、吕锡麟副教授、冯荣轩副教授和宋文麟副教授对书稿的大部分内容进行了认真修改，在此深表谢意。由于编者水平有限和时间仓促，书中一定存在不少问题，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1979年7月

上 册 目 录

第一章　初等代数

一　数的基本运算规律

1.交换律　　$a+b=b+a$；　$ab=ba$。

2.结合律　　$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(ab)c=a(bc)$。

3.分配律　　$(a+b)c=ac+bc$；

$$(a+b)\div c=(a+b)\times\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=a\div c+b\div c。$$

二　乘法、除法和因式分解公式

1.多项式的乘法

$$(a+b+c)x=ax+bx+cx。$$

a，b，c，x可表示多项式和单项式.若$x=m+n$，

则
$$\begin{aligned}(a+b+c)(m+n)&=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)\\&=am+an+bm+bn+cm+cn。\end{aligned}$$

例
$$\begin{aligned}(3x^2-2x+5)(4x+2)&=12x^3-8x^2+20x\\&+6x^2-4x+10=12x^3-2x^2+16x+10。\end{aligned}$$

2.多项式的除法

$$\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}\quad(x\neq0).$$

a，b，c，x是任意的表示式．若a，b，c，x是单项式，那么上式左边表示单项式除多项式.

例 $\dfrac{3a^2b+11ab^2}{ab}=\dfrac{3a^2b}{ab}+\dfrac{11ab^2}{ab}=3a+11b.$

若a，b，c是单项式，而x是多项式，那么$\dfrac{a+b+c}{x}$（$x\neq 0$）是多项式除多项式，其商不一定是多项式。

例 $\dfrac{a^2+x^2}{a+x}$其商不可能表为多项式；但$\dfrac{a^2-x^2}{a+x}=a-x$其商就是多项式。

如多项式$f(x)$除以多项式$g(x)$，商为$q(x)$和余项$r(x)$，应满足两个要求：1）应该表为等式：$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$；2）$r(x)$的次数应小于$g(x)$的次数或$r(x)=0$．

例 $\dfrac{8a^3+16a^2-2a+4}{4a^2-2a+1}=2a+5$　　余项为$6a-1$．

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 8a^3+16a^2-2a+4 & 4a^2-2a+1 \\ \cline{3-3}
-) & 8a^3-4a^2+2a & 2a+5 \cdots\cdots \text{商} \\ \hline
 & 20a^2-4a+4 & \\
-) & 20a^2-10a+5 & \\ \hline
 & 6a-1 \cdots\cdots \text{余项} &
\end{array}
$$

注：有时余项$r(x)$不包含主要的字母，只包含常数。

例 $(x^3-3x^2+5x-1)\div(x-2)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2+5x-1 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^3-2x^2 & x^2-x+3 \cdots\cdots \text{商} \\ \hline
-x^2+5x & \\
-x^2+2x & \\ \hline
3x-1 & \\
3x-6 & \\ \hline
5 \cdots\cdots \text{余项}. &
\end{array}
$$

如果以$x=2$代入x^3-3x^2+5x-1，那么余项为

$$2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2-1=5.$$

例 求x^4+7除以$x+2$的余项.

设 $x=-2$，

则余项为：$r(x)=(-2)^4+7=23$.

由上例得到定理：多项式

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m \qquad (1)$$

除以$x-l$的余项为

$$r(x)=a_0l^m+a_1l^{m-1}+a_2l^{m-2}+\cdots+a_m.$$

证明： $\because$ $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=(x-l)q(x)+r(x)$.

以$x=l$代入上式，则 $(x-l)q(x)=0$，

$\therefore$ $a_0l^m+a_1l^{m-1}+\cdots+a_m=r(l)$.

当$r(l)=0$时，l叫做方程

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0 \quad (2)$$ 的根。

例 多项式x^3+5x^2-18除以$x+3$的余项为0．因此(-3)是此方程的根．事实上$(-3)^3+5(-3)^2-18=0$.

反之，若l是方程（2）的根，那么（2）式左边部分除以$x-l$余项为0．

3.乘法公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

例1 $104^2=(100+4)^2=10000+800+16=10816$;

例2 $98^2=(100-2)^2=10000-400+4=9604$;

例 3　$71\times69=(70+1)(70-1)=70^2-1=4899$；

例 4　$12^3=(10+2)^3=10^3+3\cdot10^2\cdot2+3\cdot10\cdot2^2+2^3$

$=1728$；

例 5　$99^3=(100-1)^3=1000000$

$-3\cdot10000\cdot1+3\cdot100\cdot1-1=970299$.

注意：$(a+b)^2\neq a^2+b^2$，　$(a+b)^3\neq a^3+b^3$.

4.二项式$x^m\pm a^m$除以$x\pm a$

$$(x^m-a^m)\div(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots+a^{m-1}.$$

x是降幂排列，a是升幂排列，a的次数与x的次数之和等于$m-1$（m为正整数）.

例　$(x^4-a^4)\div(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3$；

$(x^5-a^5)\div(x-a)=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$.

当m为偶数时

$$(x^m-a^m)\div(x+a)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots-a^{m-1}.$$

（正、负号相间）.

例　$(x^4-a^4)\div(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$；

$(x^6-a^6)\div(x+a)=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$.

当m为偶数时，x^m-a^m能被$x-a$和$x+a$整除，也能被x^2-a^2整除.

例　$(x^4-a^4)\div(x^2-a^2)=x^2+a^2$；

$(x^6-a^6)\div(x^2-a^2)=x^4+a^2x^2+a^4$；

$(x^8-a^8)\div(x^2-a^2)=x^6+a^2x^4+a^4x^2+a^6$.

但当m为奇数时，x^m-a^m不能被$x+a$整除.

例　x^3-a^3或x^5-a^5不能被$x+a$整除.

x^m+a^m（m为正整数）不能被$x-a$整除.

$x^m + a^m$（m为奇数）能被$x+a$整除。

例　$(x^5+a^5)\div(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$。

一般地$(x^m+a^m)\div(x+a)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots$
$-xa^{m-2}+a^{m-1}$。

三　因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解。

1.提取公因式法

例　$7a^2xy-14a^5x^3=7a^2x(y-2a^3x^2)$；

$abc+abd+3ab=ab(c+d+3)$。

2.分组提取公因式法

例　$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)\cdot(x+y)$。

$10a^3-6b^3+4ab^2-15a^2b=5a^2(2a-3b)+2b^2(2a-3b)$
$=(2a-3b)(5a^2+2b^2)$。

$6ax-2bx+9by-27ay=2x(3a-b)+9y(b-3a)$
$=(3a-b)(2x-9y)$。

3.利用公式进行因式分解

例1　$4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2=(2a+3b)(2a-3b)$。

$(x-y)^2-z^2=(x-y+z)(x-y-z)$。

例2　$4x^2+20xy+25y^2=(2x)^2+2\times2\times5xy+(5y)^2$
$=(2x+5y)^2$。

例3　$x^{18}-3x^{12}y^6+3x^6y^{12}-y^{18}=(x^6)^3-3(x^6)^2(y^6)$
$+3(x^6)(y^6)^2-(y^6)^3=(x^6-y^6)^3$

$$=[(x^3+y^3)(x^3-y^3)]^3$$
$$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)]^3$$
$$=(x+y)^3(x-y)^3(x^2-xy+y^2)^3(x+xy+y^2)^3。$$

例 4　$x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=[x\cdot(x+3)]\cdot[(x+1)(x+2)]+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=(x^2+3x)^2$

$+2(x^2+3x)+1=(x^2+3x+1)^2$。

4.进行变换

例 1　$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2$

$-a^2b^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$.

例 2　$x^2+xy-2y^2=x^2+2xy-xy-2y^2=x(x+2y)$

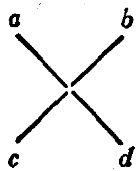
$-y(x+2y)=(x+2y)(x-y)$.

5.二次三项式px^2+qx+r的因式分解

设　$px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)=(ac)x^2+(ad+cb)x+(bd)$.比较$x$同次幂的系数,得

$$p=ac,\quad q=ad+cb,\quad r=bd.$$

表为



叫做“十字相乘法”.

当　$p=1$时,　$a=c=1$,

$\therefore$　$q=b+d$, $r=bd$.

例　$x^2+6x+8=x^2+(2+4)x+2\times4$

$=x^2+2x+4x+2\times4=x(x+2)+4(x+2)$

$=(x+4)(x+2)$.

分解$2x^2+7x+6$的因式。

$$\begin{array}{ccc}2 & & 3\\ & \times & \\ 1 & & 2\end{array}$$

$\therefore\quad 2x^2+7x+6=(2x+3)(x+2)$。

四　幂的运算

定义 1　a^n（n为自然数）叫做a的n次幂

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n.$$

定义 2　一切实数$a(a\neq 0)$的零次幂约定等于1。

$a^0=1$，　$2^0=1$，　$(a-b)^0=1\ (a\neq b)$，

$-5^0=-1$，　$(-5)^0=1$．

定义 3　实数$a(a\neq 0)$的负整数幂约定为

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

定义 4　正数a的正的n（n为正整数）次方根，叫做a的算术根，记成$\sqrt[n]{a}$，零的n次算术根规定为零。

法则：

1. $(+a)^n=+a^n$；

2. $(-a)^n=\begin{cases}+a^n & n\text{为偶数,}\\ -a^n & n\text{为奇数;}\end{cases}$

3. $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$；

4. $(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$；

5. $\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}(a\neq 0)$；

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $(b\neq 0)$；

7. $(a^k)^n=a^{kn}$；

8. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$；

9. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$；

10. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$；

11. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$；

12. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

五 分 式

1.基本性质

$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ $(b\neq 0,\ m\neq 0)$.

2.分式运算

加、减法 $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$，

$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$； $(b\neq 0,\ d\neq 0)$

乘法 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$；

除法 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$. $(b\neq 0,\ d\neq 0,\ c\neq 0)$

3. 分数的比较

分　　数	若	则
$\frac{a}{b}$，$\frac{a}{c}$	$b>c>0$	$\frac{a}{b}<\frac{a}{c}$
	$0<b<c$	$\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$
$\frac{d}{f}$，$\frac{e}{f}$	$d>e$，$f>0$	$\frac{d}{f}>\frac{e}{f}$
	$d<e$，$f>0$	$\frac{d}{f}<\frac{e}{f}$

4. 代数分式的运算

在以下各式中$f_i(x)$，$q_i(x)$，$g_i(x)$，$r(x)$为多项式。

加法和减法

（1）同分母

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{g_1(x)}=\frac{f_1(x)\mp f_2(x)}{g_1(x)}.$$

（2）异分母

1° 分母没有公因式

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)g_2(x)\mp f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)};$$

2° 分母有公因式$r(x)$

设 $g_1(x)=q_1(x)r(x)$，　$g_2=q_2(x)r(x)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{1}{r(x)}\left(\frac{f_1(x)}{q_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{q_2(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{r(x)}\left(\frac{f_1(x)q_2(x) \mp f_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}\right).$$

乘法和除法

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)};$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \div \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)\cdot g_2(x)}{g_1(x)\cdot f_2(x)}.$$

（3）分解为简单的分式

要把一个分式表示为比较简单的真分式的和，在实数范围内分母分解为一次式和二次式的因式（这些因式必是不能再分解）．常用的方法是待定系数法．下面分四种情况举例说明．

1° 将分母分解为一次式的因式，并且其中没有任一个重复的。

例 $\dfrac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$.

$\because$ $x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$,

那么原式表为

$$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}, \qquad (1)$$

其中A，B，C，D是待定系数．

$$\therefore\ x^2-x+2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2). \qquad (2)$$

等式(2)对于任意的x值是正确的，因此我们仅仅选择

某几个x值使之能确定未知数A，B，C，D.

$x=-1$　$4=A(-2)(+1)(-3)+B\cdot 0+C\cdot 0+D\cdot 0$，　$\therefore$　$A=\dfrac{2}{3}$；

$x=1$　$2=A\cdot 0+B\cdot 2\cdot 3\cdot(-1)+C\cdot 0+D\cdot 0$，

$\therefore$　$B=-\dfrac{1}{3}$；

$x=-2$　$8=A\cdot 0+B\cdot 0+C(-1)(-3)(-4)+D\cdot 0$，

$\therefore$　$C=-\dfrac{2}{3}$；

$x=2$　$4=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D\cdot 3\cdot 1\cdot 4$，

$\therefore$　$D=\dfrac{1}{3}$.

于是得到分解式：

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-2)}.$$

2° 分母分解为一次式和某些一次式的平方.

例　$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}.$$

原式表为：

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2},\qquad (3)$$

$\therefore$　$x^2=A(x+2)^2+B_1(x+1)(x+2)+B_2(x+1)$.

当　$x=-1$时，　$1=A$，

$x=-2$时，　$4=-B_2$，　$\therefore$　$B_2=-4$；

$x=0$时，　　$0=4A+2B_1+B_2$，　$\therefore$　$B_1=0$。

$$\therefore\quad \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}.$$

3° 分母分解的因式中含有二次式的（不能再分解为一次式）因式及他们中的重复项．此时分母是一次式时，分子为常数，分母为二次式时分子为一次式。

例　$\dfrac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}$。

原式表为：

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2},$$

$$\therefore\quad x^3+4x^2+6=A_1(x+1)(x^2+2)+A_2(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)^2.$$

去括弧比较等式两边同次幂的系数：

x^3　　$1=A_1+B$；

x^2　　$4=A_1+A_2+2B+C$；

x^1　　$0=2A_1+B+C$；

x^0　　$6=2A_1+2A_2+C$。

解这方程组得：

$$A_1=\frac{1}{3},\quad A_2=3,\quad B=\frac{2}{3},\quad C=\frac{-2}{3}.$$

所以
$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}。$$

我们发现比较同次幂的系数比较方便。

4° 如果分母分解的因式中含 $(ax^2+bx+c)^n$ 项，此时等式的右边对应着n个被加项：

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots$$
$$+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

例 $\quad \dfrac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$.

解 1 原式表为：

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2}+\frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}.$$

$\because \quad 3x+1=A(1+x^2)^2+(B_1x+C_1)x(1+x^2)+(B_2x+C_2)x$,

去括弧比较同次幂的系数得到方程组：

$x^4 \quad A+B_1=0$;

$x^3 \quad C_1=0$;

$x^2 \quad 2A+B_1+B_2=0$;

$x^1 \quad C_1+C_2=3$;

$x^0 \quad A=1$.

解此方程组，得

$$A=1,\quad B_1=-1,\quad C_1=0,\quad B_2=-1,\quad C_2=3,$$

$\therefore \quad \dfrac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{-x+3}{(1+x^2)^2}$.

这是一般通法，进行解题时常常变通办理.

解 2 设 $\dfrac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\dfrac{A}{x}+\varphi(x)$,

则 $\quad 3x+1=A(1+x^2)^2+x(1+x^2)^2\varphi(x)$,