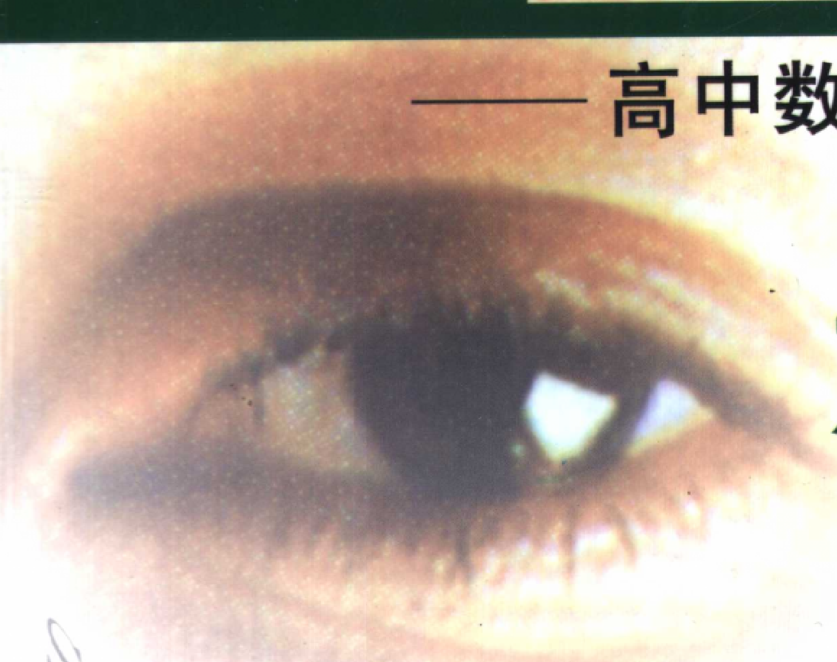
YONG

杨德胜 / 编著

用数学的眼光看世界

——高中数学应用题创新题典



SHUXUEDE
YANGUANGKANSHIJIE
GAOZHONGSHUXUE
YINGYONGTICHUANGXIN
TIDIAN

汉语大词典出版社

世纪集团

杨德胜

生于1957年8月，曾在广东茂名市一中、广东中山纪念中学等名校任教，现在上海市第二中学任教。1997年获南粤教书育人优秀教师特等奖。1997–1999年任广东省普教系统高级教师评委。1996–2000年被评为广东省全国高中数学联赛优秀辅导员。1998年被广东省人民政府评为中学数学特级教师，2002年被上海市人民政府认定为中学数学特级教师。经他辅导的学生参加全国高中数学联赛，有50多人获全国一、二、三等奖；2人进入冬令营；其中9人还被免试保送到清华大学等名牌大学学习。出版《高中数学目标教学与能力训练》、《奥赛金牌之路》（数学）等14本专著，在省级以上刊物发表论文40余篇。

ISBN 7-5432-0818-0
9 787543 208186 >
定价：22.00元

格致丛书

用数学的眼光看世界

——高中数学应用题创新题典

杨德胜／编著

汉语大词典出版社

图书在版编目(CIP)数据

用数学的眼光看世界：高中数学应用题创新题典/杨德胜编著.—上海：汉语大词典出版社，2003.3
ISBN 7-5432-0818-0

Ⅰ.用...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 106957 号

责任编辑　余佐赞
特约编辑　陈　奇
美术编辑　钱自成
技术编辑　徐雅清

用数学的眼光看世界
高中数学应用题创新题典
杨德胜　编著
世纪出版集团
汉语大词典出版社　出版、发行
(200001　上海福建中路 193 号　www.ewen.cc)
各地新华书店经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 16.25　字数 405 千字
2003 年 3 月第 1 版　2003 年 3 月第 1 次印刷
印数 0 001—6 000
ISBN 7-5432-0818-0/G·387
定价：22.00 元

前　言

回首20世纪，科学技术突飞猛进。人类登月球，飞太空；科学家开始解读遗传密码，开创了生物工程；随着功能强大的高速数字电子计算机的诞生，开启了网络、信息工程的新纪元……在科学技术高速发展中，数学这门既古老又年轻，既庞大又单一的科学，发挥了极其重要的作用，几乎所有的科学都因应用了数学而得到了极大的发展。真可谓“万物皆数”也。因此数学应用问题在国际、国内数学教育界已引起了广泛而高度重视，它不仅成为数学教学的重点和难点，也是数学教学改革的一个重要方向。

随着高考命题的改革，应用题已成为高考命题的热点。高考应用题以其新颖、科学、灵活、实用且富有时代气息而备受好评，应用题也就成为高考的必考题型。

用数学解决实际问题除了掌握必要的数学基础知识外，还要具有如下能力：

1. 阅读理解、文字表达和感知信息的能力。首先能层次分明地阅读并理解非数学语言表述的实际问题的详尽含义；其次能用简明的汉语和准确的数学语言清晰且自然表述问题的完整解答。

2. 数学意识化的能力和信息加工能力。即建立数学模型的能力。能从阅读中去伪存真，抓关键语句，挖掘并提炼有助于解题的数学信息，并用恰当的数学语言，将实际问题转化为纯数学问题。

3. 解决纯数学问题的能力。能经过综合分析，应用基础知识和基本方法，完整解答所建立的数学模型。

4. 判断、信息反馈和综合评价的能力。根据所求解数学模型，得到的结果，进行检验、判断、修正得到符合实际的解答。

由于数学应用问题涉及领域广泛，综合应用强。无论是平常教学还是高考，学生对应用题往往一筹莫展，这揭示了一个当前数学教学中无可回避的问题，怎样提高学生解应用题的能力，是当前数学教学的当务之急。为此世纪出版集团汉语大词典出版社出版了《格致丛书》，其目的在于“致知在格物，格物而后知至”。这本《用数学的眼光看世界》将向广大读者展现一幅比教科书更绚丽多姿的画卷，其璀璨鲜艳的花朵，琳琅满目的果实，其气象万千的景致，峰回路转的情调，耐人寻味的故事，使人在数学王国目不暇接、流连忘返。同时为中学数学应用题的教学和学习提供了一个根据客观现实而形成的数学概念、构建数学模型、体现数学应用的舞台。

本书以最新《全日制中学数学教学大纲》和现行高中数学教材为依据，将高中数学教学内容分为十四章编写，每章力求从数学史切入主题，让广大读者朋友了解一定的数学史，将该学科的起源和发展史(即该学科的创造史)展现在读者眼前，同时也将在该学科中有杰出贡献的数学家也介绍给读者。例题尽量使之典型、新颖、有趣。既来源于生活实践，又不落俗套。例题以分析——解——讨论(点评)为模式，给出对问题的深入思考和细致评述，让我们理解问题的实质与变化、原由与关系，达到由表及里、举一反三、触类旁通之功效。每章后配备一定量的习题，供读者选用。习题在书后附有参考答案或提示，作为读者解题后的反思之用。

本书既适合于初学者的理解，又适合于学生综合应用和亲身体验，更强调思维模式的养成。不仅着眼于高考，而且关注学生今后的“生存能力”的掌握，更重视学生的创新能力的培养。具有较强的实用性、极强的针对性和较高的权威性。

在此，向广大的高中学生和教师，特别是高三学生推荐此书。希望广大师生用此书后，在解决应用性问题上达到“一览众山小”的效果。

本书在编写过程中得到了世纪出版集团李爱珍主任、余佐赞先生的大力支持和指导。陈奇先生在百忙中审阅此稿，在此一并致谢。

由于时间仓促和笔者的水平有限，书中难免有一些错漏之处，欢迎使用本书的读者不吝赐教，以便使本书再版时，更科学、更实用、更具有指导性。

杨德胜

2002年11月28日于上海市第二中学

目　　录

第一章　方程与方程组

在约公元前2000年左右，巴比伦人的楔形文字书板，以及约公元前1800年左右古埃及的草卷(写在沙草纸卷上的抄本)上，已有方程的记载。草卷上记载的埃及文字为："一堆东西的计算。它的一倍半加上4，其总和是10，这堆东西有多少个?"设这堆东西为 x 个，用现在的记法就是 $1.5x+4=10$。我国的古算书《九章算术》上，也已经有了方程的记载。后来由"符号代数"的创世者之一的韦达(François Vièta，1540～1603)，第一个在方程中使用字母表示未知数，使代数学成为以一般形式表示的讨论方程的科学。

笛卡尔(Rene Descartes，1596～1650)曾想把任何问题都转化为代数问题，而任何代数问题可转化为方程问题，即"万能代数模型"。虽然没有成功，但生产和生活实践中的许多问题，常常归结为建立方程(方程组)来解决。方程思想是中学数学中重要方法之一。列方程解应用题的关键是抓住问题的不变量，建立已知量与未知量之间的等量关系来列出方程，通过解方程给出实际问题的解答。问题的背景常常是关于运输、投资、规划、决策等。问题涉及到的方程主要是一、二元方程，多元、分式、指数或对数方程，而且往往与三角函数、数列、几何等知识相结合。

韦达(François Vièta，1540～1603)　法国数学家，律师。"符号代数"的创建者之一，第一个在方程中有意识并系统地使用了字母，使代数学成为以一般形式表示的讨论方程的科学。

1591年著《分析术引论》，书中不仅用字母来表示未知数和未知数的乘幂，而且还用字母来表示一般的系数。

1615年出版的《论方程的整理和修正》中，不完整地揭示了方程的根与系数的关系，即后世所称的"韦达定理"(韦达定理的系统叙述是牛顿在他的《普遍的算术》中作出的)。

韦达于1579年发表他的第一本三角学方面的著作《标准数学》。在这本书里，他收集了许多解直角三角形和解一般三角形的公式，还提出了正切定理、球面三角形角的余弦定律以及不少三角恒等式。在1615年出版的《斜截面》一书中，他又给出了用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 表示 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 的恒等式。韦达又可以说是第一个将三角恒等式用代数形式予以表示的人。

例题精讲

例1　有一容器盛满纯酒精，先倒出10升，加满水后，再倒出5升，又加满水，此时纯酒精与水的体积比为 $55:17$，则原来有纯酒精(　　)。

(A) 15升　　(B) $\dfrac{60}{17}$升　　(C) 60升　　(D) 73升

分析　抓住操作过程中纯酒精量的变化，根据最后纯酒精的质量分数建立等式，列出方程。

解　设原有纯酒精 x 升，则

$$\frac{(x-10)-5\cdot\dfrac{x-10}{x}}{x}=\frac{55}{55+17}$$

去分母整理得　$17x^2-1080x+3600=0$

解得　$x_1=\dfrac{60}{17},\ x_2=60$

知识点：

$浓度=\dfrac{溶质}{溶液}$

$溶液=溶质+溶剂$。

方法与技巧：

纯酒精与水的体积比为 $\dfrac{55}{17}$ 建立等式。

经检验 $x_1=\frac{60}{17}$，$x_2=60$ 都是原方程的根，但由题意，酒精体积不能小于 10 升。故取 $x=60$，因此应选(C)。

讨论 数学应用题是中学数学的重要组成部分，由于它具有广泛的社会性、生产实践性、灵活的创造性和思维的开放性，因此它一直是高考及学科竞赛的热点。由于中学数学应用题是一种经过加工的数学应用问题，因此解应用题的基本步骤如下：

1. 审题 阅读原题，读懂题意，深刻理解问题的实际背景，领悟其数学实质，把“问题情景”译成数学语言，找出问题的主要关系（目标与条件的关系）。

2. 建模 将问题的主要关系抽象、归纳出它们的数量关系，建立符合实际的数学模型。整个建模是新旧知识、经验重组、构建、理解的过程。相当于信息加工中，数学编码重组的过程。具有较强的抽象、概括能力。体现了思维的严谨性和创造性。

3. 求解 根据所建立的数学模型，选择适当的数学方法，解出模型的数学结果。此步骤要求解模者，具有扎实的数学知识，熟练的运算能力和严密的逻辑推理能力。相当于信息加工的输出过程。

4. 检验 根据求解数学模型所得到的结果，对结果进行检验、判断、修正。得出符合实际意义的答案。此过程相当于信息加工的反馈过程。

解数学应用题有四忌：一忌望题生畏、畏难而退；二忌审题不细、关系不明；三忌主次不分、舍本求末；四忌量纲混乱、脱离实际。

例 2 有一水库，在单位时间内流进一定量的水，同时也向外放水。按现在的放水量，水库中的水可使用 40 天，因最近在水源的地方降雨，流入水库的水量增加 20%，如果放水量增加 10%，则仍使用 40 天，问如果按原来的放水量放水，可正常使用多少天？

知识点：
增长率。
方法与技巧：
方程组的思想。
流入与放出水的时间是一致的。

分析 应该按三种不同情况分别列式：①原来水库水量及流入水量与放水量写出一个等式；②按降水增加及放水量增加写出一个等式；③按降水量增加，放水量按原来情况写出一个等式，总之用方程组求解。

解 设现在水库水量为 a，每日流入水量为 b，每日放出水量为 c，又设若按原来的放水量放水可用 x 天。

由题意，得

$$\begin{cases} a+40b=40c \\ a+40(1+0.2)b=40(1+0.1)c \\ a+(1+0.2)bx=cx \end{cases}$$

解方程组得 $x=50$。经检验 $x=50$(天)符题意。

答：按原来的放水量可使用 50 天。

讨论 1. 应注意时间——天数，流入与放出水的天数是一致的。

2. 利用类似思路可解决如下两个问题：

Ⅰ. 一水池有 A、B 两个进水龙头和一个出水龙头 C，如果在水池空时，同时将 A、C 打开，2 小时可注满水池；同时打开 B、C 两龙头，3 小时可注满水池；当水池满时，先打开 C，7 小时后再把 A、B 同时打开（C 仍开着），1 小时后水池又可注满。那么单独打开 A，几小时可注满水池？

解 设单独打开 A、B（或 C），分别在 x、y（或 z）小时内注满水池（或放尽池水）则

$$\frac{2}{x}-\frac{2}{z}=1 \quad ①$$

$$\frac{3}{y}-\frac{3}{z}=1 \quad ②$$

$$1-\frac{7}{z}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=1 \quad (z\geqslant 7) \quad ③$$

$$\text{或}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1 \quad (z\leqslant 7) \quad ④$$

由①，②，③解出 $\frac{1}{x}=\frac{23}{36}$，

$\therefore \quad x=\frac{36}{23}$，

由①，②，④解得 $\frac{1}{x}=\frac{2}{3} \quad \therefore \quad x=\frac{3}{2}$。

答：当单独打开 C 水管放完一池水所需时间不少于 7 小时时，需 $\frac{36}{23}$ 小时；当单独打开 C 水管放完一池水所需时间不多于 7 小时时，需 $\frac{3}{2}$ 小时。

Ⅱ. 旅客在车站候车室排队等候检票，并且排队的旅客按一定的速度在增加。设检票速度一定。当车站开放一个检票口，需用半小时方可将待检查旅客全部检票进站；同时开放两个检票口，只需 10 分钟便可将旅客全部检票进站。现有一班增开列车过境载客，必须在 5 分钟内旅客全部检票进站，问此时车站最少要同时开放几个检票口。

解 设检票开始时等候检票旅客 x 人，排队队伍每分钟增加 y 人，每个检票口每分钟检 z 人，最少同时开 n 个检票口，就可在 5 分钟内全部检票进站。则

$$\begin{cases} x+30y=30z & ① \\ x+10y=20z & ② \\ x+5y\leqslant n\cdot 5z & ③ \end{cases}$$

由①，②得

$$\begin{cases} x = 15z, \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$ 代入③得 $n \geqslant 3.5$, $\therefore$ $n = 4$

答：此时车站最少要同时开放4个检票口。

例3 某商场第一年初投入50万元进行商品经营，以后每年年终将当年获得的年利润与当年年初投入资金相加所得的总资金，作为下一年年初投入资金继续进行经营。

(1) 如果第一年的年获利率为 P，则第一年年终的总资金可用代数式表示为________万元（注：年利率 $= \dfrac{\text{年利润}}{\text{年初投入资金}} \times 100\%$）

(2) 如果第二年的年获利率比第一年的年获利率多10个百分点（即第二年的年获利率是第一年的获利率与10%之和），第二年年终的总资金为66万元，求第一年的年获利率。

解 (1) 第一年：年初投入50万元，

年终年利润 = 年初投入资金 × 年获利率：50万元 × P；

年终总资金 = 年利润 + 年初投入资金：50万元 × P + 50万元 = $50(1+P)$万元。

(2) 第二年：年初投入资金 = 上一年年终总资金。

年终总资金 = 年利润 + 第一年年终总资金

= 第一年年终总资金 × 年获利率 + 第一年年终总资金

$= 50(1+P)(P+10\%) + 50(1+P)$

$\therefore$ 依题意有第二年年终总资金 $= 50(1+P)(P+10\%+1)$，

即 $50(1+P)(1+P+10\%) = 66$，

$\therefore$ $P_1 = -2.1$（不合题意，舍去），$P_2 = 0.1 = 10\%$

$\therefore$ 第一年的年获利率为10%。

讨论 1. 理解本题中的“年利润”、“年获利率”、“投入资金”、“总资金”等新概念，进而把握住它们之间的关系，是正确求解的前提。

2. 类似的可利用“出厂价 = 成本 + 利润”、“利润 = 成本” × “利润率”解决如下问题：

东升电器公司生产A种型号的家庭电脑。1995年平均每台电脑生产成本为5000元，并以纯利润20%标定出厂价。1996年开始，公司更新设备，加强管理，逐步推行股份制，从而使生产成本逐年降低。1999年平均每台A种型号的家庭电脑尽管出厂价仅是1995年出厂价的80%，但却实现了纯利润50%的效益。

(1) 求1999年每台电脑的生产成本；

(2) 以1995年生产成本为基数，求1995年至1999年生产成本平均每年降低的百分数（精确到0.01，以下数据可供参考：$\sqrt{5} \approx 2.236$，$\sqrt{6} \approx 2.449$）。

知识点：

利润、获利率、总资金、投入资金、成本、出厂价、增长率、让利。

方法与技巧：

把握上述新概念之间的关系。

解 (1) 设1999年每台电脑的成本为 x 元,则由1995年的出厂价求得1999年的出厂价 $5000\times(1+20\%)\times80\%$,另一方面1999年的出厂价用1999年的生产成本表示为:$x(1+50\%)$

因此 $x(1+50\%)=5000(1+20\%)\times80\%$

解之得 $x=3200$ 元。

(2) 设1995~1999年间每年平均生产成本降低的百分率为 y,则

$$5000(1-y)^4=3200,$$

解之得 $y_1=1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, y_2=1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$(舍去)

$\therefore\ y_1=1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\approx0.106\approx0.11=11\%$

故1999年每台电脑的生产成本为3200元,1995年至1999年生产成本平均每年降低11%。

3. 类似的可利用"利润 = 售价 - 进价"、"利润 = 售价 × 利润率"解决如下问题:

某商人购货,进价已按原价30元/件扣去25%,他希望对货物定一新价,以便按新价让利20%销售后,仍可获得售价25%的纯利,那么此商人经营这种货物时,按新价让利总额 y 与货物件数 x 之间的关系是 $y=$ ________。

解 设每件货物的新价为 a 元,则销售价为 $a(1-20\%)=a\cdot80\%$(元),而进价为 $30(1-25\%)=30\times75\%$(元),因此销售每件货物的利润为 $a\times80\%-30\times75\%$。

由题意知 $a\times80\%-30\times75\%=a\times80\%\times25\%$

$\therefore\ a=\dfrac{75}{2}$。

$\therefore\ y=a\cdot20\%\cdot x=\dfrac{15}{2}x$。

例4 在商店里买一种商品,买大包装的比小包装的合算。如蓝天牙膏60克装的每支1.15元,150克装的每支2.50元。二者单位质量的价格比是1.15:1,牙膏的价格是由生产牙膏的成本、包装及运输成本等决定的。假设忽略运输成本,并假设生产成本与牙膏质量成正比,包装成本与牙膏皮的表面积成正比,请你制定一支180克装的蓝天牙膏的合理价格。

分析 本题应抓住关键词句:"生产成本与牙膏质量成正比","包装成本与牙膏皮表面积成正比"。排除干扰语句:"二者单位质量的价格比是1.15:1",则问题可获解。

解 设不同大小的牙膏包装形状是相似的。相似几何体的对应长度之比为相似比,对应表面积之比是相似比的平方,对应体积之比为相似比的立方,对应质量之比等于体积之比。

方法与技巧:

抓住"生产成本与牙膏质量成正比","包装成本与牙膏皮表面积成正比"。转化为数学问题"重量比 = 体积比"、"相似几何体体积比" = "相似比的立方","相似几何体表面积之比" = "相似比的平方"。

又设牙膏的每克价格 x 元,则

60 克装的牙膏每支包装价格为 $1.15-60x$;

150 克装的牙膏每支包装价格为 $2.50-150x$;则

这两支牙膏的相似比是$\sqrt{\dfrac{1.15-60x}{2.50-150x}}$,体积之比为$\dfrac{60}{150}$

于是$\sqrt{\dfrac{1.15-60x}{2.50-150x}}=\sqrt[3]{\dfrac{60}{150}}$　解得　$x\approx 0.0095$ 元

60 克装牙膏每支包装价格为 $1.15-60x=0.58$ 元,设 180 克装牙膏每支包装价格为 y 元,则

$\sqrt{\dfrac{y}{0.58}}=\sqrt[3]{\dfrac{180}{60}}$　解得　$y\approx 1.21$(元)

故 180 克装牙膏的价格应为 2.92 元。

讨论　该题解决了经济生活中的包装成本问题,与生活密切相关。其中用到"重量比 = 体积比"、"相似几何体的体积之比 = 相似比的立方"和"相似几何体的表面积之比 = 相似比的平方"。利用上述结论还可解决如下问题:

某种冰淇淋是用球型塑料壳包装的,有 60 克和 150 克装两种规格。假设冰淇淋售价 = (冰淇淋成本 + 包装成本) × (1 + 利润率),并且包装成本与球型外壳表面面积成正比,已知 60 克装冰淇淋售价 1.50 元,其中冰淇淋成本为每克 1 分,利润率为 25%。问利润率不变的情况下,150 克装冰淇淋应售价多少? 两种规格中,买哪种比较合算(参考数据 $\sqrt[3]{20}\approx 2.71$)?

解　设 60 克装冰淇淋包装成本为 x 元,则

$1.50=(60\times 0.01+x)(1+25\%)$

解得　$x=0.60$ 元。

又设 60 克装和 150 克装两种规格外壳表面积分别为 S_1、S_2,容积分别为 V_1、V_2,150 克装冰淇淋包装成本为 y 元,则

$$\frac{y}{0.60}=\frac{S_2}{S_1}\text{且}\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}},$$

由已知有　$\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{150}{60}$　故　$\dfrac{y}{0.60}=\left(\dfrac{150}{60}\right)^{\frac{2}{3}}$。

得　$y=\dfrac{0.6}{2}\times\sqrt[3]{50}\approx 0.813$

∴　150 克装冰淇淋售价为

$(150\times 0.01+1.105)\times(1+25\%)\approx 3.26$(元)。

两种规格的单位重量价格分别为

$$\frac{1.50}{60}=0.025(\text{元}),\frac{3.26}{150}\approx 0.022\text{ 元}$$

买大包装合算。

例 5 有两艘浮桥船同在一条河的上游处，需要尽快把它们运到下游的 $a$km 处，一艘拖船不能同时拖两艘浮桥船，因此产生了这样一个计划：让一艘浮桥船随水流漂向下游，同时用拖船拖运另一艘浮桥船某段距离后，让这艘浮桥船自行漂流到终点；而拖船立即返回去拖漂流下来的第二艘浮桥船，并使两艘浮桥船同时到达指定终点。如果水流速度是 $u$km/h，拖船的顺水速度是 $(v+u)$km/h，逆流速度是 $(v-u)$km/h，按这个计划整个运输共用了多少时间？

知识点：

相遇问题。船速 = 船在静水中的速度 + 水流速度

方法与技巧：

抓路程相等，时间相等。

分析 可用拖运（包括自漂）的距离 $a$km 写出等式。

解

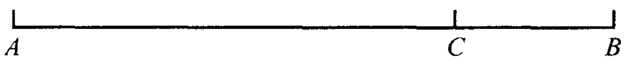


图 1－1

如图 1－1 所示，设由点 A 第一次拖浮桥船用时间为 t_1 到达点 C，再让第一艘浮桥船顺水漂流 t_2 时间到达目的地点 B。拖船到达点 C 后，立即返航，去迎接第二艘浮桥船用的时间是 t_3，根据题意得：

$$\begin{cases}(v+u)t_1+ut_2=a & ①\\ u(t_1+t_3)+(v-u)t_3=(v+u)t_2 & ②\\ u(t_1+t_3)+(v+u)(t_2-t_1)=a & ③\end{cases}$$

解得 $t_1+t_2=\dfrac{3a}{3u+v}$

答：整个计划共用时间 $\dfrac{3a}{3u+v}h$。

讨论 方程①表示第一艘浮桥船航行的路程等式。方程②右边表示第一艘浮桥船由 A 到 C 的路程；左边表示第二艘浮桥船由 A 漂到 C 之间某一处，及拖船由 C 逆流而上到该处与第二艘浮桥船相遇时的路程之和。方程③表示第二艘浮桥船航行完 a 路程的等式。

例 6 一个人喝酒少量后，血液中酒精含量将迅速上升到 0.3mg/ml，在停止喝酒后，血液中酒精含量会以每小时 50% 的速度减少。假定法律规定：驾驶员血液中的酒精含量不得超过 0.08 mg/ml，则驾驶员喝完酒后____小时才能驾驶（结果保留整数）。

知识点：

增长率、指数方程。

方法与技巧：

抓酒精含量与时间的关系列出指数方程。

分析 先给出驾驶员血液中的酒精含量与时间的关系式，再由题意列出方程。

解 设驾驶员喝酒 x 小时后才能驾驶，则 x 小时后，血液中酒精含量达 $0.3(1-50\%)^x$，故得方程

$0.3\times0.5^x=0.08$ 即 $0.5^x=\dfrac{4}{15}$，

$x=\log_{0.5}\dfrac{4}{15}\approx1.91\approx2$（小时），

所以驾驶员大约喝酒 2 小时后才能驾驶。

讨论 以相同速度递增或递减的应用题可用指数方程模型求解。类似可解决如下问题：

1987 年的 7 月 11 日世界人口达到 50 亿，联合国将 7 月 11 日定为“世界人口日”，1992 年的“世界人口日”全球人口达到 54.8 亿，请你计算：

(1) 世界人口每年净增多少？

(2) 人口增长率是多少？

(3) 预测 2002 年 7 月 11 日世界人口数。

解 (1) 在 1987 年到 1992 年的 5 年内，世界人口每年平均增加为

$$(54.8-50)\div 5=0.9(\text{亿})$$

(2) 设这 5 年的人口增长率为 $x\%$，则

$$50(1+x\%)^5=54.8$$

解得 $$x\approx 1.85$$

即从 1987 年到 1992 年世界人口平均增长率约为 1.85%。

(3) 按增长率 1.85% 预测，2002 年 7 月 11 日世界人口为

$$54.8(1+0.0185)^{10}\approx 65.83(\text{亿})$$

说明 本题数据取自《人民日报》1992 年 7 月 12 日至 15 日，通过数据分析，可以看出控制人口增长、保护环境的重要性。1995 年上海市高考题曾以此题为背景。

名言苑

人口的增殖，就是积累的减少。

——马寅初

父母对于子女，应该健全的产生，尽力的教育，完全的解放。

——鲁 迅

例 7 一位师傅每小时可做出零件 5 个以上（整数），而每一个徒弟每小时做出的零件数比师傅少 2 个，这位师傅为完成一批零件花费了若干（整数）个小时，如果由两个徒弟共同去完成该批零件所花费时间比师傅少 1 小时，求这批零件的总数。

知识点：

简单的不定方程。

方法与技巧：

建立不定方程后，利用整数这个条件去解。

分析 根据师傅和徒弟相同数目的零件的时间建立等式。

解 设师傅每小时做 x 个零件，完成这批零件需 t 小时，则

$$xt=2(x-2)(t-1),$$

$$t=2+\frac{4}{x-4}$$

因为 t 是整数，所以 $\frac{4}{x-4}$ 也是整数，即 4 可被 $x-4$ 整除，又由题设可知 x 是大于 5 的整数，可得 $x-4$ 只可能是 2 和 4 两种情况。

当 $x-4=2$，即 $x=6$ 时，$t=4$，此刻 $xt=24$。

当 $x-4=4$，即 $x=8$ 时，$t=3$，此刻 $xt=24$。

讨论 本题根据等量关系得到的是一个不定方程，找出 t 与 x 的函数关系后，利用 t 必是整数的条件来解决。类似可解决如下问题：

批零兼营的文具店规定，凡购铅笔 51 支以上（包括 51 支）按批发价结算，而购 50 支以下（包括 50 支）按零售价结算，批发价每购 60 支比零售价购 60 支降价 1 元。现在班长小王同学来购铅笔，若给全班每人买一支，则必须按零售价结算，需要 m 元（$m\in \mathbf{N}^*$）；但若多

买 10 支则可按批发价结算，恰好也是 m 元，问小王同学班上共有几人？

解 第一步：此题含有两个字母：①学生人数设 x 人，②两种买法为 m 元，其中隐含着一个等量关系是：批发价每购 60 支比零售价购 60 支降价 1 元。

第二步：进行数学化设计：将一个实际问题转化为解方程问题。

由于全班有 x 个学生（$40 < x \leqslant 50 \quad x \in \mathbf{N}^*$），则每支铅笔零售价为 $\frac{m}{x}$ 元，批发价为 $\frac{m}{x+10}$ 元，依题意有方程

$$\frac{60m}{x} - \frac{60m}{x+10} = 1 \qquad ①$$

第三步：进行标准化求解：将一个分式方程转化为二次方程的讨论，求得问题解决。

由①得 $x^2 + 10x - 600m = 0$

其中 $40 < x \leqslant 50, x \in \mathbf{N}^*$。

可解得 $\begin{cases} x = -5 + \sqrt{25 + 600m} \\ 25 + 600m \text{ 为完全平方数。} \end{cases}$

由 $40 < -5 + \sqrt{25 + 600m} \leqslant 50$，

可得 $\frac{10}{3} < m \leqslant 5$，又 $m \in \mathbf{N}^*$，$\quad \therefore m = 4$ 或 $m = 5$

而 $m = 4$ 时，$25 + 600m$ 不是完全平方数；$m = 5$ 时，$x = 50$。

故小王班上有 50 个学生。

习题精选（一）

1. 一商店把货物按标价的九折出售，仍可获利 20%，若该货物的进价为每件 21 元，则每件的标价应为（　　）。

（A）27.72 元　　（B）28 元　　（C）29.17 元　　（D）30 元

2. 某家具的标价为 132 元，若降价以 9 折出售（即优惠 10%）仍可获利 10%（相对进货价），则该家具的进货价是（　　）。

（A）108 元　　（B）105 元　　（C）106 元　　（D）118 元

3. 在市场价格调控中，知某商品零售价 2001 年比 2000 年上涨 25%，欲控制 2002 年比 2000 年只上涨 10%，则 2002 年比 2001 年应降价（　　）。

（A）15%　　（B）12%　　（C）10%　　（D）5%

4. 不久前，共青团中央等部门发起了“保护母亲河运动”，某校高二两个班 115 名学生积极参与，踊跃捐款。已知高二（1）班有 $\frac{1}{3}$ 的学生每人捐 10 元，高二（2）班有 $\frac{2}{5}$ 的学生每人捐 10 元，两班其他学生每人捐款 5 元。两班捐款总额有 785 元，问两班各有多少学生？

5. 某农户在山上种了脐橙果树 44 棵，现进入第三年收获，收获时，先随意采摘 5 株果树上的脐橙，称得每株果树上脐橙如下（单位千克）：35，35，34，39，37。