上 海 市 大 学 教 材

微分方程及其数值解

上海市大学教材

微分方程及其数值解

复旦大学数学系《微分方程及其数值解》编写组

上海人民出版社

上海市大学教材
微分方程及其数值解
复旦大学数学系《微分方程及其数值解》编写组
上海人民出版社出版
(上海绍兴路5号)
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张 16.5　字数 362,000
1975年8月第1版　1975年8月第1次印刷

统一书号: 13171·142　定价: 1.05元

毛主席語录

列宁为什么说对资产阶级专政，这个问题要搞清楚。这个问题不搞清楚，就会变修正主义。要使全国知道。

无产阶级必须在上层建筑其中包括各个文化领域中对资产阶级实行全面的专政。

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

前　言

微分方程是一门有着广泛应用的数学分支．由于实践需要的推动，差不多在出现微积分的同时，微分方程就已经发展起来，并获得了愈来愈广泛的应用．随着电子数字计算机的出现，数值求解微分方程的近似计算方法有了进一步的发展．在我国的三大革命实践中，也经常提出有关微分方程的问题，要求求出它的解或是研究其解的性质．为了帮助学员掌握微分方程及其数值解的基本知识，遵照毛主席关于"**教材要彻底改革，有的首先删繁就简**"的教导，我们编写了本教材，并和我系计算数学专业首届工农兵学员一起使用本教材进行了教学实践．这次，又在此基础上进行了修订．

微分方程是在人类生产实践中产生，又在生产实践基础上得到发展的，它是从物理模型中抽象出来的，可是旧教材却从概念、定义出发建立理论，构造体系；同时，不恰当地夸大讨论定解问题适定性的意义，把它作为判别定解问题提法是否正确的唯一标准，并几乎成了微分方程教材的唯一内容，完全否认了实践在认识过程中的作用．"**按照这一方法，某一对象的特性不是从对象本身去认识，而是从对象的概念中逻辑地推论出来。……这时，已经不是概念应当和对象相适应，而是对象应当和概念相适应了。**"（恩格斯：《反杜林论》，第93页）这种唯心论的先验论直接导致"少数数学家创造数学"的英雄史观，宣扬"一支笔，一张纸发展数学"的三脱离道路．同时，旧教材理论至上，书本第一，不重视实际求解微分方程的方法和训练，不着重介绍与总结三大革命实践中比较常见的微分方程及常用的求解方法；相反，却搞形式主义，搞烦琐哲学，跟在洋人、古人后面爬行，"**用数不胜数的、九分无用一分歪曲了的知识来充塞青年的头脑**"（《列宁选集》，第四卷，第348页）．旧常微分方程教材一开始就人为地把微分方程划分为"可积类型"与"不可积类型"，并对此大加讨论，这种把资本主义国家发展微分方程初期的一些老古董原封不动照搬过来的做法，就是一例．结果是理论一大套，实际不对号．这一切都是为培养资产阶级接班人服务的，必须彻底批判．

在编写过程中，我们力求联系微分方程的物理模型，尽可能讲清数学原理，希望能正确处理理论和实践的关系，真正做到"**理论的基础是实践，又转过来为实践服务。**"同时，将原有的"常微分方程"、"数学物理方程"及"微分方程数值解"等三门课程精简合并为一门课程，把微分方程的基本性质和实际求解的计算方法结合起来，从求解的角度着重介绍生产实践中比较常见的一些微分方程，并通过在教学过程中安排必要的计算实习，力求使学员"**把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上**"，真正做到学以致用，为学员用微分方程这个工具解决三大革命实践中的有关课题打下初步的基础．但由于我们对毛主席教育革命思想领会不深，调查和实践都很不够，教材中必然有不少缺点和错误，希望同志们及时指正．

在编写及修订教材的过程中，我们得到挂钩工厂、实际部门和兄弟院校的同志们的大力协助，在此一并表示深切的谢意．

复旦大学数学系《微分方程及其数值解》编写组

一九七四年八月

目　　录

第一章　简单常微分方程

§1　什么是微分方程

1-1　从一个具体问题谈起

毛主席教导我们:“**我们讨论问题,应当从实际出发,不是从定义出发。**”

为了说明微分方程的一些基本概念，我们先考察一个具体问题——求空气中下落物体的速度.

设物体的质量为 m，并如图 1-1 那样选取坐标，即设 y 轴方向垂直向下．在物体下落过程中，其速度 v 是时间 t 的函数: $v=v(t)$．为了决定物体的这个下落速度,要从物体运动所具有的内部规律出发.

图　1-1

我们已知,物体运动的基本规律由动力学基本定律 $F=ma$ 给出，其中 $a=\dfrac{dv}{dt}$ 是运动的加速度,而 F 是作用于物体上的力．对于在空气中下落的物体,它一方面受到地心引力的作用,其值为 mg(g 是重力加速度);另一方面,它还受到空气阻力的作用,在运动速度较低的场合,空气阻力可认为和速度成正比,记为 bv(b 是某一正常数).因此,在空气中下落的物体,它所受的作用力为

$$F=mg-bv,$$

式中第二项取负号是因为空气阻力的方向和物体运动方向相反.

这样,由动力学基本定律,我们得到

$$m\frac{dv}{dt}=mg-bv. \tag{1-1}$$

(1-1)式是对在空气中下落的物体具体运用动力学基本定律而得到的方程式,我们要利用它来决定物体的下落速度随时间的变化规律 $v=v(t)$．可以看到，(1-1)式中不仅包含未知函数 $v=v(t)$，而且还包含 v 的一阶微商 $\dfrac{dv}{dt}$．我们把这种含有未知函数的微商的方程称为微分方程．由于(1-1)中只含有一阶微商，这种方程称为一阶的微分方程．满足(1-1)式的函数 $v(t)$，也就是代入(1-1)式能使其左右两端恒等的函数 $v=v(t)$，称为此微分方程的解.

我们的任务,就是求一阶微分方程(1-1)的解.

在求解(1-1)之前，我们先看一个特殊情况．如果不考虑空气阻力的影响，那么速度函数所满足的微分方程(1-1)(在其中令 $b=0$)就化为形式

$$m\frac{dv}{dt}=mg,$$

即

$$\frac{dv}{dt}=g, \tag{1-2}$$

而其解可以通过直接积分一次而求得:

$$v=gt+C, \tag{1-3}$$

其中 C 为积分任意常数. 因此我们看到, 微积分中所学的求不定积分的问题, 实际上就是求解微分方程的一个特例, 这对于我们理解微分方程的一些概念, 将有很大的启发.

从(1-3)式可见, 特殊的一阶微分方程(1-2)有无穷多个解, 它们依赖于一个任意常数 C. 因此, 为了确定物体的运动状态, 还必须附加一定的限制条件. 例如假定物体在初始时刻是自由下落(即初速为 0)的, 此附加条件就是如下的初始条件:

$$t=0 \text{ 时}, \quad v=0. \tag{1-4}$$

由此, 可确定出(1-3)中的常数 $C=0$, 而唯一地得到所求的解

$$v=gt.$$

这就是我们在自由落体情形已经熟悉的公式.

对微分方程(1-1)的求解也有类似的情形.

记

$$k=\frac{b}{m}, \quad \mu=\frac{g}{k},$$

微分方程(1-1)化为

$$\frac{dv}{dt}=g-kv,$$

或

$$\frac{dv}{dt}=k(\mu-v). \tag{1-5}$$

把上式改写为微分形式

$$\frac{dv}{\mu-v}=k\,dt. \tag{1-6}$$

这时式子左端只包含变量 v 及其微分, 而右端只包含变量 t 的微分. 在两端分别对所含的变量积分, 就得到

$$\int\frac{dv}{\mu-v}=kt+C_1,$$

即

$$-\ln|v-\mu|=kt+C_1,$$

或

$$|v-\mu|=e^{-kt-C_1},$$

或

$$v-\mu=\pm e^{-kt-C_1}=Ce^{-kt},$$

其中 C_1 是积分任意常数, 而 $C=\pm e^{-C_1}$ 也是任意常数. 于是我们看到一阶微分方程(1-1)同样有无穷多个解, 它们依赖于一个任意常数 C:

$$v=\mu+Ce^{-kt}. \tag{1-7}$$

为确定下落物体的运动状态, 即确定上面解中的任意常数, 同样必须附加一定的限制条件. 在自由下落的情形, 此附加条件同样由初始条件(1-4)给出. 在(1-7)中用 $t=0$ 代入, 利用初始条件(1-4), 可确定出(1-7)中的常数 $C=-\mu$, 于是得到

$$v=\mu(1-e^{-kt}), \tag{1-8}$$

这就是所求的解答，它表示着初速为零的自由下落质点在 t 时刻的速度.

1-2 微分方程的一些基本概念

通过上面对微分方程(1-1)所作的一些分析和说明，使我们可以透过这个特殊的例子看到一些对微分方程的概念及求解具有普遍意义的东西. 这就是:

1. 含有未知函数的微商的方程称为微分方程. 如(1-1)那样，未知函数 $v=v(t)$ 只依赖于一个自变量 t，因而方程中只出现未知函数对一个自变量的微商，这样的微分方程，又称为常微分方程，以区别于我们今后将碰到的未知函数依赖于两个或两个以上自变量，因而方程中包含未知函数的偏微商的那种微分方程(称为偏微分方程).

2. 凡是满足微分方程的函数，就称为微分方程的解. 一个微分方程一般有无穷多个解，但是对于所考察的具体问题，它的解应该是唯一确定的. 因此必须"**对于具体的事物作具体的分析**"，根据实际问题的需要，对微分方程的求解附加一定的限制条件才能唯一地确定它的解.

在上例中，微分方程(1-1)反映了在所述条件下自由落体运动的一般规律，即矛盾的普遍性；而初始条件(1-4)作为描述初始时刻运动状态的附加条件，则反映了具体事物的特殊性，即矛盾的特殊性.

正如毛主席所教导的那样:"**由于特殊的事物是和普遍的事物联结的，由于每一个事物内部不但包含了矛盾的特殊性，而且包含了矛盾的普遍性，普遍性即存在于特殊性之中，所以，当着我们研究一定事物的时候，就应当去发现这两方面及其互相联结，发现一事物内部的特殊性和普遍性的两方面及其互相联结，发现一事物和它以外的许多事物的互相联结。**"我们在用微分方程来解实际问题时，必须既根据事物的内部规律列出微分方程，还要根据事物的具体特点列出相应的附加条件(总称为定解条件)，把两者联结在一起构成一个定解问题，寻求既满足微分方程，又满足定解条件的解，才能得到确切的答案.

在上例中，初始条件就是附加的定解条件，我们求解的就是下面的定解问题:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=mg-bv, & (1\text{-}1)\\ t=0:\ v=0. & (1\text{-}4)\end{cases}$$

微分方程数值解的主要任务，就是对实践中经常碰到的一些微分方程的定解问题，用适当的求解方法来求出它们的数值解，为三大革命运动服务.

3. 一阶的微分方程(1-1)有无穷多个解，由(1-7)式表示. 我们把由(1-7)式表示的解的全体(它们依赖于一个任意常数 C)称为微分方程(1-1)的通解. 而把(1-1)的满足初始条件(1-4)的解(1-8)(它只有一个!)称为特解. 由上述可知，求定解问题的解，就是求微分方程的特解.

在上例中，我们是通过先求出微分方程(1-1)的通解，再利用初始条件(1-4)确定其中的任意常数而求得特解的. 以后可以看到，只有对于一些简单类型的微分方程，才可以先求出

它的通解，然后再根据初始条件来确定通解中所含的任意常数，求得所需的特解．对于比较复杂的微分方程，上面的办法就行不通了，而必须直接寻求定解问题的特解．因为实际问题中提出的大都是微分方程的定解问题，直接考察定解问题是和实际的需要一致的．

4．毛主席教导我们："**人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来。**"微分方程来源于实践，是从相应的物理模型中归结出来的，那种认为"物质消失了，只剩下一些方程式"之类的奇谈怪论，是列宁早就痛斥过的"物理学"唯心主义，是十足的唯心论先验论的黑货，必须彻底批判，肃清其流毒．我们必须牢固地树立实践第一的观点，从实践的需要出发，结合所考察的物理模型，来归结和求解微分方程的定解问题．在求得定解问题的解后，还必须"**把理性的认识再回到社会实践中去，应用理论于实践，看它是否能够达到预想的目的。**"因为"**只有人们的社会实践，才是人们对于外界认识的真理性的标准。**"

习　　题

1．验证函数 $v=\frac{mg}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}t})$ 是微分方程(1-1)的解，并满足初始条件(1-4)．

2．验证下列函数是否是所给微分方程的解：

(1) 微分方程：$\frac{dy}{dx}-2y=0$；

函数：1° $y=Ce^{2x}$ （C 为任意常数），

2° $y=\sin 2x$．

(2) 微分方程：$\frac{dx}{dt}=x+\sin t$；

函数：$x=Ce^t-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)$ （C 为任意常数）．

3．验证函数 $s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ 满足二阶微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g$$

及初始条件

$$t=0:\quad s=s_0,\ \frac{ds}{dt}=v_0.$$

4．求以初速 v_0 垂直下抛的物体（质量为 m）的速度 $v=v(t)$：

(1) 不计空气阻力；

(2) 设空气的阻力为 bv（b 是某一正常数）．

§2 可分离变量方程

毛主席教导我们："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。**"

我们已经看到，上节所推导的微分方程(1-1)有这样的特点：经过适当的变换，可使方程的左端只含一个变量及其微分，而其右端只含另一变量及其微分，换句话说，可使变量得到分离．这样，在方程两端分别对所含的变量进行积分，就可求得方程的通解．凡是具有这样特点的微分方程称为可分离变量的微分方程，简称可分离变量方程．而上述那种分离变量

后分别进行积分的方法，就称为分离变量解法.

一般，可分离变量方程可写成如下的形式：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y), \tag{2-1}$$

其中 $f(x)$ 及 $g(y)$ 在所考察的范围内是已知的连续函数，且设 $g(y)\neq 0$.

通过分离变量，就可把(2-1)式改写为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

再在两端对所含的变量进行积分，就得到

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C. \tag{2-2}$$

从(2-2)式中将 y 解出为自变量 x 的函数（它依赖于一个任意常数 C），就给出方程(2-1)的通解. 再根据所给的初始条件，就可以决定它的特解.

最后要附带指出，上述讨论是在假设 $g(y)\neq 0$ 的基础上进行的. 如果对所考察范围中的某个值 $y=y_0$，成立 $g(y_0)=0$，那末可以直接看出，函数 $y=y_0$ 满足方程(2-1)，因此它就是方程(2-1)的一个解.

［例 1］ 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

满足初始条件

$$y|_{x=0}=1$$

的特解.

解：分离变量得

$$y\,dy=x\,dx,$$

两边积分，得

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C,$$

所以通解是

$$y=\pm\sqrt{x^2+2C}.$$

代入初始条件（根号前负号的情形显然不合要求）

$$y|_{x=0}=\sqrt{0^2+2C}=1,$$

于是

$$C=\frac{1}{2}.$$

代回通解，得到所求的特解是

$$y=\sqrt{x^2+1}.$$

［请读者自行验证.］

［例 2］ 电阻-电容电路中，电容器的充电过程.

在图 1-2 所示的线路中，R 是电阻，C 是电容器电容，E 是电源电势，K 是开关. 设开始时电容器上没有电荷，电容器两端的电压为零. 当开关合上时，电源就向电容器充电，

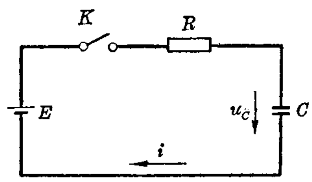

图 1-2

电路中有电流 i 流过，电容器上的电压 u_C 逐渐升高．求 u_C 随时间变化的规律 $u_C(t)$.

解：由回路的电压定律，电路的电势 E 应等于电流经过各元件的电压降的总和．现在，经过电阻元件的电压降为 Ri，经过电容元件的电压降为 u_C，于是有

$$Ri+u_C=E. \tag{2-3}$$

又因为电流 i 是电容器上电量 q 对 t 的变化率，而 $q=Cu_C$，所以，

$$i=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_C}{dt}, \tag{2-4}$$

代入(2-3)式得

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E. \tag{2-5}$$

这就是 u_C 应该满足的微分方程.

另外，在开关合上的瞬间(即 $t=0$)电容器上的电压 u_C 为零，即

$$u_C|_{t=0}=0. \tag{2-6}$$

这就是 $u_C(t)$ 应满足的初始条件.

先求微分方程(2-5)的通解．分离变量得

$$RC\frac{du_C}{dt}=E-u_C,$$

$$\frac{RC}{E-u_C}du_C=dt.$$

两边积分得

$$-RC\ln(E-u_C)=t+a_1 \quad (a_1\text{是任意常数}).$$

化简得

$$\ln(E-u_C)=-\frac{1}{RC}(t+a_1),$$

$$E-u_C=e^{-\frac{1}{RC}(t+a_1)}=ae^{-\frac{t}{RC}},$$

其中 $a=e^{-\frac{a_1}{RC}}$ 也是任意常数．于是得到通解

$$u_C=E-ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

代入初始条件(2-6)，可决定出 $a=E$．这样就得到电容器充电的规律是

$$u_C(t)=E-Ee^{-\frac{t}{RC}}=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right). \tag{2-7}$$

图 1-3 是 $u_C=u_C(t)$ 的图形．可以看到，充电时 u_C 从零逐渐增大，经过一段时间后，就基本上到达电压 E．u_C 的这段变化过程称为过渡过程，它是电子技术中最常应用的现象之一.

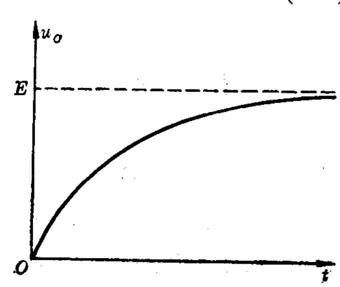

图 1-3

[例 3]　求解方程

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

解：原方程表面上看不是一个可分离变量方程，但如果针对方程的特点，作变换

$$y=xu,$$

或

$$u=\frac{y}{x}$$

来引入新的未知函数 $u=u(x)$，就可以“**促成事物的转化**”，把原方程化为可分离变量方程.

事实上，此时有

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

于是原方程化为

$$x\frac{du}{dx}+u=2\sqrt{u}+u,$$

即

$$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}.$$

这是一个可分离变量方程.

显然，$u=0$ 是这方程的一个解．相应地，原方程有一个解 $y=0$.

现设 $u\neq0$，分离变量得

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x},$$

再两端积分，得

$$\sqrt{u}=\ln|x|+C.$$

于是

$$u=(\ln|x|+C)^2,$$

其中 C 是任意常数.

代回原先的未知函数，就得到原方程的通解为

$$y=xu=x(\ln|x|+C)^2$$

及

$$y=0.$$

习　　题

1．求下列方程的通解：

(1) $\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{x}$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$;

(3) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=0$.

2．求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $\frac{du}{dt}+ku^2=0$，$u|_{t=0}=1$;　　(2) $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$，$y|_{x=1}=0$.

3．求解方程

(1) $2\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$;

(3) $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)+x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=0$.

4. 求解方程$(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$.

[提示：令 $z=x+y$ 作为新的未知函数.]

5. 放射性元素铀，由于原子中不断放出微观粒子，它的含量 Q 不断减少，称为衰变. 已知其衰变速度与含量成正比，λ 是比例系数(即衰变常数)，设开始时铀的含量为 Q_0 克，求任意时刻 t 的含量 $Q(t)$.

$\left[\text{提示：微分方程 } \dfrac{dQ}{dt}=-\lambda Q\text{，负号表示 } \dfrac{dQ}{dt}<0\text{，即含量 } Q \text{ 随时间的增加而减少.}\right]$

6. 求在电阻-电容电路中，电容器的放电规律：在如图 1-4 所示的电路中，R 是电阻，C 是电容，K 是开关. 设开始时电容器上有电压 u_0，求开关 K 合上后电容器上电压随时间的变化规律 $u_C=u_C(t)$.

$\left[\text{提示：微分方程 } RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0.\right]$

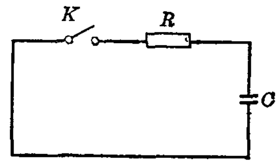

图 1-4

7. 一质量为 m 的物体，从地面附近的高度自由落下，若空气阻力与下落速度的平方成正比，比例系数为 $k(k>0)$，求下落速度随时间的变化规律.

8. 由实验知道，物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温度差成正比. 如果空气温度为 20°C，而一个物体在 20 分钟之内由 100°C 冷到 60°C，问这个物体由 100°C 冷到 30°C 要经过多长的时间？

$\left[\text{提示：微分方程 } \dfrac{dT}{dt}=-k(T-20)\text{，而系数 } k \text{ 的数值要根据已给的条件来确定.}\right]$

9. 各种架空的输电线、电话线及绳索等，在重力的作用下均具有悬链线的形状. 已知其方程 $y=y(x)$ 由下述初值问题所决定：

$$\begin{cases} y''=\dfrac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}; \\ x=0:\ y=a,\ y'=0, \end{cases}$$

试求悬链线的方程.

[提示：令 $y'=p$.]

§3 一阶线性方程

3-1 一阶线性方程

在实用上，除了前节所介绍的可分离变量方程外，还常碰到本节将要考察的一阶线性方程.

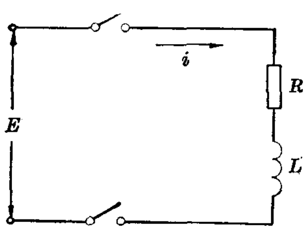

图 1-5

例如，在同步发电机的突然短路计算中，要考察发电机定子绕组突然短路过程中的情况. 从电路的角度来看，就相当于要考察将一个电阻 R 和电感 L 相串联的电路突然接到一个电压等于发电机感应电势 E 的电网后所发生的情况(图 1-5). 图中 R，L 分别表示短路的等值电阻和等值电感，而 $E=E_0\sin\omega t$，其中 E_0 为感应电势的振幅，ω 是圆频率.

发电机的突然短路，就相当于在某一瞬间 $t=0$ 突然按下开关，接通图 1-5 的电路. 我们要求的是此短路电流 i 随时间 t 的变化规律：$i=i(t)$.

由于自感现象，此电路的电势由两部分组成，一部分是外加的电势 $E=E_0\sin\omega t$，另一部分是电流通过线圈 L 时产生的自感电势 $E_L=-L\dfrac{di}{dt}$(自感电势与电流的变化率成正比，

负号表示自感线圈对交流电的通过起阻抗作用)．因此电路的合成电势为 $E_0\sin\omega t-L\dfrac{di}{dt}$.

这样，由回路的电压定律，我们得到

$$E_0\sin\omega t-L\frac{di}{dt}=Ri,$$

或

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t. \tag{3-1}$$

这就是短路电流 $i=i(t)$ 所应满足的微分方程．

相应的初始条件是电路刚接通时电流为零，即

$$t=0\text{ 时}，\ i=0. \tag{3-2}$$

在发电机的突然短路计算中，就要求出定解问题(3-1)、(3-2)的解．

我们看到，(3-1)是一个一阶的微分方程，而且具有这样的特点：方程中只出现未知函数及其微商的一次式，即此方程对于未知函数及其微商而言是线性的．我们称具有这样特点的方程为一阶线性方程．

这样，一阶线性方程的一般形式可以写为

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t), \tag{3-3}$$

其中 $P(t)$, $Q(t)$ 在所考察的范围中都是自变量 t 的已知函数，而 $x=x(t)$ 是未知函数．

如果(3-3)中右端函数 $Q(t)\equiv 0$，即方程具有形状

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=0, \tag{3-4}$$

那末称方程是齐次方程；相应地，称(3-3)为非齐次方程．

(3-1)就是一阶非齐次的线性方程，其中未知函数是 $i=i(t)$，而

$$P(t)=\frac{R}{L},$$

$$Q(t)=\frac{E_0}{L}\sin\omega t.$$

3-2 一阶线性方程的解法

毛主席教导我们：“**我们不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法问题。**”

为了求解一阶线性方程，我们由浅入深，先考察齐次方程(3-4)．它是一个可分离变量的方程，分离变量后为

$$\frac{dx}{x}=-P(t)dt,$$

两端积分得

$$\ln|x|=-\int P(t)dt+C_1\quad (C_1\text{ 是任意常数}).$$

于是得到它的通解为

$$x=\pm e^{-\int P(t)dt+C_1}=Ce^{-\int P(t)dt}, \tag{3-5}$$

其中 C 也是一个任意常数．

利用齐次方程的上述解的表达式，对于非齐次方程(3-3)，我们就可通过引入下面的变换，“**促成事物的转化**”，实现求解的目的.

我们令

$$x=ue^{-\int P(t)dt} \tag{3-6}$$

引入新未知函数 u 来代替 x，代入(3-3)，得到

$$\frac{du}{dt}e^{-\int P(t)dt}+u\left[\frac{d}{dt}(e^{-\int P(t)dt})+P(t)e^{-\int P(t)dt}\right]=Q(t).$$

因为 $e^{-\int P(t)dt}$ 是相应的齐次方程(3-4)的解，方括号中的量为零，于是得到

$$\frac{du}{dt}e^{-\int P(t)dt}=Q(t),$$

即

$$\frac{du}{dt}=Q(t)e^{\int P(t)dt}.$$

这时直接积分就得到

$$u=\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C \quad (C\text{ 是积分任意常数}).$$

再代回(3-6)，就得到非齐次方程(3-3)的通解为

$$x=e^{-\int P(t)dt}\left[C+\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt\right]=Ce^{-\int P(t)dt}+e^{-\int P(t)dt}\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt. \tag{3-7}$$

结论 一阶线性方程 $\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$ 的通解表达式为

$$x=e^{-\int P(t)dt}\left[C+\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt\right] \quad (C\text{ 是任意常数}).$$

如要决定特解，只要利用所给的初始条件 $x|_{t=t_0}=x_0$ 确定通解中任意常数 C 的数值即可.

从一阶非齐次线性方程(3-3)的通解表达式(3-7)可见，其右端第一项 $Ce^{-\int P(t)dt}$ 是相应的齐次方程(3-4)的通解(见(3-5)式)，而第二项 $e^{-\int P(t)dt}\cdot\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt$ 是非齐次方程(3-3)的一个特解(它由通解中令 $C=0$ 而得到). 因此，我们看到，非齐次方程(3-3)的通解实际上是由它的一个特解加上相应的齐次方程(3-4)的通解而构成，这对问题的求解将带来一定的方便.

3-3 例

[**例 1**] 对最简单的一阶线性齐次方程

$$a\frac{dx}{dt}+bx=0,$$

其中 $a(\neq 0)$，b 是常数. 此时 $P(t)=\frac{b}{a}$，因此，由(3-5)式，它的通解为

$$x=Ce^{-\frac{b}{a}t} \quad (C\text{ 是任意常数}).$$