·华东师大二附中特级教师、数学首席教师滕永康编·

SHUXUE

数学

GAOKAO JIAJIAO

高考家教

FUDAO JINGPIN

下册

辅导精品

集毕生教学与家教心得
汇千余道辅导例题精华
帮你顺利理清解题思路
助你考入理想高等学府

上海教育出版社

华东师大二附中特级教师、数学首席教师滕永康编

数学高考家教

下册

辅导精品

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学高考家教辅导精品. 下册/滕永康主编. —上海：上海教育出版社，2004.3
ISBN 7-5320-9429-4

Ⅰ.数… Ⅱ.滕… Ⅲ.数学课-高中-习题-升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 014740 号

数学高考家教辅导精品

滕永康等 编

下 册

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

(上海永福路 123 号 邮编：200031)

各地新华书店经销 上海市委党校印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 17.5 插页 1 字数 422,000

2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-5,000 本

ISBN 7-5320-9429-4/G·9261 定价：23.00 元

目　　录

三角、立体几何、平面解析几何部分

三角、立体几何、平面解析几何部分

第一章　三　　角

§1　任意角的三角函数与它的图像、性质

例 1　如果锐角$\triangle ABC$中，$\angle A > \angle B > \angle C$，求 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 的取值范围.

分析：(1) 求 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 的取值范围的本质是求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的取值范围.

(2) 由 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$，　且　$\angle A > \angle B > \angle C, \angle A < 90°$，易知 $\angle A > \dfrac{\angle A + \angle B + \angle C}{3} = 60°$.

(3) 同理可知：$(0°) < \angle C < \dfrac{\angle A + \angle B + \angle C}{3} = 60°$.

(4) 由 $\angle A < 90°$ 可知 $\angle B + \angle C > 90°$. 因此由 $\angle B > \angle C$，可知 $\angle B > \dfrac{\angle B + \angle C}{2} = 45°$.

解　$\because$　$\angle A > \angle B > \angle C$，　且　$\angle A < 90°$，

$\therefore$　由 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$，可得　　$60° < \angle A < 90°$，$0° < \angle C < 60°$.

又　$\angle A < 90°$，　$\therefore$　$\angle B + \angle C > 90°$.

再由　$\angle B > \angle C$，可得　　$45° < \angle B < 90°$.

因此　　$\sin A \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$，$\sin B \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$，$\sin C \in \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

说明：从上述解法可知：锐角三角形中，任意两个内角之和必大于 90°.

例 2　指出函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间.

误解一：由于函数 $y = \sin x$ 在$\left[0 + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上与$\left[\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增，因此函数 $y = \sin x$ 在$\left[0 + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增.

评析：函数 $y = \sin x$ 在 $\left[0 + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上确实单调递增，在$\left[\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上也确实单调递增，但函数 $y = \sin x$ 在 $\left[0 + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上不单调递增.

例如，当 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = \dfrac{11}{6}\pi$ 时，虽然 α、$\beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$，且 $\beta > \alpha$，但 $\sin \beta < \sin \alpha$.

殊不知函数 $y = \sin x$ 仅在$\left[0 + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上与$\left[\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$

数学高考家教辅导精品

$(k \in \mathbf{Z})$ 上分别单调递增.

误解二:由函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增可知:$y=\sin x$ 在第一、第四象限内单调递增.

评析:首先,$x=0$ 时既不属于第一象限也不属于第四象限.

其次,α、β 在同一区间 $\left[\text{如}\ \alpha、\beta \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})\right]$ 与 α、β 在同一象限(如 α、$\beta\in$ 第一象限)是两个不同的概念,不可混淆.

事实上,α、β 在同一区间,如 α、$\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,上述表达式:$\left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 中的 k 应相同 $(k=0)$;而 α、β 在同一象限,如 α、$\beta\in$ 第一象限时,表达式:$\left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 中的 k 可不相同!如 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (此时 $k=0$),而 $\beta \in \left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$ (此时 $k=1$).

正解 函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增.

说明:函数 $y=\sin x$ 在 $\left[0+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上与 $\left[\frac{3}{2}\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上充其量是分别单调递增.

* **例 3** 求证在锐角△ABC 中,$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

分析一:可先证明 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$. 再同理可得:$\sin B+\sin C>\cos B+\cos C$,$\sin C+\sin A>\cos C+\cos A$,推得 $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

证明一 ∵ △ABC 是锐角三角形, ∴ $\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$,(为什么) $0<|A-B|<\frac{\pi}{2}$.

于是 $\sin(A+B)>0$, $\cos(A+B)<0$, $\cos(A-B)>0$.

从而 $\sin(A+B)>\cos(A+B)$, $\frac{1}{2}\sin(A+B)\cos(A-B)>\frac{1}{2}\cos(A+B)\cos(A-B)$.

即
$$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B.$$

同理 $\sin B+\sin C>\cos B+\cos C$, $\sin C+\sin A>\cos C+\cos A$.

三式相加,可得 $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

分析二:可利用 $0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$,及正弦函数的单调性来证明.

证明二 ∵ △ABC 是锐角三角形, ∴ $\angle A+\angle B>90^\circ$.

∴ $0^\circ<90^\circ-B<A<90^\circ$.

再由 $y=\sin x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,可得 $\sin A>\cos B$.

同理 $\sin B>\cos C$, $\sin C>\cos A$.

三式相加,得 $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

说明:(1) 在本例两个证法中,例 1 的说明都起着至关重要的作用.

(2) 在证明二中,不可仅由 $90^\circ-B<A$ 就得:$\sin(90^\circ-B)=\cos B<\sin A$. (为什么)

例 4 在锐角△ABC 中,下列各式恒成立的是 ( )

(A) $\log_{\cos C}\frac{\sin A}{\cos B}>0$. (B) $\log_{\cos C}\frac{\cos A}{\sin B}>0$.

(C) $\log_{\sin C}\frac{\sin A}{\cos B}>0$. (D) $\log_{\sin C}\frac{\sin A}{\sin B}>0$.

分析:(1) 由于$0<\cos C<1$, $0<\sin C<1$,因此只需判断$\sin A$、$\cos B$, $\cos A$、$\sin B$, $\sin A$、$\sin B$之间的大小.

(2) 由$\sin B>\cos A>0$,本例迎刃而解.

解 ∵ $0<\cos C<1$, $0<\sin C<1$, 且 $\sin B>\cos A$, (为什么)

∴ $0<\dfrac{\cos A}{\sin B}<1$. ∴ $\log_{\cos C}\dfrac{\cos A}{\sin B}>0$. 因此 应选(B).

说明:本例再次说明例1的说明在解的过程中所起的作用.

例5 已知第二象限角θ满足$\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}$,求$\dfrac{\theta}{2}$的取值范围.

分析:(1) 第二象限角θ的取值范围为 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\theta<\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ ①

(2) 由题意,$\sin\theta\neq1$, 于是 $\cos\dfrac{\theta}{2}>\sin\dfrac{\theta}{2}$. 由此可得 $\dfrac{\theta}{2}$的取值范围为

$$-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).\quad ②$$

(3) 由①、②即可得本例的解.

解 ∵ θ是第二象限角,

∴ $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\theta<\pi+2k\pi$, 即 $\dfrac{\pi}{4}+k\pi<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. ①

又∵ $\sin\theta\neq1$, (为什么) ∴ 由$1-\sin\theta>0$,可知 $\cos\dfrac{\theta}{2}>\sin\dfrac{\theta}{2}$.

从而 $$-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).\quad ②$$

由①、②可得 $\dfrac{\theta}{2}\in\left(\dfrac{5}{4}\pi+2k\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi+2k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

说明:上述解法中涉及到$\sin\alpha$、$\cos\alpha$比大小的问题.

现把$\sin\alpha$与$\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$与$\operatorname{ctg}\alpha$, $|\sin\alpha|$与$|\cos\alpha|$, $|\operatorname{tg}\alpha|$与$|\operatorname{ctg}\alpha|$的大小问题作一归纳.

(1) $\sin\alpha$与$\cos\alpha$的大小关系(图1-1-1).

当α的终边在第一、第三象限的角平分线上时,$\sin\alpha=\cos\alpha$;

当α的终边在此角平分线的上方,即图中区域①时,$\sin\alpha>\cos\alpha$;

当α的终边在此角平分线的下方,即图中区域②时,$\sin\alpha<\cos\alpha$.

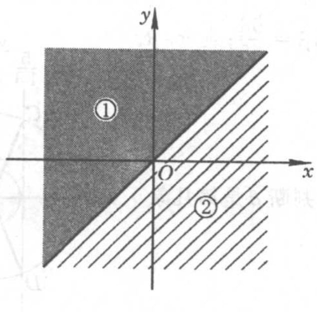


图 1-1-1

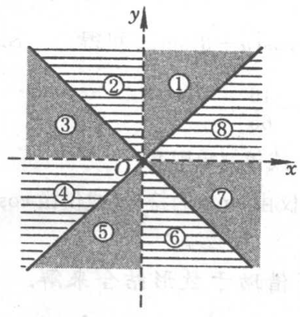


图 1-1-2

(2) $\operatorname{tg}\alpha$与$\operatorname{ctg}\alpha$的大小关系(图1-1-2).

当α的终边在第一、第三象限,或第二、第四象限的角平分线上时,$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$;

当 α 的终边在图中区域①、或③、或⑤、或⑦时(不包括坐标轴)，$\mathrm{tg}\,\alpha > \mathrm{ctg}\,\alpha$；

当 α 的终边在图中区域②、或④、或⑥、或⑧时(不包括坐标轴)，$\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{ctg}\,\alpha$.

例如，"比较 $\mathrm{tg}\,\frac{5}{9}\pi$ 与 $\mathrm{ctg}\,\frac{5}{9}\pi$ 的大小".

$\because\ \frac{5}{9} > \frac{4.5}{9} = \frac{1}{2}$， 且 $\frac{5}{9} \approx \frac{1}{2}$， $\therefore\ \frac{5}{9}\pi$ 属于②. $\therefore\ \mathrm{tg}\,\frac{5}{9}\pi < \mathrm{ctg}\,\frac{5}{9}\pi$.

(3) $|\sin\alpha|$ 与 $|\cos\alpha|$ 的大小关系(图 1-1-3).

当 α 的终边在第一、第三象限，或第二、第四象限的角平分线上时，$|\sin\alpha| = |\cos\alpha|$；

当 α 的终边在图中区域①或③时，$|\sin\alpha| > |\cos\alpha|$；

当 α 的终边在图中区域②或④时，$|\sin\alpha| < |\cos\alpha|$.

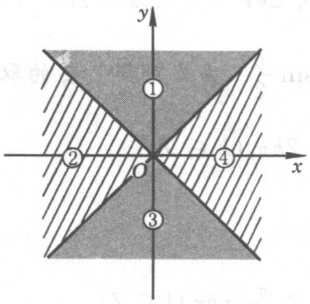


图 1-1-3

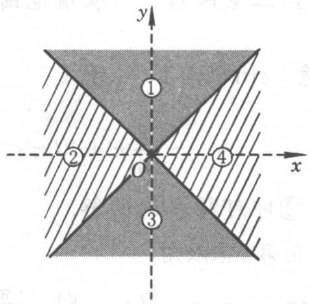


图 1-1-4

(4) $|\mathrm{tg}\,\alpha|$ 与 $|\mathrm{ctg}\,\alpha|$ 的大小关系(图 1-1-4).

当 α 的终边在第一、第三象限，或第二、第四象限的角平分线上时，$|\mathrm{tg}\,\alpha| = |\mathrm{ctg}\,\alpha|$；

当 α 的终边在图中区域①或③时(不包括坐标轴)，$|\mathrm{tg}\,\alpha| > |\mathrm{ctg}\,\alpha|$；

当 α 的终边在图中区域②或④时(不包括坐标轴)，$|\mathrm{tg}\,\alpha| < |\mathrm{ctg}\,\alpha|$.

例 6 如果锐角 α 满足 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{5}{13}$，判断 β 是第几象限角.

分析一：可通过判断 $\sin\beta$、$\cos\beta$ 的符号来判断 β 是第几象限角.

解法一 $\because\ \alpha$ 是锐角，$\cos\alpha = \frac{3}{5}$， $\therefore\ \sin\alpha = \frac{4}{5}$.

又 $\because\ \cos(\alpha+\beta) = -\frac{5}{13}$， $\therefore\ \sin(\alpha+\beta) = \pm\frac{12}{13}$.

由 $\cos\beta = \cos[(\alpha+\beta)-\alpha] = \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，$\sin\beta = \sin[(\alpha+\beta)-\alpha] = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，可得 $\cos\beta = \frac{33}{65}$，$\sin\beta = \frac{56}{65}$；或 $\cos\beta = -\frac{63}{65}$，$\sin\beta = -\frac{16}{65}$.

$\therefore\ \beta$ 是第一或第三象限角.

说明：不可仅由 $\sin\beta$ 的符号(或仅由 $\cos\beta$ 的符号)来判断 β 是第几象限角.

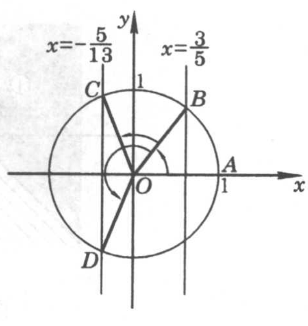


图 1-1-5

分析二：可借助于数形结合来解.

解法二 如图 1-1-5，画出单位圆及直线 $x = \frac{3}{5}$，$x = -\frac{5}{13}$，可知：

$$\alpha = \angle AOB,\ \alpha+\beta = \angle AOC，\text{或}\ \angle AOD.$$

于是 $0^\circ < \angle BOC < 90^\circ$，$180^\circ < \angle BOD < 270^\circ$.

由此可知 β是第一象限角或第三象限角.

说明:解法二比解法一简捷.

例 7 已知$\alpha=\frac{\pi}{8}$, $\beta=\frac{\pi}{8}t^2[t\in(\sqrt{3},\ 2)]$,把$\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\cos\alpha$、$\cos\beta$按从大到小的顺序排列.

分析:只需注意$\beta\in\left(\frac{3}{8}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right)$, $0<\alpha=\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$,利用正弦函数、余弦函数在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上的单调性,即可把$\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\cos\alpha$、$\cos\beta$按从大到小的顺序排列.

解 $\because$ $\beta=\frac{\pi}{8}t^2$, $t\in(\sqrt{3},\ 2)$, $\therefore$ $\frac{3}{8}\pi<\beta=\frac{\pi}{8}t^2<\frac{\pi}{2}$.

又$\because$ $0<\alpha=\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{8}\pi$与$\frac{\pi}{8}$互为余角,

$\therefore$ 由$\sin\beta$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,$\cos\beta$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减,可得

$$\cos\beta<\cos\frac{3}{8}\pi=\sin\frac{\pi}{8}=\sin\alpha,\ \sin\alpha<\cos\alpha,\ \cos\alpha=\cos\frac{\pi}{8}=\sin\frac{3}{8}\pi<\sin\beta.$$

综上可知 $\sin\beta>\cos\alpha>\sin\alpha>\cos\beta$.

例 8 求函数$y=\sqrt{\cos(\sin x)}$的定义域.

分析:(1) $y=\sqrt{\cos t}$的定义域可由$\cos t\geqslant 0$得出:$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

(2) 只需求x的取值范围,使$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\sin x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

鉴于$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,而$-\frac{\pi}{2}<-1<1<\frac{\pi}{2}$,因此$x\in\mathbf{R}$.

解 由分析,$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\sin x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,及$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, $[-1,\ 1]\subset\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$,可知 $x\in\mathbf{R}$, 即 函数$y=\sqrt{\cos(\sin x)}$的定义域是$\mathbf{R}$.

说明:如果"求函数$y=\sqrt{\sin(\cos x)}$的定义域",那么由$0+2k\pi\leqslant\cos x\leqslant\pi+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,可得$x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$, 即 函数$y=\sqrt{\sin(\cos x)}$的定义域是$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\ (k\in\mathbf{Z})$.

例 9 判断$\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha}{\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}2}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$的值的正负.

分析:(1) 只需判断分子、分母的符号.

(2) 分子可利用余弦函数的单调性来判断.

(3) 分母可根据$\operatorname{tg}1>0$, $\operatorname{tg}2<0$来判断.

解 $\because$ 1(弧度)在第一象限内,2(弧度)在第二象限内, $\therefore$ $\operatorname{tg}1>0$, $\operatorname{tg}2<0$.

$\therefore$ $\operatorname{tg}1>\operatorname{tg}2$, 即 $\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}2>0$. ①

$\because$ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ $\frac{\pi}{6}<\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{2\pi}{3}$. 又 $y=\cos x$在$[0,\ \pi]$上是减函数,

$\therefore$ $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)<\cos\alpha$, 即 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha<0$. ②

由①、②式，可得 $\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha}{\text{tg }1-\text{tg }2}<0.$

例 10 求函数 $y=\sqrt{1+2\sin x}+\lg(2\cos x-1)$ 的定义域.

分析：求这函数的定义域归结为解不等式组：

$$\begin{cases}1+2\sin x\geqslant 0,\\ 2\cos x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\geqslant-\dfrac{1}{2},\\ \cos x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{7\pi}{6},\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\end{cases}(k\in\mathbf{Z}).$$

它们的交集为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，这就是函数的定义域.

解 略.

说明：此题在求两个不等式解集的交集时，利用单位圆可直观得出(图 1-1-6).

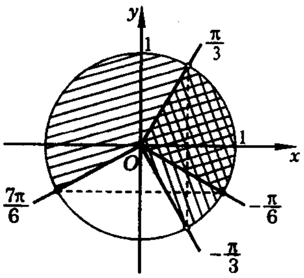
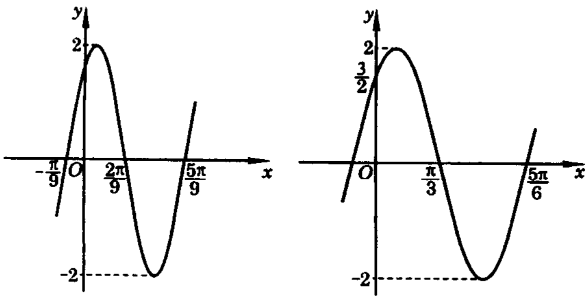


图 1-1-6



(1) (2)

图 1-1-7

例 11 如果函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的图像的一部分如图 1-1-7 所示，求 A、ω、φ 的值.

分析：(1) 题(1)的振幅 A、最小正周期 T 由定义立即可知，$\omega(>0)$ 可由 T 与 ω 的关系：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 而得. φ 可由用"五点法"画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像原理而求得.

(2) 题(2)可先求 ω，再求 φ，最后利用函数图像过点 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ 而求得 A.

解 (1) $A=2.$ $T=\dfrac{5\pi}{9}-\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{2\pi}{3}.$ 代入 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=3.$

令 $3\cdot\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)+\varphi=0$，可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}.$

(2) $\dfrac{T}{2}=\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$， $\therefore$ $T=\pi.$ 从而 $\omega=2.$

令 $2\cdot\dfrac{5}{6}\pi+\varphi=2\pi\left(\text{或 }2\cdot\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\pi\right)$，可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}.$

由图像过点 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$，可得 $\dfrac{3}{2}=A\sin\left(2\cdot 0+\dfrac{\pi}{3}\right)$， $\therefore$ $A=\sqrt{3}.$

说明：(1) 当 $\omega>0$ 时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. 否则，$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

鉴于此，"已知 $y=\sin(ax+\varphi)$ 的 $T=\pi$，求 a" 时，由 $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$，应得：$a=\pm 2$.

(2) 如果"求 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间",可利用

$y=\sin X$ 在 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant X\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增,

得 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$, ∴ $-\frac{3}{8}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

但值得指出的是:若 $\omega<0$,则不可立即仿用上述方法来解! 例如,"求 $y=3\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间",应采用下述方法(把 ω 改变为大于 0 后,再仿用上述解法)来解.

$y=3\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)=-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$,

∴ $y=3\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间即为 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间.

于是 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$, ∴ $\frac{3}{8}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7}{8}\pi+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

例 12 已知 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图像如图 1-1-8 所示,$\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,试求 φ 的值.

误解一:把点 A 的坐标代入函数式,得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$.

∴ $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

误解二:∵ $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ∴ 由 $\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=\frac{1}{2}$,可知 $0<\frac{2}{3}\pi+\varphi<2\pi$.

于是 $\frac{2}{3}\pi+\varphi=\frac{\pi}{6}$,或$\frac{5}{6}\pi$, 即 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,或 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

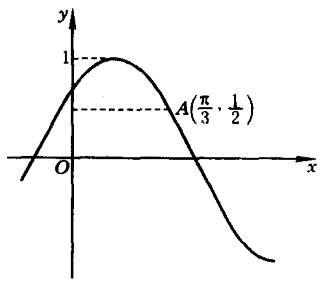


图 1-1-8

评析:正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递减区间是 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$. 因为点 A 在单调递减波段上,所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$. 又 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$, 即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$, 又∵ $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ∴ $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

例 13 把函数 $y=\sin x$ 的图像上所有点的横坐标沿 x 轴方向伸长为原来的两倍(纵坐标不变),再把图像上所有的点向左平移$\frac{\pi}{3}$,求所得图像的解析式.

分析:如果把 $y=\sin x$ 表示成 $y=f(x)=\sin x$,那么首先应得:$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)=g(x)=\sin\frac{1}{2}x$. 其次应得:$y=g\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=h(x)=\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

解 $y=\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

说明:(1) 如果把本例改为:"把函数 $y=\sin x$ 的图像上所有的点向左平移$\frac{\pi}{3}$,再把图像上所有点的横坐标沿 x 轴方向伸长为原来的两倍(纵坐标不变),求所得图像的解析式."

这时,设 $f(x)=\sin x$, 首先可得 $y=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, 其次可得 $y=$

$g\left(\frac{1}{2}x\right)=h(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$. 于是 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

两者之间的区别务必透彻理解!! 两者极易混淆,应予以高度重视.

(2) 如果能真正理解、掌握本例与说明(1)中问题的解法,下述问题就极易解答:

"如何移动函数 $y=\sin 3x$ 的图像,能得到函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像?"

事实上,由 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x-\frac{\pi}{9}\right)$,可知:应把函数 $y=\sin 3x$ 的图像上所有的点向右平移$\frac{\pi}{9}$个单位.

例 14 求下列函数的最大值和最小值:

(1) $y=\sin(\cos x)$; (2) $y=\cos(\sin x)$;

(3) $y=2\cos^2 x+5\sin x-4$; (4) $y=a\sin x+b$;

(5) $y=a\sin^2 x+b\cos^2 x$.

分析:(1) 可利用 $y=\sin x$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递增来解.

(2) 可利用 $y=\cos x$ 是偶函数,且在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递减来解.

(3) 可先把原表达式改写为关于 $\sin x$ 的二次函数,再利用二次函数的有关性质来解.

(4) 由于 $y=ax+b$ 在 $a>0$ 时单调递增,在 $a<0$ 时单调递减,在 $a=0$ 时是常数,因此可分三种情况分类讨论.

(5) 应分 $a>b$, $a=b$, $a<b$ 三种情况分类讨论.

解 (1) $\cos x\in[-1,1]$, 又 $1(弧度)<\frac{\pi}{2}$, 即 $[-1,1]\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

∴ $y=\sin t$, $t\in[-1,1]$ 上单调递增.

因此 $y_{min}=\sin(-1)=-\sin 1$, $y_{max}=\sin 1$.

(2) $\sin x\in[-1,1]$, $y=\cos t$ 是偶函数,在 $t\in[0,1]$ 上单调递减.

∴ $y_{min}=\cos 1$, $y_{max}=1$.

(3) $y=2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4=-2\sin^2 x+5\sin x-2=-2\left(\sin x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$.

又 $\sin x\in[-1,1]$, ∴ $y_{min}=-9$, $y_{max}=1$.

(4) 当 $a>0$ 时,$y_{max}=a+b$, $y_{min}=-a+b$;

当 $a=0$ 时,$y_{max}=y_{min}=b$;

当 $a<0$ 时,$y_{max}=-a+b$, $y_{min}=a+b$.

(5) $y=a\sin^2 x+b(1-\sin^2 x)=(a-b)\sin^2 x+b$.

当 $a>b$ 时,$y_{max}=a$, $y_{min}=b$;

当 $a=b$ 时,$y_{max}=y_{min}=b$;

当 $a<b$ 时,$y_{max}=b$, $y_{min}=a$.

说明:(1) 上述解法中,当 $a<b$ 时,还可以把原函数化为 $y=a+(b-a)\cos^2 x$,求得 $y_{max}=b$, $y_{min}=a$.

(2) 第(5)小题也可借助于"半角公式"来解:

$$y=a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot\cos 2x.$$

∴ 当 $a>b$ 时,$y_{max}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot(-1)=a$, $y_{min}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot 1=b$.

当 $a=b$ 时，$y_{\max}=y_{\min}=b$.

当 $a<b$ 时，$y_{\max}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot 1=b$, $y_{\min}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot(-1)=a$.

例 15　求 $y=1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x$, $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 的最值.

分析：可先把原表达式化为只有一个三角函数的关系式，再来求其最值.

解　$y=1+\operatorname{tg}x\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{\cos 2x}$.

$\because$　$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$,　$\therefore$　$2x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.　$\therefore$　$\cos 2x\in(0,\ 1]$.

因此　　$y_{\min}=1$, 最大值不存在.

说明：由于最值包括最小值、最大值，因此在求最值时如果最大值(或最小值)不存在，也应写明，以免产生误会.

例 16　求 $y=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 的最值.

分析：可先把原表达式化为只有一个三角函数的关系式，再来求其最值.

解　$y=\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{-\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=-\frac{1}{\sin x}$.　　㊀

$\because$　$x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,　$\therefore$　$\sin x\in(0,\ 1]$.　因此　　$y_{\max}=-1$, 最小值不存在.

说明：解的过程中得到的关系式㊀：$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sin x}$，有时可助我们"一臂之力"[参见本章§3 例 23 说明(2)(p38)].

例 17　求函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值.

分析一：(1) 已知表达式可化为 $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2) $\sin 2x$ 与 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时同时达到最大值.

(3) 把 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入原表达式即可得其最大值.

解法一　$y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.　　㊀

又　$\sin 2x$ 与 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时同时达到最大值，

$\therefore$　当 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

说明：虽然表达式㊀中出现两个三角函数表达式，但由于它们同时达到最大值，因此本例迎刃而解.

分析二：鉴于 $\sin x\cos x$ 与 $(\sin x+\cos x)$ 有密切联系：$\sin x\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}$，因此本例可先把原表达式化为关于 $(\sin x+\cos x)$ 的二次函数后再利用二次函数有关性质来求解.

解法二　$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$,　$\therefore$　$\sin x\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}$.

于是 $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{2}+(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}[(\sin x+\cos x)+1]^2-1.$

又 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\therefore$ $\sin x+\cos x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

因此 $y_{\max}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$.

说明:解法二的思路不仅较解法一的思路更为自然,而且还可求它的最小值:$y_{\min}=\dfrac{1}{2}[(-1)+1]^2-1=-1$. 如果用解法一方法,将陷入困境.

***例 18** 已知直线 l_1 平行直线 l_2,点 A 与 l_1、l_2 的距离均为 1,点 B 在 l_1 上,点 C 在 l_2 上,$AB\perp AC$,求$\triangle ABC$ 周长的最小值.

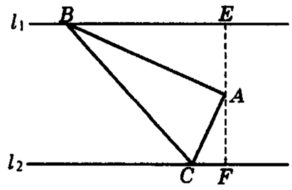


图 1-1-9

分析:如图 1-1-9,设 $AE\perp l_1$ 于 E,$AF\perp l_2$ 于 F. 如果设 $AB=x$ 来解,由于 $p_{\triangle ABC}=AB+AC+BC$,因此其表达式将十分繁复,而如果能设 $\angle BAE=\alpha$,借助于三角函数有关知识,本例就可以化繁为简.

解 如图 1-1-9,设 $AE\perp l_1$ 于 E,$AF\perp l_2$ 于 F,$\angle BAE=\alpha$,则 $AE=AF=1$,$\angle CAF=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$.

$AB=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, $AC=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$. $\therefore$ $BC=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

$p_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$.

又 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\therefore$ $\dfrac{\pi}{4}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$, $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

于是 $\sin\alpha+\cos\alpha\in(1,\sqrt{2}]$, $p_{\triangle ABC}=\dfrac{2}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}$.

因此 $p_{\min}=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}+2$.

说明:(1) 在解的过程中由于利用了例 17 分析二中的思路:$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}[(\sin x+\cos x)^2-1]$,使周长 $p_{\triangle ABC}$ 的表达式立即转化为关于 $(\sin\alpha+\cos\alpha)$ 的关系式.

(2) 函数 $t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$,在 $\alpha\in\mathbf{R}$ 时,$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$;而在 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$t\in(1,\sqrt{2}]$.

***例 19** 已知 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ 的最值.

分析一:(1) 鉴于 $y>0$,因此可通过先求 y^2 的最值,再来求 y 的最值.

(2) 由于 $y^2=(\sin x+\cos x)+2\sqrt{\sin x\cos x}$,而$(\sin x+\cos x)$ 与 $\sin x\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时同时达到最大,在 $x=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时同时达到最小,因此本例的最值唾手可得.

解法一 由分析一,得 $y=\sqrt{\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}}=\sqrt{\sin x+\cos x+\sqrt{2\sin 2x}}$.

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时,$\sin x+\cos x$ 与 $\sin 2x$ 同时达到最大, $\therefore$ $y_{\max}=\sqrt[4]{8}$;

当 $x=0$ 时，$\sin x+\cos x$ 与 $\sin 2x$ 同时达到最小， $\therefore\ y_{\min}=1$.

分析二：(1) 鉴于 $y>0$，因此可通过 y^2 来求 y 的最值.

(2) 由于 $y^2=(\sin x+\cos x)+2\sqrt{\sin x\cos x}$，而 $\sin x\cos x=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}$，因此可通过 $(\sin x+\cos x)\in[1,\sqrt{2}]$ [参阅上例说明(2)]来求 y 的最值.

解法二 由分析二，得 $y=\sqrt{\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}}=\sqrt{\sin x+\cos x+2\sqrt{\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}}}$.

又 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\therefore$ $\sin x+\cos x\in[1,\sqrt{2}]$.

因此 $y_{\max}=\sqrt[4]{8}$，$y_{\min}=1$.

例 20 求函数 $f(x)=3\sin(x+20^\circ)+5\sin(x+80^\circ)$ 的最大值.

分析：由于 20°、80° 均不是特殊角，因此本例无法通过直接展开 $\sin(x+20^\circ)$、$\sin(x+80^\circ)$ 来求 $f(x)$ 的最大值. 但如果能注意到 $(x+80^\circ)=(x+20^\circ)+60^\circ$，就只需把 $x+20^\circ$ 看作为一个角，利用 $A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\theta)$，本例即可迎刃而解.

解
$$\begin{aligned}f(x)&=3\sin(x+20^\circ)+5\sin[(x+20^\circ)+60^\circ]\\&=3\sin(x+20^\circ)+5\sin(x+20^\circ)\cos 60^\circ+5\sin 60^\circ\cos(x+20^\circ)\\&=\frac{11}{2}\sin(x+20^\circ)+\frac{5}{2}\sqrt{3}\cos(x+20^\circ)=7\sin(x+20^\circ+\varphi).\end{aligned}$$

其中，$\sin\varphi=\dfrac{5}{14}\sqrt{3}$，$\cos\varphi=\dfrac{11}{14}$.

$\therefore\ f(x)_{\max}=7$.

例 21 求下列函数的最小正周期 T：

(1) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$； (2) $y=1-8\cos^2x+8\cos^4x$； (3) $y=\sin^6x+\cos^6x$.

分析：(1) 先把原关系式化为一个三角函数的一次表达式，再求其最小正周期.

(2) 在把原关系式化为一个三角函数的一次表达式时，可以直接用余弦的半角公式来解：

$$y=1-4(\cos 2x+1)+2(\cos 2x+1)^2=2\cos^2 2x-1=\cos 4x,\quad \therefore\quad T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

但运算、化简过程较长. 而如果能整体利用：$8\cos^4x-8\cos^2x=8\cos^2x(\cos^2x-1)=-8\sin^2x\cos^2x$，就可以立即化为一个三角函数的一次表达式.

(3) 在把原关系式化为一个三角函数的一次表达式时，可利用 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 来解.

解 (1) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x\cos x}=\dfrac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=-2\operatorname{ctg}2x$， $\therefore\ T=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $y=1+8\cos^2x(\cos^2x-1)=1+8\cos^2x(-\sin^2x)=1-2(2\sin x\cos x)^2=\cos 4x$， $\therefore\ T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

(3)
$$\begin{aligned}y&=(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^3=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)\\&=1-3\sin^2x\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8},\end{aligned}$$

$\therefore\ T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

说明:在三角中求最小正周期的常用基本方法是:把原表达式先化为仅含一个三角函数的表达式,且使这个三角函数仅为一次.

* **例 22** 求函数 $y=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ 的最小正周期.

误解:∵ $y=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$, ∴ $T=\dfrac{\pi}{2}$.

评析:(1) 对于 $y=\operatorname{tg}2\alpha$,$\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,而对于 $y=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$,$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,因此求 $y=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ 的周期不能转化为求 $y=\operatorname{tg}2\alpha$ 的周期.

(2) 设 $y=f(\alpha)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$,当 $\alpha=0$ 时,$f(0)=0$;而当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$f(\alpha)$ 无意义!因此 $T\neq\dfrac{\pi}{2}$.

正解 当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 时,$y=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

∴ 由 $\operatorname{tg}2\alpha$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$,及 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k}{2}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$, 可知

$$T=\frac{\pi}{2}\times 2=\pi.$$

说明:(1) 在通过化简求最小正周期时,需注意“等价性”(即恒等变形)问题.

(2) $\operatorname{tg}2\alpha$ 的最小正周期确为 $\dfrac{\pi}{2}$. 把 $\operatorname{tg}2\alpha$ 的最小正周期:$\dfrac{\pi}{2}$ 乘以 2,可避免评析(2)中产生的问题. 因此 $\dfrac{\pi}{2}\times 2=\pi$ 是本例的最小正周期.

(3) 本例极易产生误解,应引起重视.

例 23 判断函数 $y=\sin|x|$ 的周期情况.

分析:鉴于本例不易化为一个三角函数的一次形式,因此只能通过函数的图像来观察、分析其周期情况.

解 函数 $y=\sin|x|$ 的图像如图 1-1-10 所示.

从图像中可以看到:在原点两旁的图形系“空前绝后”,因此函数 $y=\sin|x|$ 不是周期函数.

说明:(1) 通过函数的图像来判断其周期性有一定的风险. 易“仁者见仁,智者见智”.

(2) 函数 $y=|\sin x|$ 是周期函数,最小正周期 $T=\pi$.

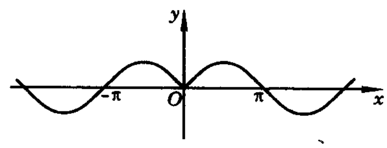


图 1-1-10

例 24 如果△ABC 中,$\sin A=\cos B$,求△ABC 的形状.

误解:由 $\sin A=\cos B$, 可得 $\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$. ㊟

∴ $A=\dfrac{\pi}{2}-B$, 即 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$. 由此可知 △ABC 是直角三角形.

评析:由㊟式:$\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$,固然可得:$\sin A=\cos B$;但由 $\sin A=\cos B$,除了可得:$\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$外,还可得:$\sin A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+B\right)$. 因此认为△$ABC$ 一定是直角三角形是武断的!

正解 由已知式,可得 $\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,或 $\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$. $\therefore$ $A=\frac{\pi}{2}-B$,或 $A=\frac{\pi}{2}+B$.

因此,$\triangle ABC$ 为以$\angle ACB$ 为直角的直角三角形或钝角三角形.

例 25 如果$\triangle ABC$ 中, $\sin 2A=\sin 2B$, 求$\triangle ABC$ 的形状.

分析:由 $\sin 2A=\sin 2B$,可得:$\sin 2A=\sin(\pi-2B)$.因此由已知可得:$A=B$,或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

解 由已知, $\sin 2A=\sin 2B$,或 $\sin 2A=\sin(\pi-2B)$, $\therefore$ $A=B$,或 $A=\frac{\pi}{2}-B$.

因此,$\triangle ABC$ 为以$\angle ACB$ 为直角的直角三角形或等腰三角形.

例 26 已知$\triangle ABC$ 中, $2\sin^2 A=3\sin^2 B+3\sin^2 C$,且 $\cos 2A+3\cos A+3\cos(B-C)=1$, 求 $a:b:c$.

分析:(1) 欲求 $a:b:c$,只需求出 $a:c$ 与 $b:c$.

(2) 由已知 $2\sin^2 A=3\sin^2 B+3\sin^2 C$, 易想到利用正弦定理可得: $2a^2=3b^2+3c^2$. ①

(3) 把另一个已知条件 $\cos 2A+3\cos A+3\cos(B-C)=1$ 改写为:$3\cos(B-C)-3\cos(B+C)=1-\cos 2A=2\sin^2 A$ 后, 利用两角和、差的余弦公式可得: $6\sin B\sin C=2\sin^2 A$.

于是易想到再利用正弦定理得到: $3bc=a^2$. ②

(4) 解由①、②组成的方程组即可得本例的解.

解 由 $2\sin^2 A=3\sin^2 B+3\sin^2 C$ 及正弦定理,可得 $2a^2=3(b^2+c^2)$. ①

由 $-3\cos(B+C)+3\cos(B-C)=1-\cos 2A=2\sin^2 A$,可得

$$6\sin B\sin C=2\sin^2 A, \quad \therefore \quad a^2=3bc. \qquad ②$$

解由①、②组成的方程组,可得 $\begin{cases}b=c,\\ a=\sqrt{3}c.\end{cases}$ $\therefore$ $a:b:c=\sqrt{3}:1:1$.

例 27 已知$\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=1$, 求$\angle B$ 的取值范围.

分析一:(1) 可通过设 $BC=x$ 后, 利用余弦定理写出 $\cos B$ 用 x 表示的表达式.

(2) 通过求出 $\cos B$ 的取值范围,即可求得$\angle B$ 的取值范围.

解法一 设 $BC=x$,则 $\cos B=\frac{x^2+2^2-1}{2\cdot 2\cdot x}=\frac{x^2+3}{4x}=\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}$.

$\because$ $\frac{x}{4}>0$, $\frac{3}{4x}>0$, $\therefore$ $\cos B=\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{x}{4}\cdot\frac{3}{4x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $1<x<3$, $\therefore$ 当且仅当$\frac{x}{4}=\frac{3}{4x}$, 即 $x=\sqrt{3}$时,等号成立.

因此 $\cos B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. 此时 $0°<\angle B<90°$. 从而 $\angle B\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$.

分析二:如果能利用正弦定理: $\frac{\sin C}{2}=\frac{\sin B}{1}$,及 $0<\sin C\leqslant 1$, 就立即可得 $\sin B$ 的取值范围.于是$\angle B$ 的取值范围也唾手可得.

解法二 由 $\frac{\sin C}{2}=\frac{\sin B}{1}$,及 $0<\sin C\leqslant 1$,可得 $0<\sin B\leqslant\frac{1}{2}$.

又$\because$ $0°<\angle B<90°$, (为什么) $\therefore$ $\angle B\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$.