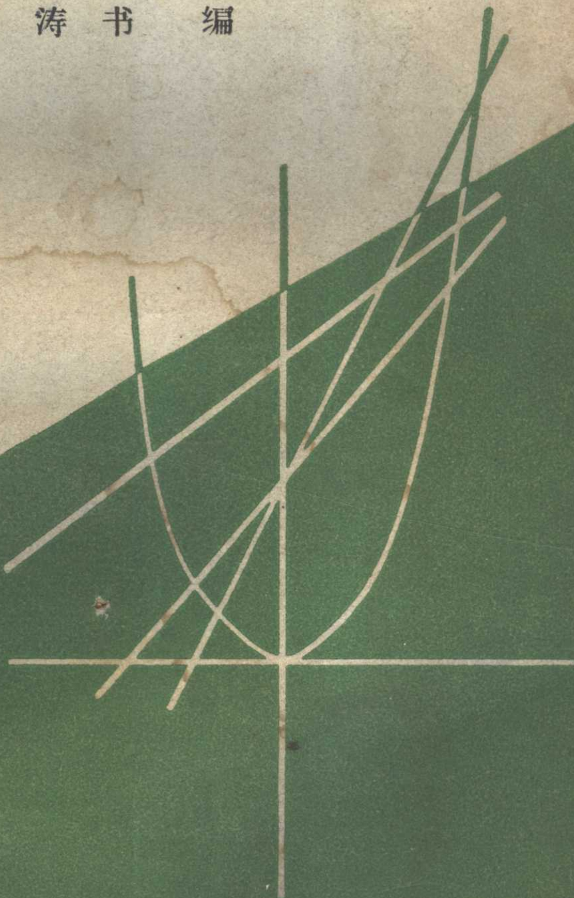
代数百题多解法

涛书 编



DAISHU BAITI DUOJIEFA

代 数 百 題 多 解 法

*

甘肃人民出版社出版（兰州市第一新村）

甘肃省书刊出版业营业許可証出字001号

河南省洛阳印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

*

开本：787×1092毫米 1/32 • 印张：11$\frac{1}{4}$ 200千字

1965年2月第一版　1965年2月第一次印刷

印数：1—80,200册

*

統一书号：13096 • 27

定　　价：（6）0.85元

編者的話

本書基本上是依据現行高中代数課本的內容，并参考了中学数学教学大綱（修訂草案）等編写的，目的是为了帮助中学在校学生、农村知識青年和数学愛好者复习参考和自修之用。

本書內容包括因式分解，整式、分式和比例、根式、方程、函数与图象、数列、对数、排列与組合、复数以及不等式十个部分，共搜集了各类多解的比較典型的練习題一百个。在习題前面編有各种解題的“思考方法”，題后附有“方法簡評”，分析和比較各种解題方法的优劣，帮助讀者加强邏輯思維能力，提高解題的技巧，借以达到能把所学的基本概念、定理、公式較熟練地运用到解决实际問題中去。

本書在編写过程中，曾蒙黃懋德、黃希賢两位老师的指导和帮助，在此一并致謝。

由于我們的水平有限，書中缺点錯誤一定还存在不少，敬希讀者不吝賜教。

編　者

1964年8月

目　录

一　因式分解

1　将下列各题分解因式：

（1）　$ax+bx+cx+ay+by+cy$；

（2）　$p(x-y)-q(y-x)$；

（3）　$2a(x+y)+x+y$；

（4）　$a(m+n)+bm+bn$；

（5）　x^3+3x^2+3x+9；

（6）　$x^2-xy-2x+2y$.

（1）**思考方法一**　因原式中三項含x、三項含y，故将含有x的三項分为一組，含y的三項分为另一組，然后再提取其公因式.

解法一

$$\begin{aligned}&ax+bx+cx+ay+by+cy\\=&(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)\\=&x(a+b+c)+y(a+b+c)\\=&(a+b+c)(x+y).\end{aligned}$$

思考方法二　因含a、b、c的各有两項，故以a b、c、为标准分为三組，然后再提取其公因式.

解法二

$$\begin{aligned}&ax+bx+cx+ay+by+cy\\=&(ax+ay)+(bx+by)+(cx+cy)\\=&a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)\\=&(x+y)(a+b+c).\end{aligned}$$

（2）**思考方法一**　在原式中很明显，如果能将$(y-x)$或$(x-y)$改变为$(x-y)$或$(y-x)$，則就有二項公因式$(x-y)$或$(y-x)$可提取，但在改变$(y-x)$或$(x-y)$为$(x-y)$或$(y-x)$时，就必須改q（或p）前負号（或正号）为正号（或負号）．

解法一

$$
\begin{aligned}
&p(x-y)-q(y-x)\\
=&p(x-y)+q(x-y)\\
=&(x-y)(p+q).
\end{aligned}
$$

思考方法二　在原式的两項中，都含有x和y，故可将它們展开为四項，其中有两項含x，另两項含y，再以x和y为标准分为两組，然后再提取公因式．

解法二

$$
\begin{aligned}
&p(x-y)-q(y-x)\\
=&px-py-qy+qx\\
=&(px+qx)-(py+qy)\\
=&x(p+q)-y(p+q)\\
=&(p+q)(x-y).
\end{aligned}
$$

（3）**解法一**

$$
\begin{aligned}
&2a(x+y)+x+y\\
=&2a(x+y)+(x+y)\\
=&(x+y)(2a+1).
\end{aligned}
$$

解法二

$$
\begin{aligned}
&2a(x+y)+x+y\\
=&2ax+2ay+x+y\\
=&(2ax+x)+(2ay+y)\\
=&x(2a+1)+y(2a+1)
\end{aligned}
$$

$$=(2a+1)(x+y).$$

（4）**思考方法一** 先在后两项中提取公因式b，再进一步提取公因式$m+n$.

解法一

$$a(m+n)+bm+bn$$
$$=a(m+n)+b(m+n)$$
$$=(m+n)(a+b).$$

思考方法二 将原式中的前项展开为两项，然后以m、n为标准分組，再提取公因式.

解法二

$$a(m+n)+bm+bn$$
$$=am+an+bm+bn$$
$$=(am+bm)+(an+bn)$$
$$=m(a+b)+n(a+b)$$
$$=(a+b)(m+n).$$

（5）**思考方法一** 将前两项分为一組，后两项分为一組，因它们都含有$x+3$的因式，故可以提取.

解法一

$$x^3+3x^2+3x+9$$
$$=(x^3+3x^2)+(3x+9)$$
$$=x^2(x+3)+3(x+3)$$
$$=(x+3)(x^2+3).$$

思考方法二 将一、三項分为一組，二、四项分为一組，因它们都含有x^2+3的因式，故可提取.

解法二

$$x^3+3x^2+3x+9$$
$$=(x^3+3x)+(3x^2+9)$$

$$=x(x^2+3)+3(x^2+3)$$
$$=(x^2+3)(x+3).$$

(6)**解法一**

$$x^2-xy-2x+2y$$
$$=(x^2-xy)-(2x-2y)$$
$$=x(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x-2).$$

解法二

$$x^2-xy-2x+2y$$
$$=(x^2-2x)-(xy-2y)$$
$$=x(x-2)-y(x-2)$$
$$=(x-2)(x-y).$$

方法簡評　本題内有六个小題，每小題都举了两个解法，这两个解法且都是分組法，即将原式分为两組或三組，再通过提取公因式解得的，其中都以解法一稍为簡单。

2　将下列各題分解因式：

（1）$ax^2-bx^2+bx-ax+a-b$；

（2）$x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc$；

（3）$ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$。

(1)**思考方法一**　这个因式就x^2、x和常数項来说各有两項，就a、b来说各有三項，如果用x^2、x和常数項为标准来分，則就可分为三組。

解法一

$$ax^2-bx^2+bx-ax+a-b$$
$$=(ax^2-bx^2)+(bx-ax)+(a-b)$$
$$=x^2(a-b)+x(b-a)+(a-b)$$

$$=x^2(a-b)-x(a-b)+(a-b)$$
$$=(a-b)(x^2-x+1).$$

思考方法二 如果用a和b作标准来分，則又可分为另外两組。

解法二

$$ax^2-bx^2+bx-ax+a-b$$
$$=(ax^2-ax+a)-(bx^2-bx+b)$$
$$=a(x^2-x+1)-b(x^2-x+1)$$
$$=(x^2-x+1)(a-b).$$

(2)**思考方法一** 这个因式共有八項，其中含a的有四項，不含a的也有四項，因此可以用含a的項和不含a的項作标准，把原式分为两組.

解法一

$$x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc$$
$$=(x^3+bx^2+cx^2+bcx)+(ax^2+abx+acx+abc)$$
$$=x(x^2+bx+cx+bc)+a(x^2+bx+cx+bc)$$
$$=(x^2+bx+cx+bc)(x+a)$$
$$=[(x^2+bx)+(cx+bc)](x+a)$$
$$=[x(x+b)+c(x+b)](x+a)$$
$$=(x+b)(x+c)(x+a).$$

思考方法二 又可以用x^2、bx、cx和bc作标准，将原式分为四組，把bx^2、cx^2分别分在bx和cx的一組里，而不分在x^2的一組里．把bcx分在bc的一組里，而不分在bx或cx的一組里.

解法二

$$x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc$$

$$=(x^3+ax^2)+(bx^2+abx)+(cx^2+acx)+(bcx+abc)$$

$$=x^2(x+a)+bx(x+a)+cx(x+a)+bc(x+a)$$

$$=(x+a)(x^2+bx+cx+bc)$$

$$=(x+a)[(x^2+bx)+(cx+bc)]$$

$$=(x+a)[x(x+b)+c(x+b)]$$

$$=(x+a)(x+b)(x+c).$$

思考方法三（四） 由解法二可以看出：分解此题的关键是以$x^3+ax^2=x^2(x+a)$为标准，如此还有类似二法。

解法三

$$x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc$$

$$=(x^3+bx^2)+(ax^2+abx)+(cx^2+bcx)+(acx+abc)$$

$$=x^2(x+b)+ax(x+b)+cx(x+b)+ac(x+b)$$

$$=(x+b)(x^2+ax+cx+ac)$$

$$=(x+b)[(x^2+cx)+(ax+ac)]$$

$$=(x+b)[x(x+c)+a(x+c)]$$

$$=(x+b)(x+c)(x+a).$$

解法四

$$x^3+ax^2+abx+bx^2+bcx+acx+cx^2+abc$$

$$=(x^3+cx^2)+(ax^2+acx)+(bx^2+bcx)+(abx+abc)$$

$$=x^2(x+c)+ax(x+c)+bx(x+c)+ab(x+c)$$

$$=(x+c)(x^2+ax+bx+ab)$$

$$=(x+c)[(x^2+ax)+(bx+ab)]$$

$$=(x+c)[x(x+a)+b(x+a)]$$

$$=(x+c)(x+a)(x+b).$$

（3）解法一

$$\begin{aligned}&ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd\\=&abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cb\\=&(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)\\=&ac(bc-ad)+bd(bc-ad)\\=&(bc-ad)(ac+bd).\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}&ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd\\=&abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd\\=&(abc^2+b^2cd)-(a^2cd+abd^2)\\=&bc(ac+bd)-ad(ac+bd)\\=&(ac+bd)(bc-ad).\end{aligned}$$

方法簡評　第一小題中所举的两个解法都是分組分解法，思考方法完全一样，其区别仅是解法一将原式分成三組，解法二将原式分成为两組，組数不同而已，步驟大体相同．第二小題中所举的四个解法也都是分組分解法，解法一是将原式分成两組，而后提取公因式分解的，方法較好，因为这个分組方法比較容易观察出来．解法二、三和四是将原式分成四組，而后提取公因式分解的，这三个解法实质是一样的：分組标准相同，步驟相同．第三小題中所举的两个解都是将原式首先展开为四項，而后分組提取公因式分解的，分組方法完全一样．

这些分組分解法都是常用的一般方法．

3　将下列各題分解因式：

（1）　$(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$；

（2）　$x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz$；

（3） $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.

（1）**思考方法一** 由簡乘公式我們知道，这个式子的第一、二項展开以后，$+2abxy$和$-2abxy$恰好相消，剩余的六項正好三項含x^2，三項含y^2. 所以可以用x^2和y^2作标准来分組分解。

解法一

$$
\begin{aligned}
&(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2\\
&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\
&\quad+c^2x^2+c^2y^2\\
&=(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2)\\
&=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)\\
&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$

思考方法二 原式一、二項展开，$+2abxy$和$-2abxy$相消以后，所剩余的六項各有两項分别含有a^2、b^2和c^2，所以也可以用a^2、b^2和c^2作标准来分組分解.

解法二

$$
\begin{aligned}
&(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2\\
&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+\\
&\quad b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2\\
&=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2y^2+c^2x^2\\
&=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)+\\
&\quad(c^2x^2+c^2y^2)\\
&=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+c^2(x^2+y^2)\\
&=(x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2).
\end{aligned}
$$

（2）**思考方法一** 因为讀者已会分解含有一个字母的二次三項式，在这个式子里共含有x、y、z三个字母，可以試着将它依照含有x的二次項、一次項和零次項来分为

三組进行分解。

解法一

$$
\begin{aligned}
& x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz \\
=& x^2-(6xy-4xz)+(9y^2-12yz+4z^2) \\
=& x^2-2x(3y-2z)+(3y-2z)^2 \\
=& [x-(3y-2z)]^2 \\
=& (x-3y+2z)^2.
\end{aligned}
$$

思考方法二 同样可以依照含有y的二次項、一次項和零次項来分为三組进行分解。

解法二

$$
\begin{aligned}
& x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz \\
=& 9y^2-(6xy+12yz)+(x^2+4xz+4z^2) \\
=& (3y)^2-2\cdot 3y(x+2z)+(x+2z)^2 \\
=& [3y-(x+2z)]^2 \\
=& (3y-x-2z)^2 \\
=& (x-3y+2z)^2.
\end{aligned}
$$

思考方法三 还可以依照 z 的二次項、一次項和零次項分为三組进行分解。

解法三

$$
\begin{aligned}
& x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz \\
=& 4z^2+(4xz-12yz)+(x^2-6xy+9y^2) \\
=& (2z)^2+2\cdot 2z(x-3y)+(x-3y)^2 \\
=& [2z+(x-3y)]^2 \\
=& (2z+x-3y)^2 \\
=& (x-3y+2z)^2.
\end{aligned}
$$

(3) **解法一**

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$

$$
\begin{aligned}
&= ab(a-b)+c[b(b-c)+a(c-a)] \\
&= ab(a-b)+c[b^2-bc+ac-a^2] \\
&= ab(a-b)+c[(b^2-a^2)-(bc-ac)] \\
&= ab(a-b)+c[(b-a)(b+a)-c(b-a)] \\
&= ab(a-b)+c(b-a)(b+a-c) \\
&= ab(a-b)-c(a-b)(b+a-c) \\
&= (a-b)[ab-c(b+a-c)] \\
&= (a-b)[ab-bc-ac+c^2] \\
&= (a-b)[(ab-bc)-(ac-c^2)] \\
&= (a-b)[b(a-c)-c(a-c)] \\
&= (a-b)(a-c)(b-c) .
\end{aligned}
$$

解法二

$$
\begin{aligned}
& ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a) \\
&= b[a(a-b)+c(b-c)]+ac(c-a) \\
&= b[a^2-ab+bc-c^2]+ac(c-a) \\
&= b[(a^2-c^2)-(ab-bc)]+ac(c-a) \\
&= b[(a+c)(a-c)-b(a-c)]-ac(a-c) \\
&= (a-c)\{b[(a+c)-b]-ac\} \\
&= (a-c)\{[ab+bc-b^2]-ac\} \\
&= (a-c)[ab+bc-b^2-ac] \\
&= (a-c)[(ab-b^2)-(ac-bc)] \\
&= (a-c)[b(a-b)-c(a-b)] \\
&= (a-c)(a-b)(b-c) .
\end{aligned}
$$

方法簡評　第一、二小題的解法都是分組分解法，只是分組的标准不同而已。第三小題所举的两个解法中，解法一是先在后两項中提取公因式，而后再展开，重新分組分解的，解法二是先在前两項中提取公因式，而后再展

开，重新分組分解的，运算过程基本一样．这些方法都是因式分解中常用的一般方法．

4　将下列各題分解因式：

（1）　$x^3+9x^2+26x+24$；

（2）　$x^3+6x^2+11x+6$；

（3）　$x^3+8x^2+19x+12$.

思考方法一　因$9x^2=3x^2+6x^2$，$26x=18x+8x$，故将$9x^2$和$26x$分别分裂为两項后，再与其它各项一起分組，就可提取出$x+3$的二项因式来．

解法一

$$
\begin{aligned}
& x^3+9x^2+26x+24 \\
=\ & x^3+\dot{3}x^2+\dot{6}x^2+1\dot{8}x+\dot{8}x+24 \\
=\ & (x^3+3x^2)+(6x^2+18x)+(8x+24) \\
=\ & x^2(x+3)+6x(x+3)+8(x+3) \\
=\ & (x+3)(x^2+6x+8) \\
=\ & (x+3)(x+2)(x+4).
\end{aligned}
$$

思考方法二　因$9x^2=2x^2+7x^2$，$26x=14x+12x$，故可将$9x^2$和$26x$按照这个标准分别分裂为两項后，再与其它各項一起分組，就可提取出$x+2$的二项因式来．

解法二

$$
\begin{aligned}
& x^3+9x^2+26x+24 \\
=\ & x^3+\dot{2}x^2+\dot{7}x^2+1\dot{4}x+1\dot{2}x+24 \\
=\ & (x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24) \\
=\ & x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2) \\
=\ & (x+2)(x^2+7x+12) \\
=\ & (x+2)(x+3)(x+4).
\end{aligned}
$$

思考方法三　又因$9x^2=4x^2+5x^2$，$26x=20x+6x$，故也可将$9x^2$和$26x$按此标准分别分裂为两项后，再与其它各项一起分組，提取出$x+4$的二項因式来。

解法三

$$x^3+9x^2+26x+24$$
$$=x^3+4x^2+5x^2+20x+6x+24$$
$$=(x^3+4x^2)+(5x^2+20x)+(6x+24)$$
$$=x^2(x+4)+5x(x+4)+6(x+4)$$
$$=(x+4)(x^2+5x+6)$$
$$=(x+4)(x+3)(x+2).$$

〔注意〕　欲分裂某項时，分裂的标准应該是：分裂后的項和其它未分裂的項一起分組后，一定要有公因式可提取，否則分裂某項将无意义。

解法四　因为24的因数是：±1、±2、±3、±4、±6、±12、±24．由綜合除法試除，即得：

$$\begin{array}{rrrr|r|r}
1 & +9 & +26 & +24 & & -2 \\
 & -2 & -14 & -24 & & \\
\hline
1 & +7 & +12 & & 0 & -3 \\
 & -3 & -12 & & & \\
\hline
1 & +4 & 0 & & &
\end{array}$$

这里的末一項余数是0，也就是说$x+2$和$x+3$是原式的两个因式。

$$\therefore\quad x^3+9x^2+26x+24$$
$$=(x+2)(x+3)(x+4).$$

(2)解法一

$$x^3+6x^2+11x+6$$

$$=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$$

$$=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)$$

$$=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2+5x+6)$$

$$=(x+1)(x+2)(x+3).$$

解法二

$$x^3+6x^2+11x+6$$

$$=x^3+2x^2+4x^2+8x+3x+6$$

$$=(x^3+2x^2)+(4x^2+8x)+(3x+6)$$

$$=x^2(x+2)+4x(x+2)+3(x+2)$$

$$=(x+2)(x^2+4x+3)$$

$$=(x+2)(x+1)(x+3).$$

解法三

$$x^3+6x^2+11x+6$$

$$=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6$$

$$=(x^3+3x^2)+(3x^2+9x)+(2x+6)$$

$$=x^2(x+3)+3x(x+3)+2(x+3)$$

$$=(x+3)(x^2+3x+2)$$

$$=(x+3)(x+2)(x+1).$$

解法四 因为末项 6 的各因数是：±1、±2、±3、±6，由綜合除法試除，即得：

$$\begin{array}{rrrr|r|l}
1 & +6 & +11 & +6 & & -2 \\
 & -2 & -8 & -6 & & \\
\hline
1 & +4 & +3 & & 0 & -3 \\
 & -3 & -3 & & & \\
\hline
1 & +1 & 0 & & &
\end{array}$$