关于抛物型方程非线性边值问题

的一个数值解法

邹 继 高

第七研究院第七〇九研究所

一九八二年七月

关于抛物型方程非线性边值问题的一个数值解法

本文是对具有间断系数的抛物型方程的非线性边值问题提出一个迭代解法，并在某些条件下，证明其迭代法的收敛性与近似解为正的一个性质。

§1 问题的描述

在核反应堆热工分析中，通常需要在区域

$\Omega=\{(r,t):0<r<r_1 \cup r_1<r<R,\ t>0$，其中 r_1、R 为常数$\}$

内寻求 $T(r,t)$、$\emptyset(t)$满足

1. 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(r)\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)+q(r,t)=P(r)\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} \quad \cdots\cdots(1)$$

其中 $q(r,t)$ 为正的已知函数；$\lambda(r)$与 $P(r)$为大于零的分片常数，即

$$\lambda(r)=\begin{cases}\lambda_1, & \text{当 } 0<r<r_1; \\ \lambda_2, & \text{当 } r_1<r<R.\end{cases}$$

$$P(r)=\begin{cases}P_1, & \text{当 } 0<r<r_1; \\ P_2, & \text{当 } r_1<r<R.\end{cases}$$

2. 边界条件

$$T(r,t)\Big|_{t=0}=\phi(r) \qquad (0\leq r\leq R) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=0}=-\beta(t) \qquad (t\geq 0) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$T(r,t)\Big|_{r=R}=\varphi(\varnothing(t)) \qquad (t\geqslant 0) \qquad \cdots\cdots(4)$$

其中 $\psi(r)>0$，$\beta(t)\geqslant 0$ 为已知函数；$\varphi(\varnothing(t))$ 是关于变量 $\varnothing(t)(\varnothing(t)>0)$ 的非线性正函数，且 $\varphi(0)=0$，此处 $\varnothing(t)$ 满足

$$-\lambda_2\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=R}=\varnothing(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\varnothing(0)=c>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

3. 内部边界 $r=r_1$ 上连接条件

$$T(r,t)\Big|_{r=r_1-0}=T(r,t)\Big|_{r=r_1+0}$$

$$\lambda_1\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=r_1-0}=\lambda_2\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=r_1+0} \cdots(7)$$

注：对于区域 Ω 内具有多条间断线 $r=r_i$（$i=1,2,\cdots,n$）的情况并无实质上的困难。为简单计，我们只考虑 $n=1$ 的情况。

§2. 区域的剖分

2－1　对区域 Ω 进行剖分：离散变量 t，取充分小的步长 $\triangle t>0$；离散变量 r，在 $[0,r_1]$ 中，取步长 $\triangle r_1=\dfrac{r_1}{N_1}$；在 $[r_1,R]$ 中，取步长 $\triangle r_2=\dfrac{R-r_1}{N_2}$，其中 N_1 与 N_2 为充分大的正整数。令

$$t_i=i\triangle t \quad (i=0,1,2,\cdots\cdots)$$

$$r^{(k)}=\begin{cases}k\triangle t & (k=0,1,\cdots,N_1)\\ N_1\triangle r_1+(k-N_1)\triangle r_2 & (k=N_1+1,N_1+2,\cdots,N_1+N_2)\end{cases}$$

在实际计算中，往往是这样剖分的。但为了书写的方便，我们总假定

$\triangle r=\triangle r_1=\triangle r_2$（实际上可能并非如此）。因此往后的讨论总是假设

$$t_i=i\triangle t \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

$$r^{(k)}=k\triangle r \qquad (k=0,1,\cdots,N_1,\cdots,N)$$

其中$\triangle r=\frac{R}{N}$，$r^{(N_1)}=r_1$。下面所得出的结果也完全适用于前述的一般剖分法。

我们记$T(k,i)\equiv T(r^{(k)},t_i)$，$\varnothing(i)=\varnothing(t_i)$。并称点$(k,i)\equiv(r^{(k)},t_i)$（$k\neq 0,N_1,N;i>0$）为$\Omega$的内点，点$(N_1,i)$为连接点，$(0,i)$与$(N,i)$为边界点。

2－2　由式(2)与(6)分别算出$T(k,0)=\psi(r^{(k)})>0$（$k=0,1,\cdots,N$，下略）与$\varnothing(0)=c>0$，因此，不失一般性，可以假设$T(k,i-1)>0$与$\varnothing(i-1)>0$已算出，来描述$T(k,i)$与$\varnothing(i)$的计算格式。下面分两节来叙述，并从中证明$T(k,i)>0$与$\varnothing(i)>0$。

§3. $T(k,i)$的计算格式

本节基于$\varnothing(i)>0$已知，提出$T(k,i)$的计算格式，并证明$T(k,i)>0$。

3－1. $T(k,i)$的计算格式

对于内点，我们采用通常的四点隐式格式[1]，即利用下列差分公式：

$$\left.\frac{\partial^2T(r,t)}{\partial r^2}\right|_{(k,i)}=\frac{T(k+1,i)-2T(k,i)+T(k-1,i)}{\triangle r^2}$$

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{(k,i)}=\frac{T(k+1,i)-T(k-1,i)}{2\triangle r}$$

$$\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}\right|_{(k,i)} = \frac{T(k,i)-T(k,i-1)}{\triangle t}$$

离散方程(1)的变形：

$$\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\frac{q(r,t)}{\lambda(r)}=\frac{P(r)}{\lambda(r)}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

对于连接点与边界点利用向前或向后差分公式离散式(7)、(3)与(4)。经整理可得下列线性方程组：

$$\begin{cases} T(0,i)-T(1,i)=\triangle r\cdot\beta(t_i) \\ a_k T(k-1,i)+b_k T(k,i)+C_k T(k+1,i)=d_k \\ \qquad (k=1,2,\cdots,N-1) \\ T(N,i)=\varphi(\varnothing(i)) \end{cases} \quad \cdots\cdots (8)$$

其中

$$\begin{cases} a_{N_1}=\lambda_1, & b_{N_1}=-(\lambda_1+\lambda_2) \\ C_{N_1}=\lambda_2, & d_{N_1}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots (9)$$

以及当 $k\neq 0$, N_1, N 时

$$\begin{cases} a_k=1-\dfrac{1}{2k} \\ b_k=-\left[2+\dfrac{P(r(k))\triangle r^2}{\lambda(r(k))\triangle t}\right] \\ C_k=1+\dfrac{1}{2k} \\ d_k=-\left[\dfrac{\triangle r^2 q(r(k),t_i)}{\lambda(r(k))}+\dfrac{P(r(k))\triangle r^2}{\lambda(r(k))\triangle t}T(k,i-1)\right] \end{cases} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\lambda(r^{(k)})=\begin{cases}\lambda_1, & \text{当 } 0<k<N_1;\\ \lambda_2, & \text{当 } N_1<k<N。\end{cases}$$

$$P(r^{(k)})=\begin{cases}P_1, & \text{当 } 0<k<N_1;\\ P_2, & \text{当 } N_1<k<N。\end{cases}$$

由此直接验证立得

性质一：对于 $k=1,2,\cdots,N-1$ 成立：

1.
$$a_k+b_k=\begin{cases}-\lambda_2, & \text{当 } k=N_1;\\ -C_k-\dfrac{P(r^{(k)})\triangle r^2}{\lambda(r^{(k)})\triangle t}, & \text{当 } k\neq N_1。\end{cases}$$

2. $a_k>0$，$b_k<0$，$C_k>0$，$d_k\leqslant 0$，$a_k+b_k<0$。

从方程组(8)可得下列递推公式[1]

$$\begin{cases}T(k,i)=g_k-W_k T(k+1,i)\\ \quad (k=0,1,\cdots,N-1)\\ T(N,i)=\varphi(\varnothing(i))\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

其中：

$$g_0=\triangle r\cdot\beta(t_i), \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

$$W_0=-1 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

$$g_k=\frac{d_k-a_k g_{k-1}}{b_k-a_k W_{k-1}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

$$W_k=\frac{C_k}{b_k-a_k W_{k-1}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

这样一来，当 $\varnothing(i)>0$ 一经确定后，则由式(11)依次求出 $T(k,i)$ $(k=N,N-1,\cdots,1,0)$。因此，计算 $T(k,i)$ 与 $\varnothing(i)$ 的问题便归结为求 $\varnothing(i)$ 的问题。

3-2 $T(k,i)>0$的证明

引理一：不论$\triangle t>0$与$\triangle r>0$怎样选取，对于$k=1,2,\cdots,N-1$，总成立

$$-1<W_k<0$$

证：如果能证明$|W_k|<1$（$k=1,2,\cdots,N-1$），注意到由(13)有$W_0=-1$，则对任意固定的k，由性质·，当$0\leqslant W_{k-1}<1$时，可得$b_k-a_k W_{k-1}<0$；当$-1\leqslant W_{k-1}<0$时，可得

$$b_k-a_k W_{k-1}\leqslant b_k+a_k<0,$$

又$C_k>0$，由(15)知$W_k<0$。从而由$|W_k|<1$推得

$$-1<W_k<0.$$

因此剩下只需证明$|W_k|<1$。

首先用归纳法证明：对于$1\leqslant k<N_1$成立$|W_k|<1$。从(15)，注意到(13)与(10)有

$$\left|W_1\right|=\left|\frac{C_1}{b_1+a_1}\right|=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{P_1}{\lambda_1}\frac{\triangle r^2}{\triangle t}}<1$$

从而$|W_k|<1$对于$k=1$时成立。现假定$|W_k|<1$对于$k=k-1$成立时来推证$k=k$时亦成立。由(15)，由性质一有

$$\left|\frac{1}{W_k}\right|=\left|\frac{b_k-a_k W_{k-1}}{C_k}\right|\geqslant\frac{1}{C_k}\left|b_k-a_k W_{k-1}\right|$$
$$\geqslant\frac{1}{C_k}(|b_k|-|a_k||W_{k-1}|)$$
$$\geqslant\frac{1}{C_k}(|b_k|-|a_k|)=\frac{1}{C_k}(-b_k-a_k)$$

$$=\frac{1}{C_k}\left(C_k+\frac{P_1}{\lambda_1}\frac{\Delta r^2}{\Delta t}\right)>1$$

从而

$$|W_k|<1。$$

至此证明了对于 $1\leqslant k<N_1$ 成立 $|W_k|<1$。

现由 $|W_{N_1-1}|<1$，从(15)与(9)有

$$|W_{N_1}|=\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_1(1+W_{N_1-1})}<1$$

因此，可以仿照上述方法证明对于 $N_1\leqslant k<N$ 亦有 $|W_k|<1$．证毕。

推论一：对于 $k=1,2,\cdots,N-1$，有

$$\varphi_k>0$$

证：注意到性质一，由引理推知 $b_k-a_k W_{k-1}<0$ $(1\leqslant k<N)$，根据(12)有 $\varphi_0\geqslant 0$，从而推得 $d_1-a_1\varphi_0<0$，故由(14)有 $\varphi_1>0$。然后可用归纳法得证。

推论二：对于 $k=0,1,\cdots,N$，若 $\varnothing(i)>0$，则

$$T(k,i)>0$$

注意到(12)与(13)，由式(11)直接检验得证。

§4．$\varnothing(i)$的计算格式

本节叙述 $\varnothing(i)$ 应近似满足的方程，并证明 $\varnothing(i)>0$；然后提出近似计算 $\varnothing(i)$ 的迭代格式。

4－1．关于 $\varnothing(i)$ 的方程

取(5)的近似等式为

$$-\lambda_2 \frac{T(N,i)-T(N-1,i)}{\triangle r} = \varnothing(i) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

从式（11）

$$T(N,i)=\varphi(\varnothing(i))$$

$$T(N-1,i)=g_{N-1}-W_{N-1}\varphi(\varnothing(i))$$

将上述两式代入（16），经整理得

$$(1+W_{N-1})\varphi(\varnothing(i))-g_{N-1}+\frac{\triangle r}{\lambda_2}\varnothing(i)=0 \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

这是一个关于变量$\varnothing(i)$的非线性方程

令

$$F(y)\equiv(1+W_{N-1})\varphi(y)-g_{N-1}+\frac{\triangle r}{\lambda}y=0 \quad \cdots\cdots \quad (18)$$

其中$y\equiv\varnothing(i)$。

引理二：若$\frac{d\varphi(y)}{dy}\geqslant 0$，则$F(y)$为递增的连续函数，且$\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=+\infty$。

证：由引理一知　$-1<W_{N-1}<0$。从而

$$\frac{dF(y)}{dy}=(1+W_{N-1})\frac{d\varphi(y)}{dy}+\frac{\triangle r}{\lambda_2}>0$$

由此得证。

推论三：在引理二的条件下，若$\varphi(0)=0$，则$F(y)=0$有唯一的正解.（此正解即为所求的$\varnothing(i)>0$）。

4－2　$\varnothing(i)$的迭代算法

由于牛顿法对于初始值的选择过于苛刻，我们宁用区间分半法[2]去

近似求解$\varnothing(i)$，在推论三的条件下，提出如下

算法A：

1. 取$\varnothing^{(0)}(i)=\varnothing(i-1)$，从而可设$\varnothing^{(j)}(i)$已知，进而取

$$\varnothing^{(j+1)}(i)=\begin{cases}\varnothing^{(j)}(i)-\triangle\varnothing, & \text{当 } F(\varnothing^{(j)}(i))>0;\\ \varnothing^{(j)}(i)+\triangle\varnothing, & \text{当 } F(\varnothing^{(j)}(i))<0。\end{cases}$$

若$F(\varnothing^{(j)}(i))=0$，则$\varnothing(i)=\varnothing^{(j)}(i)$。

2. 若

$$F(\varnothing^{(j)}(i))\cdot F(\varnothing^{(j+1)}(i))<0$$

则$\triangle\varnothing$缩小一半仍记为$\triangle\varnothing$。

3. 直至$|\varnothing^{(N)}(i)-\varnothing^{(N+1)}(i)|<\varepsilon$为止。此时

$$\varnothing(i)\doteq\varnothing^{(N+1)}(i)\ 。$$

在这里：ε为给定的误差；$\triangle\varnothing>0$为迭代前给定的修改量，宜适当选择，我们在实际计算中，一般地取$\triangle\varnothing=\dfrac{\varnothing(0)}{10}$ 。

注：算法A与通常的区间分半法稍有不同，见算法A中的1，即可进行定向修改。这可以看成是查普雷金不等式〔3〕在微分方程离散化后的一个应用形式。

定理：在推论三的条件下，算法A是收敛的。

证：由引理二及其推论，$F(y)$是递增的连续函数，且有唯一正零点$\varnothing(i)$，以及当$F(y)>0$时有$y>\varnothing(i)$，当$F(y)<0$时有$y<\varnothing(i)$。而算法A的步骤首先是找出包含解$\varnothing(i)$的一个区间，然后用区间分半法去近似求解。因此，算法A是收敛的。

我们注意到：定理的条件过于苛刻，从证明中可以看出，只要假设

$F(y)$有唯一零点$\phi(i)$，以及当$y>\phi(i)$均有$F(y)>0$，当$y<\phi(i)$时有$F(y)<0$，则算法A仍然适用而且也是收敛的。

最后，在实际计算与写作过程中，曾得到雷晋干付教授与陈跃元同志的有益帮助，特此致谢。

参　考　文　献

〔1〕南京大学计算数学教研室编著《偏微分方程的数值解法》人民教育出版社　1979年

〔2〕冯康《数值方法》　国防工业出版社　1978年

〔3〕吴新谋《数学物理方程》第一册　科学出版社　1959年