SHUXUE DE CHUANGZAO

# 数学的创造

吴振奎
吴　旻　编著

上海教育出版社
SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE

SHUXUE DE CHUANGZAO

# 数学的创造

吴振奎
吴　旻　编著

上海教育出版社
SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目（C I P）数据

数学的创造／吴振奎，吴旻著．—上海：上海教育出版社，2003.6
ISBN 7-5320-8779-4

Ⅰ.数...　Ⅱ.①吴...②吴...　Ⅲ.数学—普及读物
Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第052199号

数学的创造
吴振奎　吴　旻　编著
上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行
易文网:www.ewen.cc
（上海永福路123号　邮编:200031）
各地新华书店经销　常熟新骅印刷厂印刷
开本 850×1156　1/32　印张 14.75　插页 4　字数 337,000
2003年6月第1版　2003年6月第1次印刷
印数 1－5,100本
ISBN 7-5320-8779-4/O·10　定价:25.00元

# 前　　言

数学家们的共同(思想)特点就是寻找各种关系,并由此去探索扩充某种思想的途径,这种扩充之一便是推广.

推广是从一个给定的对象集合进而去考虑包含这个集合的更广集合中情形的一种方法.(因而原来的对象只是这个更广对象的特殊情形,即特例.)

综观数学发展的全史,无不与推广有关.说得狭隘点,数学的发展正是由数学中某些概念的推广和由此而引发的新内容、新概念、新方法、新问题的出现而导致的(比如"数"概念的推广正是如此).

无论是初等数学学习,还是高等数学研究,人们总会遇到某些推广问题.试问:怎样去推广?这当然是大家关心的问题.与此同时,我们还应当把推广当作一种机会,一个手段,一次希望,以便证明某些新东西或推翻旧的结论(两种情况都会有所收获).

一位哲人曾说过,例子比定理更重要.而反例在数学中的地位尤甚.人们知道:要证明一个命题,需考虑全部情形和所有可能,而要推翻某个命题,只需举出一个反例.(这显然是对严谨数学中的不甚严谨结论的挑战.)

数学史上有许多著名的反例(多出自著名数学家之手),既深刻,又有趣,了解它们对数学学习同样会有好处.

数学中还有一类意味深邃的问题,即以尺规作图"三大难题"为代表的所谓不可能问题.人们在解决它们之前,往往是千百人(包括许多著名数学大师)倾注过大量心血而进展不大

或者毫无进展时,才从反面悟及它们的不可能性.然而这有时也是艰难的,因为有些问题貌似简单或可能.几何中尺规作图三大难题不可能性的彻底解决,花费了大约两千年的光景,当然,解决它们的同时也得到许多意想不到的"副产品"——新的概念出现了,新的数学分支诞生了(这远远超越了几何学范畴).

这本书讲的正是关于数学中的推广(作用、方法及某些例子)、反例和不可能问题.就其内容来讲它也是属于"方法论"范畴的(偶尔也涉及到数学史).

我们已经看到也即将还能看到,数学推广、反例等为我们发现数学、创造数学提供了很多难得的机会与线索,认识它,把握它,你也许就能有更新、更深、更高的数学创造.

笔者撰写本书是希望它对青年教师和学生能有所裨益,尽管书中的观点不尽成熟,书中的论题难免"挂一漏万".俗说"无知者无畏",这也正是笔者敢于推出它的"理由",但观点能否真的为大家认可则另当别论了.无论如何,仍然期待着读者朋友们的批评与指教.

吴振奎

1984年10月一稿

1985年10月二稿

# 重版小记

二十几年前，母亲走了，留给我极大悲哀．好在我还不老，有精力也有体力伏案解算题、做文章打发时光，寄托哀思．

眼下时过境迁，中年时代的魄力与锐气几乎荡然无存，岁月的磨难又留给我许多说不出的苦楚，所幸我还能思维、还在思维．

一个人的痛苦莫过于他不能从事他喜欢的事业、发挥他自认为的专长（当年做这些事竟被认为是不务“正业”的雕虫小技）；莫过于他道不清他的感受、因而无人能理解他．

我不甘心，因为这与我巨大的付出极不谐调，人们迟早会重新审视它，我曾坚信．

果然，台湾九章出版社孙文先先生又给了我一次机会，一片希望，趁机也对全书作了较大修订，但愿这一次不会使他失望．

上海教育出版社叶中豪先生的真诚支持与关爱，使得本书简体字本得以在内地推出，感激之情溢于言表．

还要谢谢张鸿林和叶中豪两位先生，谢谢他的帮助和劳动．

我怕，毕竟心老了．

吴振奎

2001 年清明节

# 目　录

# 引　　言*

刚刚过去的一个世纪，数学的发展可谓突飞猛进.一项项崭新的概念被提出；一个个划时代的成果被挖掘，这其中为适应数学发展而创立的新学科，几乎影响着全部数学乃至人类生活.模糊数学诞生的背景蕴含着计算机(确切地讲为人工智能)发展的需求，但它的出现却使得家电产品引发一场革命；分形理论的创立，原本是想从大千世界中奇形怪状、扑朔迷离的纷杂事件里找出其隐蔽的内在规律，如今，其研究已遍及诸多科学技术领域.

加之诸如集合论、解析数论(比如费马(Fermat)大定理的获证)、群论、拓扑学、……等等学科的发展，使得数学乃至整个科学世界面貌为之一新.

20世纪前50年科学在向纵深发展之际，使得分支越来越多、越来越细，有离开学科原始意图和领域之嫌，也威胁着数学自身的统一；而后半世纪，则是学科互相渗透、彼此结合的交叉协同发展，使数学成为一个不同分割的有机整体(这是因数学自身的特性使然).

试想：数学中某些貌似风马牛不相及分支学科的诞生、发展过程有无内在渊源？它又能给人们何种启示以及怎样给人们的启示？我们还是先来看几个事实(当然这儿述及的仅是冰山一角，但也只能管中窥豹).

---

* 本文以“分(碎)形的思考”为题，发表在《数学传播》(季刊)27卷第2期.

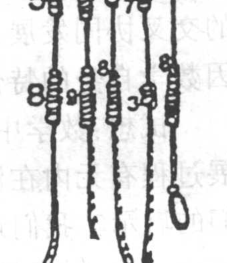
# 1.数的扩充

人们对于数的认识经历了漫长的历程.

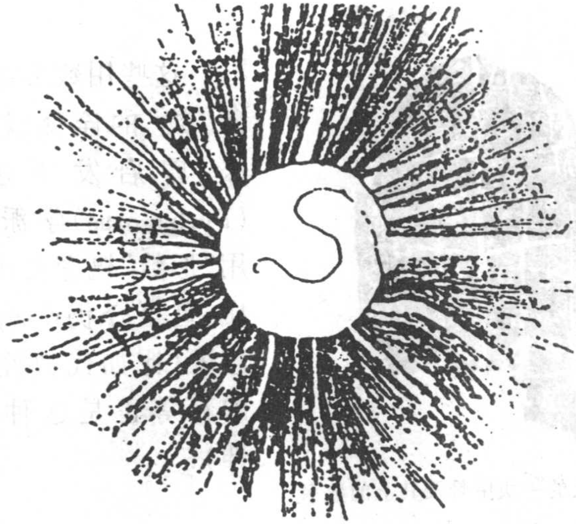
我国甲骨文中的“数”字,左边是打结的绳,右边是一只手,表示古人用结绳记数

文字产生之前的远古时期,数概念已经形成,当时人们用实物(石子、树棍、竹片、贝壳等)表示数,此外还用绳结记数,我国古籍《易经》上就有结绳记数的记载(上古结绳而治,后世圣人,易之以书契)[1],在国外亦然(如南美印加人及秘鲁、希腊、波斯、日本等均有实物或记载).


西班牙描绘的秘鲁人结绳

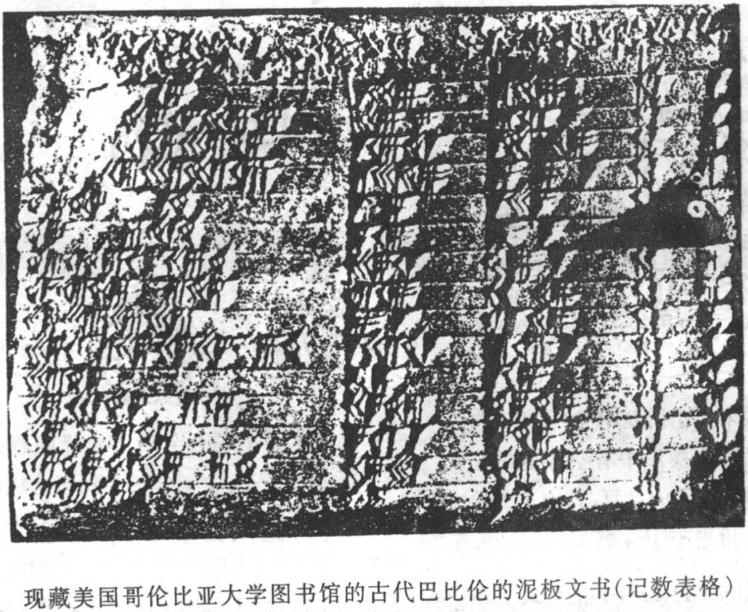



现藏美国自然史搏物馆的印加记数基谱



藏于巴黎人类博物馆的秘鲁印第安人绳法

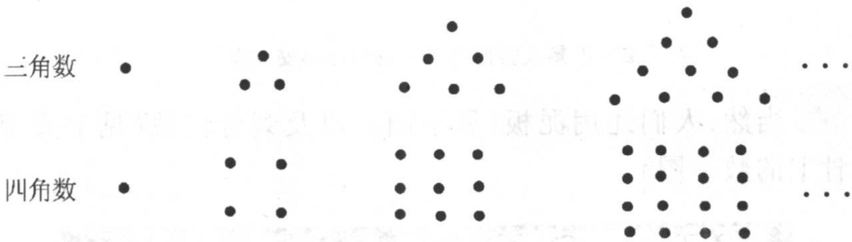
当然，人们还用泥板（见下图）、以及刻骨记数（见下页甲骨上的数字图）.

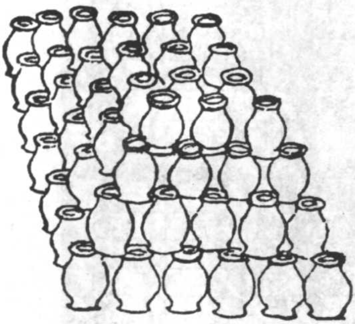


现藏美国哥伦比亚大学图书馆的古代巴比伦的泥板文书（记数表格）

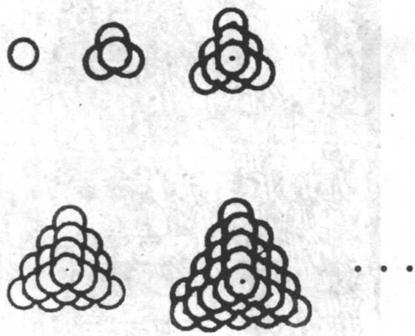
我国出土的一块甲骨及其上的数字

这些用数形结合去对抽象“数”的诠释或描述的做法，曾启发毕达哥拉斯(Pythagoras)学派的学者们用“形数”概念去研究数的性质，且至今仍影响着人类的思维(比如代数性质的几何解释等正是这种思维的延伸).



我国宋代沈括发明“隙积术”，考虑了平头楔形中有空隙的酒坛堆垛问题等的计算，其中正方垛给出相当于 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的公式

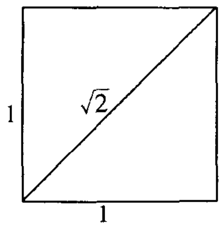


我国元代朱世杰精心分析了堆垛问题，给出底层每边由 $1\sim n$ 个 $n$ 只三角垛集合成的“撒星形”积垛，相当于今天的计算公式 $S=1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left[1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$

由于分配(当一件或几件物品多人去分时)而引出了“分数”概念,它的出现是数学史上令人振奋的一件大事.

古埃及人就研究过分子是1的分数(单位分数)的诸多性质,后人称之为埃及分数.

分数在我国出现的年代不详,但在不少古籍如《管子》、《墨子》等书中均已有记载.




无理数的发现曾付出过沉重的代价.古希腊毕达哥拉斯学派的学者们一致认为,数皆可表为两整数比的形式(即分数或有理数).但学派成员希皮亚斯(Hippias)却发现了边长为1的正方形(单位正方形)其对角线长无法用分数表达.他的发现不仅没能得到学派的褒奖那怕认可,反而招来杀身之祸(据传他被抛入大海葬身鱼腹).然而无理数最终还是未能被封杀.

这类无理数的发现加之随后的负数概念引入,人们完成了对于数的一个阶段性认识:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数(自然数,0,负整数)}\\ \text{分数(正、负分数)}\end{cases}\\ \text{无理数(无限循环小数)}\end{cases}$$

如今人们对数的认识在不断扩张(幂指数扩张亦然)[2]:

自然数 ⟶ 分数 ⟶ 无理数 ⟶ 实数 ⟶ 复数 ⟶

(有理数)　代数数　超越数

(负数引入)　整数

多元数 ┈→ 向量 ┈→ 矩阵 ┈→ 张量 ┈→ …

(它们不是数,但可运算)

## 2.分数阶积分与微分

微积分的发明是数学史上最重要的事件之一.

我们通常遇到的求函数微分、积分时，微分的阶数、积分的重数皆为整数，如 3 阶导数(3 次微分)、2 重积分等等. 在它们出现不久，法国数学家刘维尔(J. Liouville)等人已开始着手将微、积分阶数(重数)推广到分数情形的工作[14].

若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，设 $I_1^a f(x)$为 $f(x)$在$[a,x]$上的积分，而算子 $I_\alpha^a f(x)$为 $I_{\alpha-1}^a f(x)$在$[a,x]$上的积分，$\alpha=2,3,\cdots$，则

$$I_\alpha^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t, a \leqslant x \leqslant b, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$是 $\Gamma$ 函数.

(1)式定义了 $f(x)$以 $a$ 为始点的$\alpha$ 阶(分数阶)积分，这是刘维尔据黎曼(B. Riemann)积分于 1832 年给出的，又称黎曼 - 刘维尔(Riemann-Liouvill)积分. 它又被称为第一类欧拉(L. Euler)变换. 它有性质

$$I_0 f(x)=f(x), \quad I_\alpha(af(x)+bg(x))=\alpha I_\alpha f(x)+bI_\alpha g(x),$$

其中 $a,b\in\mathbf{C}$.

顺便提一下，有时柯西(A. L. Cauchy)公式：

$$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^x}_{n\text{重}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{(t-\tau l)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

当重数 $n$ 推广到非整数时也用来定义分数阶积分.

对于复参数 $z$，算子 $I_z^a$ 曾被黎曼于 1847 年研究过，且该算子是线性的且有半群性质：

$$I_\alpha^a[I_\beta^a f(x)] = I_{\alpha+\beta}^a f(x).$$

由此，分数阶积分的逆运算分数阶微分也被定义：

若 $I_\alpha f=F$，则 $f$ 为 $F$ 的$\alpha$ 阶分数阶导数.

马尔采特(Marchaut)在 $0<\alpha<1$ 时给出分式：

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \left\{\frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}}\right\}\mathrm{d}t.$$

1832 年刘维尔特别研究了算子 $I_{\alpha}^{-\infty}=I_{\alpha}$, $\alpha>0$:

$$I_{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

1917 年外尔(H. Weyl)对有 $2\pi$ 为周期,且在周期上是零均值的函数:

$$f(x)\sim\sum_{|n|>0}c_{n}e^{inx}=\sum{}'c_{n}e^{inx},$$

定义 $f$ 的 $\alpha(\alpha>0)$ 阶外尔积分:

$$f_{\alpha}(x)\sim\sum{}'\frac{c_{n}e^{inx}}{(in)^{\alpha}},\tag{2}$$

及 $f$ 的 $\beta(\beta>0)$ 阶导数 $f^{\beta}$:

$$f^{\beta}(x)=\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}f_{n-\beta}(x),\tag{3}$$

这里 $n=\lfloor\beta\rfloor$,即 $\beta$ 下取整,亦即大于 $\beta$ 的最小整数.

在广义函数论中周期广义函数 $f\sim\sum'c_{n}e^{inx}$ 的分数阶积分 $I_{\alpha}f=f_{\alpha}$ 的运算仿(2)且对一切 $\alpha\in\mathbf{R}$ 实现.

此后,里斯(M. Riesz)又将分数阶积分推广到 $n$ 维空间 $X\subset\mathbf{R}^{n}$ 中,且称该积分为里斯位势型积分.

$$R_{\alpha}f(x)=\pi^{\alpha-\frac{2}{n}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_{X}\frac{f(x)}{|x-t|^{n-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

而 $R_{\alpha}$ 的逆运算称为 $\alpha$ 阶里斯导数.

至此,微分、积分阶数已由整数推广到了实数情形(包括 $n$ 维空间里的微分、积分).

## 3.连续统假设

集合论(用公理化或朴素的直观方法研究集合性质的数学分支)是关于无穷集合和超穷数的数学理论,它的出现是现代数学诞生的一个重要标志.

由于数学分析的研究需要,高斯(C. F. Gauss)、傅立叶(J.

B.J.Fourier)等大师们的工作为集合论产生做了大量铺垫.

1870 年德国数学家海涅(H.E.Heine)证明了:

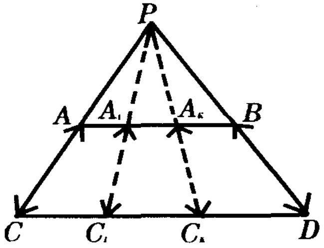
若 $f(x)$ 连续,且其三角级数展式一致收敛,则展式唯一.

接着他又问道:当 $f(x)$ 有无穷个间断点时,上述唯一性能否成立?

德国数学家康托尔(G.Cantor)正是研究此问题时萌发了创立了集合论的思想,集合论是以 1874 年康托尔发表《关于一切代数实数的一个性质》一文为标志诞生的.文中康托以"一一对应"的关系,提出集合相等(等势)与否的概念,且提出可数、集合基数(或势)等概念.

1877 年康托尔在写给狄德尔(Dieuder)的信中提出:

$n$ 维空间的点集同实直线上的点集一一对应(等势).

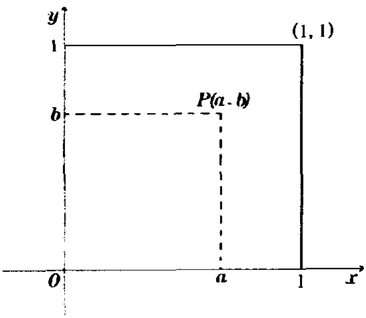



从一一对应观点看,$AB$ 与 $CD$ 上点个数一样多

此外,他还证明了:(1)区间 $[a,b]$ 上的点不可数;(2)超越数比代数数多.

1879 年 ~ 1884 年康托尔发表了《关于无穷的线性点集论》六篇论文,提出超穷数概念:

$$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots$$




将单位正方形内任一点 $P(a,b)$ 中 $a,b$ 分别写成无限小数 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$,则 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ 对应 $[0,1]$ 上一点,这样单位正方形内点的个数与线段 $[0,1]$ 上点个数一样多(方法可推广至 $n$ 维空间)

($\aleph_0$ 是自然数的个数,$\aleph_1$ 是大于$\aleph_0$ 的最小基数,$\aleph_2$ 是大于$\aleph_1$ 的最小基数等等)

1891 年康托尔在《集合论的一个根本问题》中引入幂集(集合子集全体所构成的集),且指出幂集的基数(或势)大于原集合的基数,同时构造了基数一个比一个大的无穷,进尔又提出:

(1)实数不可数(设其基数或势为 $c$).

(2)定义在区间[0,1]上实函数集的基数(或势)为 $f$,则 $f > c$.

这样,若自然数全体的基数为$\aleph_0$,则其幂集的基数 $2^{\aleph_0} = c$,且 $2^c = f$.

康托尔做出如下假设:$c = \aleph_1$(即可数基数$\aleph_0$ 后面紧接着便是实数基 $c$,换言之$\aleph_0$ 与 $c$ 之间无其他集合的基数或者势存在),它被称为连续统假设(简记 CH).

| 集　合 | 基　数(或势) |
|---|---|
| 1,2,3,4,5,… 或 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ | $\aleph_0$ (整数或有理数个数) |
|  … | $\aleph_1$ (线,面,体上几何点个数) |
|  … | $\aleph_2$ (所有几何曲线或定义在某区间上的全部函数的基数) |

1900 年 CH 也被希尔伯特(D. Hilbert)列入"未解决的 23 个问题"中的第一个.直至 1963 年,才由美国数学家科恩(P. Cohen)证明它不能用世所公认的策墨罗(E. F. F. Zermelo)公理体系(ZF)证明其对错(CH 在 ZF 系统是不可证明的).

正像欧几里得(Euclid)几何体系中由第五公设而引发的

非欧几何的诞生后，在认可的相容性前提下，该公设是独立(不可证明)的一样.

试想当初人们对康托尔推出集合论时的非难情形，一切皆随时间的推移和数学的进展而烟消云散.

希尔伯特认为集合论的产生是“数学思想最惊人的产物，是纯粹理性范畴中人类活动的最美表现之一.”

哲人罗素(B.A.W.Russell)也称康托尔的工作“可能是这个时代所能夸耀的最宏大工作”.

## 4.模糊数学的产生

经典集合论中确定某元素是否属于某集合时用“是”或“非”表示，即可用1或0数值去描述.

然而现实生活中诸多事物往往无法用简单的是或非去回答，比如高个子、胖子等概念，当你去判断某人是否是高个子时，是或非的简单回答显然是不准确的，原因是“高个子”概念本身不是确切的，换言之它是一个“模糊”概念.比如规定180cm以上身高的人为高个子，那么对于身高是179cm的人来讲，说他不是“高个子”显然过于粗糙或武断.此外，不同地点，不同场合下“高个子”概念也会随之变化.

运算速度可达每秒数千亿次的计算机在某些方面(甚至是顶简单的，比如让它去区分某人是中国人还是外国人这样连幼儿园小朋友都会的问题)不如人的原因，就是计算机只使用了“0”或“1”这两个数值去生硬地刻画、描述原本多彩的现实世界的结果(因而过于死板).

1965年美国加州伯克莱分校的计算机教授扎登(L.A.Zaden)发表了《模糊集合》一文，引入“隶属度”来描述处于中介过渡的事物对差异一面所具有的倾向性程度，从亦此亦彼中区分出非此非彼的信息，是精确性对模糊性的一种逼近.它