

# 线性代数基础

A. H. 馬力茨夫著  
柯 召 譯



人民教育出版社

# 线 性 代 数 基 础

修 訂 本

A. И. 馬力茨夫著

柯 召 譯

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立科学技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的馬力茨夫 (А. И. Мальцев) 著“綫性代数基础” (Основы линейной алгебры) 1948 年版译出。现根据原书 1956 年 (第二版修订本) 修订。原书经苏联高等教育部审定为综合大学数学力学系及数理系的教学参考书。可作为我国大学数学专业、力学专业和高等师范学校数学系高等代数课程教学的主要参考书。

## 綫性代数基础

A. И. 馬力茨夫著

柯昌译

北京市书刊出版业营业登记证字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上海大众文化印刷厂印装

新华书店 上海发行所发行

各地新华书店 经售

---

统一书号 K13019·328 开本 850×1168 1/32 印张 10 11/16  
字数 272,000\* 印数 43,201—44,700 定价 (6) 1.00

1957 年 7 月新 1 版 1959 年 4 月新 2 版(修订本)

1964 年 9 月上海第 12 次印刷

## 第二版原序

本書的这一版和 1948 年發行的第一版有显著的不同。主要的改动是由于我們想使得这本书在大学和师范学院中學習綫性代数的各部分时用来作为教科書能够更为适合。

因此，我們对于若唐法式不采取純几何的推理而只应用代数的方法，这就使得我們的叙述縮短而且刪去了关于若唐法式的这一章。

在第一版中，关于二次型和双綫性型問題是分散在几章內討論的，現在把它们抽出集合到一章里面来。此外，对于  $U$  空間理論中一些較特殊問題的詳細叙述只把它们的結果写到几处例題和習題中去。这就使得我們能够减少篇幅和把材料分配到較少的几章中而并不損害到叙述的明显性。

这样紧縮后可以不增加本書以前的篇幅而添述关于多重綫性型和張量的新的一大章，詳細的处理了張量代数的基本問題，因此，亦就增加了一些習題。

利用这个机会，謹向 A. Г. 庫洛什和莫斯科大学代数教研組的成員在教研組會議上对本書的討論以及对于第一版和在新版的准备工作中对作者提出意見的所有同志表示衷心的感謝。

A. И. 馬力茨夫

# 目 录

## 第二版原序

第一章 矩陣	1
§ 1. 矩陣運算	1
1. 線性代數的論題 2. 基域 3. 矩陣 4. 矩陣與數的乘法,二矩陣的加法 5. 矩陣的乘法 6. 矩陣的乘幂 7. 方陣多項式 8. 轉置矩陣	
§ 2. 特征多項式與最小多項式	16
9. 相似 10. 特征多項式 11. 赫密登-凱萊定理 12. 最小多項式	
§ 3. 分塊矩陣	23
13. 分塊矩陣的運算 14. 對角形分塊方陣 15. 準可裂方陣	
第二章 線性空間	29
§ 1. 定義及其簡單性質	29
16. 公理 17. 零向量與負向量 18. 線性組合 19. 線性空間的例子	
§ 2. 雜數	34
20. 線性關係 21. 有限維空間 22. 行空間的雜數 23. 同構	
§ 3. 坐標	44
24. 坐標行 25. 坐標的變換 26. 逆變換	
§ 4. 線性子空間	49
27. 子空間的構成 28. 子空間的交與和 29. 直接和	
第三章 線性變換	58
§ 1. 任意集合的變換	58
30. 變換的乘積 31. 么變換與逆變換 32. 一一對應的變換 33. 置換	
§ 2. 線性變換與其矩陣	65
34. 簡單性質 35. 線性變換的矩陣 36. 坐標的變換	
§ 3. 線性變換的運算	71
37. 線性變換的乘法 38. 加法和對於數的乘法 39. 線性變換的多項式	
§ 4. 線性變換的秩與階	77
40. 核與零核 41. 降秩與滿秩變換 42. 變換的矩陣之秩	
§ 5. 不變子空間	83
43. 導出變換 44. 不變子空間的直接和 45. 變換的特徵多項式 46. 特徵	

向量与特征根	
§ 6. 有法型矩阵的变换	91
47. 对角形 48. 若唐块 49. 根子空间	
<b>第四章 多项式矩阵</b>	<b>98</b>
§ 1. 不变因子	98
50. 相抵 51. 对角形 52. 子式的最大公因式 53. 相抵的条件	
§ 2. 初级因子	110
54. 与不变因子的关系 55. 可裂矩阵的初级因子	
§ 3. 线性变换的法式矩阵	114
56. $\lambda$ 矩阵的除法 57. 纯相抵性 58. 相似矩阵 59. 若唐法式 60. 自然法式 61. 其他法式	
§ 4. 矩阵函数	128
62. 若唐矩阵多项式 63. 纯函数 64. 函数值的多项式表示 65. 函数的初级因子 66. 级数 67. 和已给矩阵可易的矩阵 68. 与“对某一矩阵可易的全部矩阵”可易的矩阵	
<b>第五章 <math>U</math> 空间与欧几里得空间</b>	<b>147</b>
§ 1. $U$ 空间	147
69. 公理和例子 70. 向量之长 71. 正交组 72. 同构 73. 正交和, 射影	
§ 2. 关联变换	162
74. 线性函数 75. 关联变换 76. 规范变换	
§ 3. $U$ 变换与对称变换	173
77. $U$ 变换 78. $U$ 相抵 79. $U$ 变换的矩阵的法式 80. 对称变换 81. 反对称变换 82. 非负的对称变换	
§ 4. 一般变换的分解	189
83. 分解为对称与反对称部分的分解式 84. 极分解式 85. 凯莱变换 86. 谱分解*	
<b>第六章 二次型和双线性型</b>	<b>204</b>
§ 1. 双线性型	204
87. 型的变换 88. 双线性型的相抵性 89. 对称双线性型的相合性	
§ 2. 二次型	212
90. 相合性 91. 拉格兰日演段 92. 二次型的惯性定律 93. 恒定型	
§ 3. 型耦	222
94. 型耦的相抵性 95. 型耦的相合性 96. 非对称双线性型的相合性	
§ 4. 双线性函数	229
97. 基本定义 98. 有双线性度量的空间 99. 双线性度量空间中双线性函数	

<b>第七章 双綫性度量空間的綫性變換</b>	244
§ 1. 綫性變換的基本類型	244
100. 自同構 101. 對稱的和反對稱的變換	
§ 2. 复歐几里得空間	251
102. 對稱變換 103. 反對稱變換 104. 复正交變換	
§ 3. 耦對空間	260
105. 對稱變換 106. 反對稱變換 107. 耦對變換	
§ 4. 准 $U$ 空間	266
108. 對稱變換 109. 准 $U$ 變換	
<b>第八章 多重綫性函數。張量</b>	277
§ 1. 一般定義	277
110. 關聯空間 111. 多重綫性函數 112. 張量	
§ 2. 張量代數	287
113. 張量的加法和乘法 114. 張量的收縮 115. 指標的升高和降低	
§ 3. 外代數	294
116. 對稱張量 117. 反對稱張量 118. 多重重向量 119. 線性空間和 $p$ 向量	
120. 對偶性. $p$ 型	
§ 4. 不变量	312
121. 不变式 122. 不变式的一般定義 123. 整不变式 124. 相对張量	
125. 有理不变式 126. 不变式特征	
<b>文献索引</b>	334

# 第一章 矩陣

## § 1. 矩陣运算

1. 線性代數的論題 線性代數中所研究的有三种东西：矩陣，線性空間和代數型。这些东西的理論相互間的关联是这样的密切，使得線性代數的大部分問題在这三种理論的每一种中都有等价的說法。和实际計算結合得最多的是矩陣的觀點，所以在本書中我們主要从矩陣來叙述。另一方面，在几何和力学中有很多線性代數的問題，提出了关于代數型的問題，而要在線性代數的各种問題中很明确的了解它們的內在联系，就須討論線性空間。所以熟練从一种理論的叙述轉移到另一种去，是在學習線性代數时要养成的一种重要的習慣。

从型論来看，線性代數的內容很自然的分做三个部分——線性型論，双線性型和二次型論以及多重線性型論。严格的說，線性代數一般是討論線性型，双線性型理論和有張量代數形式的多重線性型的基本理論。多重線性型論中更細致的問題已經是屬於不变量論的論題，我們不把它們放在本書里面。

線性代數这个数学分支和数学一样的古老。解線性方程  $ax+b=0$  这个問題可以作为線性代數的原始問題。虽然这个問題并沒有什么困难，但是用来解出这个問題的原理，亦即線性函数  $y=ax+b$  的对应性質是全部線性代數的想法和方法的原始标本。例如，关于解出有許多未知量的線性方程組的討論，有这样的想法作为其基础，即把这个方程組逐步的换成像所指出的这种有最簡單形狀的方程組。

在創立了解析几何之后，線性方程組的重要性更加显得突出，关于

空间中平面和直线的位置的所有基本问题都可以化做线性方程组来研究。对于含有  $n$  个未知量和  $n$  个方程的线性方程组一般解的公式的研究，已在十八世纪由莱布尼茨和克莱姆引进了行列式的概念。十九世纪中，除代数和解析几何外，在奥斯特罗格勒达斯基，耶可比（函数行列式），伏龙斯基和其他一些人的工作中，行列式已经渗入到分析中去。和这相平行的，用变量的线性替代对二次型的变换问题，在解析几何，数论中特别是在理论力学中都很重要。这一个问题对罗巴切夫斯基和黎曼的几何工作也是中心问题之一，因而引起创立关于多维空间包含线性多维空间（格拉斯曼）的研究。在过去这一世纪中，结合不可易代数（赫密登）的研究在凯莱和薛尔凡斯透的工作中引进了矩阵的研究，对线性代数的进一步发展占有一个重要地位。到十九世纪末尾，建立起矩阵计算的一些重要分支的研究：关于线性变换的矩阵的法式（若唐），初级因子（伐爱尔斯脱拉斯），安密达型（安密达）。多维空间微分几何和高次代数型变换理论的发展在十九世纪末创立了张量分析。相对论就是在这个胜利的基础上建立起来的。

在本世纪中，线性代数获得进一步的发展，如在代数内部，由于应用群和不可换环的概念，线性代数的基本概念得到新的充实和合用，而在分析中是由于用到了无限维函数空间。应用这些空间的理论到量子力学上更加刺激了这一理论的发展，建立了近代泛函分析的一个重要部分。

**2. 基域** 上面已经说过，线性代数所研究的基本东西是矩阵，线性空间和代数型，也就是含有若干未知量的齐次多项式。在确定这些东西的每一种时，都和数的事先选定的某一个集合  $K$  有关，集合  $K$  的实际选定对所讨论的问题和科学规律发生关系。例如，从代数的观点，如果选取全部复数作为  $K$ ，那末我们的结果常常可以得出最完善的公式。相反的，在几何或力学中，常常是基本上只需要讨论实数。对于数论有时只要取有理数集合作为我们的  $K$ 。所以，为了使得得出来的结

果尽可能的应用到更广泛范围内的問題，对于选做  $K$  的这个数的集合，事先不給它定死。我們只假定  $K$  是一个域，也就是說  $K$  中任何二数的和，差，积，商都仍然含在  $K$  里面。但在讀者只对物理学或几何学中綫性代数的应用有兴趣时，以后如果沒有特別声明，都可以把  $K$  了解成全部实数集合或全部复数集合。

不一定考慮数域来作为  $K$ ，而可以取任意域作为  $K$ ，而且有时还可以取不可換域。在理論的很多部份中，域  $K$  的任意性，对定理的叙述或証明都无影响，但对于  $K$  是不可換域这种情形，需要特別审慎。因此，在以后如果沒有相反的声明，我們都取在意域作为  $K$ ，叫做基域。用小写希腊字母  $\alpha, \beta, \dots, \tau$  做为它的元素并且即使已經知道  $K$  不是数域，我們还是把它們一概叫做数。

**3. 矩陣** 取任意域  $K$  中  $m n$  个元素排成  $m$  行  $n$  列的一个長方陣形，叫做一个  $K$  上矩陣。在写出矩陣时，我們把这些元素按次序写在方括弧里面，或在这陣形的两边各加两条直線。这样， $m$  行  $n$  列矩陣写做

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdots \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

或

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdots \alpha_{mn} \end{array} \right|,$$

其中元素  $\alpha_{ij}$  在域  $K$  中。有时我們用縮写  $\|\alpha_{ij}\|$  或  $\|\alpha_{ij}\|_{m,n}$  来代替这种詳細的写法。

当矩陣的行数与列数相同时，叫做方陣，这个相同的行列数叫做方陣的阶。只有一行的矩陣叫做行矩陣。以后我們用大写拉丁字母  $A$ ，

$B, \dots$  来表示矩阵。

当且只当两个矩阵的行数相同, 列数相同, 而且对应行列中的所有数都相等时, 两个矩阵才能相等。因之两个  $m$  行  $n$  列的矩阵相等时, 它们的元素间有  $mn$  个等式存在。

**4. 矩阵与数的乘法, 二矩阵的加法** 矩阵的基本运算为矩阵间的加法、乘法以及矩阵与数的乘法。矩阵和数的乘法比较简单, 用数  $\alpha$  乘矩阵  $A$  或用矩阵  $A$  乘  $\alpha$  的积定义为把  $A$  中所有元素都乘上  $\alpha$  后所得出的矩阵, 例如

$$5 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 35 & -5 \end{bmatrix}.$$

所有元素都是零的矩阵叫做零矩阵, 用 0 来表示。如要指明零矩阵的行数  $m$  和列数  $n$  时, 我们记做  $0_{mn}$ 。

由数与矩阵的乘法定义, 立即得出下面各性质:

- (1)  $1 \cdot A = A$ ;
- (2)  $0 \cdot A = 0$ ;
- (3)  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ .

如果  $A$  是一个方阵, 那末从  $A$  可以得出一个行列式, 把它记做  $|A|$ 。已知乘行列式的任一行中诸元素以  $\alpha$  时, 行列式之值变为原值之  $\alpha$  倍, 今以  $\alpha$  乘  $A$  时,  $A$  中所有各行之元素均须乘以  $\alpha$ , 故如  $A$  的阶数为  $n$ , 则得

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|.$$

两个行数相同列数相同的矩阵, 可以相加。其和为将行列数相同处的诸数相加后所得出的矩阵, 例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}.$$

从这些定义, 可以直接得出下面的性质:

- (4)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;

$$(5) \quad A+B=B+A;$$

$$(6) \quad A+0=A;$$

$$(7) \quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A;$$

$$(8) \quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$$

讀者可自己證明。特別的由等式(1)、(7)，可得

$$A+A=2A, \quad A+A+A=3A, \dots$$

引入記法  $(-1)A=-A$ ，我們又可得

$$A+(-A)=0;$$

$$(-\alpha)A=-\alpha A;$$

$$-(A+B)=-A-B;$$

$$-(-A)=A.$$

為了簡便，我們平常把  $A+(-B)$  寫作  $A-B$ 。

**5. 矩陣的乘法** 矩陣和矩陣的乘法比起它的加法，矩陣和數的乘法來都要複雜些。設二矩陣為  $A, B$ 。 $A$  的列數等於  $B$  的行數，即

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdots \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \cdots \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \cdots \beta_{2p} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \cdots \beta_{np} \end{bmatrix},$$

則其乘積為矩陣

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \cdots \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \cdots \gamma_{2p} \\ \cdots \cdots \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} \cdots \gamma_{mp} \end{bmatrix},$$

其中  $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nj}$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, p$ )。

記  $A$  對  $B$  的乘積為  $AB$ ，即  $AB=C$ 。例如

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon \\ \lambda & \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma + \beta\lambda & \alpha\delta + \beta\mu & \alpha\varepsilon + \beta\nu \\ \alpha_1\gamma + \beta_1\lambda & \alpha_1\delta + \beta_1\mu & \alpha_1\varepsilon + \beta_1\nu \\ \alpha_2\gamma + \beta_2\lambda & \alpha_2\delta + \beta_2\mu & \alpha_2\varepsilon + \beta_2\nu \end{bmatrix}.$$

矩陣相乘的法則可以總結為：二可乘矩陣的乘積為一矩陣，其第  $i$  行第  $j$  列的元素，為第一矩陣第  $i$  行諸元素，與第二矩陣第  $j$  列諸元素，依序逐對相乘所得出的乘積之和。

二矩陣的乘積一般和它們的次序有關，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ -26 & -8 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 131 \\ -55 & -97 \end{bmatrix}.$$

有時兩矩陣對於某一順序相乘，可以得出乘積，但換成相反次序後，乘法就不可能。

由矩陣的乘法定義，可推出下面的關係：

$$(9) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

事實上，設矩陣  $A$  的元素為  $\alpha_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$ )，矩陣  $B$  的元素為  $\beta_{jk}$  ( $j=1, \dots, n$ ;  $k=1, \dots, p$ )。由乘法規則，知矩陣  $\alpha(AB)$  中第  $i$  行第  $k$  列的元素為

$$\alpha(\alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nk}).$$

同理，知矩陣  $(\alpha A)B$ ,  $A(\alpha B)$  的第  $i$  行第  $k$  列元素各為

$$(\alpha\alpha_{i1})\beta_{1k} + (\alpha\alpha_{i2})\beta_{2k} + \dots + (\alpha\alpha_{in})\beta_{nk},$$

$$\alpha_{i1}(\alpha\beta_{1k}) + \alpha_{i2}(\alpha\beta_{2k}) + \dots + \alpha_{in}(\alpha\beta_{nk}).$$

因為這三個式子是相等的，故知關係 9 成立。用相類似的方法，可以證明下面的性質：

$$(10) \quad (A+B)C = AC + BC;$$

$$(11) \quad C(A+B) = CA + CB.$$

由關係 10 和 11 可得出下面的規則：以幾個矩陣之和乘幾個矩陣之和時，為將第一矩陣和中每一矩陣乘第二矩陣和中每一矩陣把這些乘積加後所得出的和。

我們已知矩陣的乘法是不一定可易的，就是說  $AB$  不一定等於

$BA$ , 但是第二算术定律——可群律——对于矩阵的乘法是适合的<sup>①</sup>。

$$(12) \quad A(BC) = (AB)C.$$

为了证明它, 我们设

$$AB = M, \quad BC = N,$$

且把  $M, N$  的元素各记做  $\mu_{ik}, \nu_{jl}$ 。由矩阵的乘法, 知

$$\mu_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nk},$$

$$\nu_{jl} = \beta_{j1}\gamma_{1l} + \beta_{j2}\gamma_{2l} + \cdots + \beta_{jn}\gamma_{nl},$$

其中  $\alpha_{ij}, \beta_{jk}, \gamma_{kl}$  为矩阵  $A, B, C$  的元素。以  $M$  乘  $C$  得  $(AB)C$  的第  $i$  行第  $l$  列的元素为

$$\mu_{il} = \alpha_{i1}\gamma_{1l} + \alpha_{i2}\gamma_{2l} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_{nl} = \sum_k \sum_j \alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}.$$

同理, 以  $A$  乘  $N$ , 得矩阵  $A(BC)$  的第  $i$  行第  $l$  列的元素为

$$\alpha_{i1}\nu_{1l} + \alpha_{i2}\nu_{2l} + \cdots + \alpha_{in}\nu_{nl} = \sum_j \sum_k \alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}.$$

这两个式子, 除开加法的次序有所不同外, 是完全相等的, 故知等式 12 是正确的。

由等式 12, 知道对于有一定顺序的矩阵  $A, B, C, \dots, D$  的乘积可以不必在它们的中间另加括弧, 所以我们不但可以说及两个矩阵的乘积, 亦可说及多个矩阵的乘积。例如我们可以简单的说四个矩阵的乘积  $ABCD$ , 因为它和

$$[(AB)C]D, [A(BC)]D, A[(BC)D], A[B(CD)], (AB)(CD)$$

这五个乘积是一个东西。对于普遍的情形可以由可群律 12, 用数学归纳法来证明。

最后, 我们指出, 二方阵的乘积的行列式等于它们的行列式的乘积, 即

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

① 因为矩阵的加法与乘法并不是对任何两个矩阵都能施行, 要受到它们之间行列数的某些限制。等式 10, 11, 12 的意思是说, 如其某一节可以相乘或相加, 则其另一节亦可应用运算结合而且两节之结果相等。

这一个結果是同关于行列式的乘法的已知定理符合的。

**6. 矩阵的乘幂** 我們說过不是任何两个矩阵都是可以相加或相乘的，只有它們的行列数之間有一定的关系时才可以进行。但当我们只处理所有  $n$  阶的方陣时，就不会有这一个不方便的情形，任何两个  $n$  阶方陣都可以相加，相乘或和某一个数相乘后仍然得出一个  $n$  阶方陣。在本段与次段 (6, 7) 中，我們所討論的都是阶数同为  $n$  的方陣。

对角綫上的元素均为 1 而其他元素均为零的方陣叫做么方陣，記之为  $E$ ：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

显然由乘法法则对于任何方陣均可得

$$AE = EA = A.$$

此等式决定方陣  $E$  的基本性質。型如方陣

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma \end{bmatrix}$$

的叫做对角形方陣。

从运算規則显然得出二对角形方陣之和与积仍为一对角形方陣：

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta + \beta_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma + \gamma_1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta\beta_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma\gamma_1 \end{bmatrix}.$$

现在来讨论元素在域  $K$  中的任何一个  $n$  阶方阵。如果有这样的方阵  $X$  存在，使得

$$XA = AX = E,$$

我们说  $A$  是可逆的，而且把  $X$  叫做  $A$  的逆方阵，写做  $X = A^{-1}$ 。容易看出，可逆方阵只有一个逆方阵，所以  $A^{-1}$  的表法是一意的。事实上，如果  $Y$  也是  $A$  的逆方阵，那末用  $X$  来左乘关系式  $AY = E$ ，我们得出  $XA \cdot Y = X$ ，也就是  $Y = X$ 。同样的，用  $X$  右乘  $YA = E$  得出  $Y = X$ 。

因之，如果方阵  $A$  是可逆的，那末方程

$$XA = E, \quad AX = E$$

的任何一个都有一个而且只有一个解  $X = A^{-1}$ 。

逆方阵很容易利用它的行列式来求出。设  $A = \{a_{ij}\}$ 。用  $A_{ij}$  表方阵  $A$  的行列式中  $a_{ij}$  的代数余子式（余因子）。用它们来构成方阵

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots \cdots \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中第  $i$  行的元素为  $|A|$  中第  $i$  列的代数余子式。方阵  $B$  叫做  $A$  的附加方阵。它有下面的基本性质：

$$AB = BA = |A| \cdot E. \quad (1)$$

这个等式可以这样证明：方阵  $AB$  的第  $i$  行第  $j$  列元素为

$$\alpha_{i1}A_{j1} + \alpha_{i2}A_{j2} + \cdots + \alpha_{in}A_{jn}$$

由行列式的性质，知当  $i \neq j$  时此式为零，当  $i = j$  时，此式等于  $|A|$ ，故得  $AB = |A| \cdot E$ 。同理知  $BA = |A| \cdot E$ 。

因么方阵的行列式为 1，由等式 (1) 得

$$|AB| = |A| \cdot |B| = ||A| \cdot E| = |A|^n \cdot |E| = |A|^n,$$

即

$$|A| \cdot |B| = |A|^n. \quad (2)$$

引入下面的定义：当  $A$  的行列式不为零时，称  $A$  为满秩方阵，否则称为降秩方阵。

設  $A$  为一满秩方阵， $B$  为其附加方阵。因  $|A| \neq 0$ ，在 (2) 的两  
节约去  $|A|$  得  $B$  的行列式

$$|B| = |A|^{n-1}。 \quad (3)$$

乘等式 (1) 以  $|A|^{-1}$  得

$$A \cdot |A|^{-1} B = |A|^{-1} B \cdot A = E。 \quad (4)$$

这样一来，

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot B。 \quad (5)$$

所以，特别的，得出所有满秩方阵都是可逆的。如果方阵  $A$  是降秩的，  
那末从  $XA = E$  转移到行列式，得出矛盾等式  $|X| \cdot |A| = 1$ ，也就是  
 $|X| \cdot 0 = 1$ 。这就证明了，方阵的可逆性和满秩性这两个概念是等价的。

設  $A$  为一满秩方阵，则  $AA^{-1} = E$ 。两节取行列式之值，得

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1,$$

即

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}, \quad (6)$$

故知方阵之逆的行列式等于其行列式之倒数。当  $A$  为满秩时， $A^{-1}$  显然满秩，故有方阵  $(A^{-1})^{-1}$ 。由逆方阵的性质知有

$$A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = E,$$

用  $A$  来左乘，得

$$(A^{-1})^{-1} = A。 \quad (7)$$

我們很容易得出求方阵积的负一次方的規則。設  $A, B, C$  为满秩  
方阵，则

$$ABC \cdot C^{-1} B^{-1} A^{-1} = E,$$

因此

$$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}。 \quad (8)$$