

DAXUE WULI SHIYAN

# 大学物理实验

葛洪良 罗宏雷 蒋丽珍 编著

浙江大学出版社

# 大学物理实验

---

葛洪良 罗宏雷 蒋丽珍 编著

浙江大學出版社

**图书在版编目 ( C I P ) 数据**

大学物理实验 / 葛洪良, 罗宏雷, 蒋丽珍编著. —杭州: 浙江大学出版社, 2003. 10  
ISBN 7-308-03463-1

I . 大... II . ①葛...②罗...③蒋... III . 物理学—实验—高等学校—教材 IV . O4 - 33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 083763 号

**责任编辑** 石国华  
**出版发行** 浙江大学出版社  
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)  
(E-mail: zupfx2@zju.edu.cn)  
(网址: <http://www.zjupress.com>)  
**排 版** 浙江大学出版社电脑排版中心  
**印 刷** 浙江大学印刷厂  
**开 本** 787mm × 1092mm 1/16  
**印 张** 10.5  
**字 数** 268 千  
**版 印 次** 2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷  
**印 数** 0001 - 3000  
**书 号** ISBN 7-308-03463-1 / O·296  
**定 价** 16.00 元

# 前 言

本书依据教育部颁发的《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，在多年教学改革实践的基础上，结合面向 21 世纪高等教育教学改革发展的需要而编写的。与传统的工科物理实验教材相比，该教材增添了一些新的实验内容，力求反映当前主流的实验理论、技术和方法。例如，教材选入了用动力学法测量固体的弹性常量、PN 结正向压降与温度关系的研究和应用等反映物理学原理在新技术中应用的实验；电偶标定和测温、CCD 光敏探测等现代传感技术在物理量测量中应用的实验。在强调物理概念的同时，加强了物理原理的应用，如电子元件的伏安特性研究、铁磁材料的磁滞回线和基本磁化曲线等，力求学以致用。在许多传统的实验中，也使用了新的实验仪器、新的实验技术，并利用了电子计算机进行数据采集和处理。全书内容的编写力求体现时代性和先进性，注重拓宽学生知识面，发展学生个人兴趣，提高学生知识创新能力，以适应时代发展的需要。

参加本书编写的是中国计量学院担任大学物理实验课的教师和实验技术人员。除了主编，朱象云高级实验师、黄西荷高级实验师也做了大量的编写工作，王筱武高级实验师也参加了部分编写工作。这本书是集体智慧和劳动的结晶，主编做了组织和统编工作，感谢各位老师对本书出版的支持以及付出的辛勤劳动。也感谢历年来使用《大学物理实验》的师生提出的宝贵意见。在编写过程中曾参阅了兄弟院校的大学物理实验教材和讲义，在此一并致射。我们还要感谢中国计量学院教务处领导的支持和帮助。

本书共收入 28 个实验，可作为高校工科专业大学物理实验教学用书，也可供相关专业的师生参考。

由于编写时间紧迫，以及我们的水平所限，书中难免有错误和不妥之处，祈盼使用本书的教师、学生和各位读者批评指正。

葛洪良

2003 年 10 月于杭州

## 目 录

绪 论	1
一、有效数字及其运算	1
二、测量误差及其基本概念	2
三、数据处理的基本方法	14
实验一 密度测量	19
实验二 杨氏弹性模量的测定	22
实验三 动力学法测定材料的杨氏模量	26
实验四 气垫导轨上测量速度和加速度	31
实验五 扭摆法测定物体转动惯量	36
实验六 三线摆法测定物体转动惯量	41
实验七 空气比热容比测定	45
实验八 热电偶标定和测温	48
实验九 单臂电桥测电阻	53
实验十 直流双臂电桥测低值电阻	58
实验十一 示波器的调整和使用	60
实验十二 电流场模拟静电场	68
实验十三 光的等厚干涉	74
实验十四 分光计的调整及应用	80
实验十五 照相技术	89
实验十六 气轨上简谐振动的研究	97
实验十七 声速的测定	100
实验十八 电位差计精确测量电压或电动势	103
实验十九 密立根油滴 CCD 微机系统测电子电荷 $e$	109
实验二十 霍尔效应	115
实验二十一 铁磁材料的磁滞回线和基本磁化曲线	121
实验二十二 热敏电阻与热电阻温度特性的研究	125

---

实验二十三	<i>PN</i> 结正向压降与温度关系的研究和应用 .....	128
实验二十四	非线性电路混沌实验 .....	134
实验二十五	迈克尔逊干涉仪 .....	139
实验二十六	光栅衍射光谱各谱线的测定 .....	144
实验二十七	电子元件的伏安特性 .....	148
实验二十八	单缝衍射的光强分布 .....	151
附录一	物理学常量表 .....	155
附录二	中华人民共和国法定计量单位 .....	156
参考文献	.....	159

## 绪 论

任何理论都是建立在实验的基础上的,物理实验是一门重要的基础实验课。其主要任务是:

1. 学习和掌握进行物理实验的基础知识、基本方法和基本技能,了解进行物理实验的主要过程,使同学们具有初步的科学实验能力。

2. 培养和提高学生的观察和分析物理现象的本领,训练学生从实验中归纳、总结物理规律的能力,并学会利用所掌握的物理理论进行实验和设计实验。

3. 培养严肃认真的工作作风,实事求是的科学态度,勇于探索的钻研精神,克服困难的坚强意志和遵守纪律的优良品德。

### 一、有效数字及其运算

在实验过程中,必须正确读取数据和处理这些数据,才能得到正确的结果,否则,读取的数据是无效的,结果是错误的。怎么样的数据才是有效的呢?

#### 1. 有效数字的概念

任何一个实验结果都存在着误差,由准确数字加上最后一位可疑数字合称为有效数字。如  $L = 15.24$ , 有四位有效数字,其中 4 是可疑位。有效数字越多,精度就越高,因此,有效位数的多少不可以随意取舍。下面对有效数字作几点说明:

(1) 出现在数值中间的“0”与末尾的“0”均为有效数字。

(2) 有效数字与小数点的位置无关。如物体的长度为  $12.64\text{cm}$ , 也可记为  $0.1264\text{m}$ , 以及  $0.0001264\text{km}$ , 它们都是四位有效数字。当数值太小或太大时,应当采用科学记数法,即用有效数字乘以 10 的幂指数的形式表示,如  $1.264 \times 10^{-4}\text{km}$  等。用这种形式表示特大或特小数值时,一般小数点前只取一位数字,幂指数不是有效数字。

(3) 任何有效数字位数是由绝对误差来决定的,有效数字的最末位应与误差(只取一位)所在位对齐。如物体长度写成  $L = 3.45 \pm 0.02\text{cm}$  是正确的,但写成  $L = 3.5 \pm 0.02\text{cm}$  或  $L = 3.452 \pm 0.02\text{cm}$  都是错误的。

(4) 有效数字的位数与测量方法有关。例如,用单摆测量重力加速度,如果用最小分度为  $0.1\text{s}$  的秒表测一个周期,得  $T = 1.9\text{s}$ ;但如果连续测 100 个周期,得  $100T = 194.6\text{s}$ , 则一个周期  $T = 1.946\text{s}$ 。前者为二位有效数字,后者为四位有效数字,精度提高了。

(5) 测量同一物理量时,有效数字的位数与所用测量仪器精度有关。仪器精度越高,有效数字的位数就越多。例如,测量一平板玻璃厚度,用米尺来测量得  $4.2\text{mm}$ , 为二位有效数字;用游标卡尺测量得  $4.20\text{mm}$ , 为三位有效数字;用螺旋测微计测量得  $4.212\text{mm}$ , 为四位有效数字。

#### 2. 有效数字的运算

(1) 有效数字的加减

MAG 44/03

先看下列例子:

$$25.\underline{3} + 4.2\underline{4} = 29.\underline{54} = 29.\underline{5}$$

$$37.\underline{9} - 5.6\underline{2} = 32.\underline{28} = 32.\underline{3}$$

$$71.\underline{4} + 0.75\underline{3} = 72.\underline{153} = 72.\underline{2}$$

结论:几个数相加(减),其和(或差)在小数点后所应保留的位数与参与运算的诸数中小数点后位数最少的一个相同。

(2) 有效数字的乘除

先看下列例子:

$$52\underline{8} \div 12\underline{1} = 4.3\underline{64} = 4.3\underline{6}$$

$$3.8\underline{5} \times 9.7\underline{3} = 37.\underline{46} = 37.\underline{5}$$

$$39.\underline{3} \times 4.08\underline{4} = 160.\underline{5} = 16\underline{1}$$

结论:几个数相乘除,所得的结果的有效数字位数,一般与诸数中有效数字位数最少的一个相同,有时也可多一位或少一位。

(3) 乘方与开方

某数的乘方(或开方)的有效数字位数,应与其底数的有效数字相同。

(4) 常数  $e$ 、 $\pi$  等运算

在运算中, $\pi$ 、 $e$  可认为其有效数字是无限的,但一般仅比测量值多取一位有效数字参与运算。

## 二、测量误差及其基本概念

只有在精确实验的基础上才能得出正确的结论和发展正确的理论。如近代的量子力学、相对论等。但所有实验都存在着误差,只有正确地分析、处理误差才能得出正确的结果。

### 1. 测量误差的基本概念

测量是物理实验的基本操作。所谓测量,就是把待测的物理量与一个被选作标准的同类物理量进行比较,以确定它是标准量的多少倍。这个标准量称为该物理量的单位(本书采用国际单位)。这个倍数称为待测物理量的数值。测量的结果应包括数值、单位以及结果可信赖的程度。

#### (1) 直接测量、间接测量

测量分为直接测量和间接测量。凡是能以量具、仪器的刻度直接测得待测量大小的测量,叫直接测量。例如用直尺测某长度、用天平称衡物体质量、用安培表测量电流强度等等。但大多数物理量不可能直接测得,需要进行间接测量。所谓间接测量,就是先经过直接测量得到一些量的量值,然后再通过一定的函数关系进行计算,才能得出所求结果的测量。例如直接测量一圆柱体的直径( $d$ )和高度( $h$ ),再根据  $V = \pi d^2 h / 4$  计算出圆柱体的体积,圆柱体体积测量就是间接测量。又如转动惯量、重力加速度的测定等等。有些物理量既可直接测量也可间接测量,如电流,既可用电流表直接测得(直接测量),也可先测电阻两端电压,然后通过欧姆定律求得(间接测量)。

#### (2) 精度测量,测量的正确度、精密度和精确度

仪器的不同、方法的差异、测量条件的改变以及测量者素质的参差都会造成测量结果的



变化。这样的测量是不等精度测量。而同一个人,用同样的方法,使用同样的仪器并在相同的条件下对同一物理量进行的多次测量,叫做等精度测量。尽管各测量值可能不相等,但没有理由认为哪一次(或几次)的测量值更可靠或更不可靠。实际上,一切物质都在运动中,没有绝对不变的人和事物。只要其变化对实验的影响很小乃至可以忽略,就可以认为是等精度测量。如有一个条件发生变化,从而明显影响到实验结果,这样的测量即为不等精度测量。对一个量的多次测量,通常指等精度测量。对同一物理量进行多次等精度测量,其结果也不完全相同。比如打靶(如图 1 所示),着弹点会有一些的弥散性,结果比较接近客观实际的测量正确度高;结果彼此相近的测量精密度高;而既精密又正确的测量则为精确度高。正确度表示测量结果系统误差的大小,精密密度表示测量结果随机性误差的大小,精确度则综合反映出测量的系统误差与随机性误差的大小。

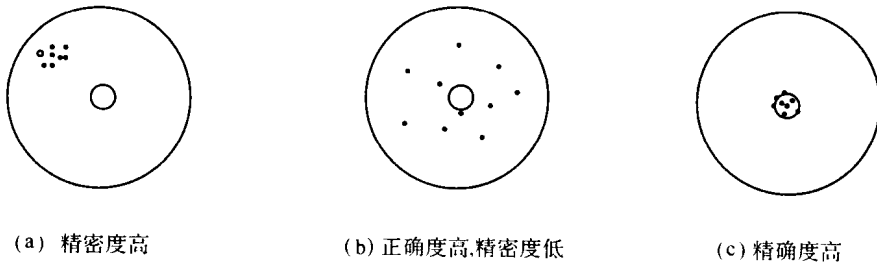


图 1 打靶着弹点的分布

### (3) 测量误差

任何物理量在一定条件下客观存在一个惟一确定的值,即真值。所测得的数值与其真值之间总存在着差异,我们把所得测量值与真值之差定义为误差。用下式表示:

$$\Delta x_i = x_i - x_0$$

式中,  $x_0$  代表真值,  $x_i$  为第  $i$  次测量值,  $\Delta x_i$  为第  $i$  次测量误差。

产生误差的原因是多方面的,根据误差的性质及其产生的原因,可分为系统误差和偶然误差两大类。

### (4) 系统误差

图 1 中的(a)情况,对一个枪手来说,很可能是由于枪的准星不准而偏离了靶心。这是由于仪器造成的误差,这种误差属系统误差。系统误差的特点是测量的结果总是向某一确定方向偏离,或按照一定的规律变化。产生系统误差有以下几个原因:仪器本身的缺陷(如刻度不准、不均匀或零点没校准等);理论公式或测量方法的近似性;环境的改变(如测量过程中温度、压强的变化);实验者生理或心理特点,或缺乏经验引入的误差(读数总是偏大或偏小)。

由于系统误差的数值和符号(+、-)是定值或按某种规律变化,因此系统误差不能通过多次测量来消除或减小。如果能找出产生系统误差的原因,就能采取适当的方法来消除或减小它的影响,或对测量结果进行修正。实验中一定要注意消除系统误差。

### (5) 偶然误差(随机误差)

由于观察者受到感官的限制,或由于测量对象自身的涨落,或由于其他不可预测的偶然因素所引起的误差称为偶然误差或随机误差。它的特点是随机性、不可预知性,但从统计的角度看,满足正态分布。其特点为:

绝对值相等的正负误差出现的几率相等。

绝对值小的误差出现的几率比绝对值大的误差出现的几率大。

偶然误差的算术平均值随测量次数的增加而减小,当测量次数趋于无穷大时,它趋于零。偶然误差存在一“最大误差”,即误差的绝对值不超过某一限度。

由于偶然误差存在上述性质,我们可以用增加测量次数的方法来减小它。当测量次数足够多时,测量值的偶然误差趋近于零,测量值的算术平均就趋近于真值。

#### (6) 直接测量的误差估算

##### ① 多次测量

对某一物理量进行了  $n$  次测量,测量值分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。其算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

由上所述,  $\bar{x}$  为该物理量的最佳值。

每次测量值  $x_i$  与算术平均值  $\bar{x}$  的误差的绝对值为

$$\Delta x_1 = |x_1 - \bar{x}|, \quad \Delta x_2 = |x_2 - \bar{x}|, \quad \dots, \quad \Delta x_n = |x_n - \bar{x}|$$

则算术平均绝对误差(算术平均误差)定义为

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

测量结果可表示为

$$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x}$$

##### ② 单次测量

有些物理实验是在动态下测量的,不允许重复多次测量;有些实验的精密度要求不高。在这些情况下,可以只进行一次测量。单次测量的误差估计,一般总是估计误差的最大值。误差最大值的估计比较复杂,有各种方法。如果要求不高或不需要很精确时,常取仪器最小分度  $d$  的一半来表示,其测量结果为  $x = x_{\text{测}} \pm d/2$ 。

对于标出精度等级的仪器和仪表,可用仪器误差作为单次测量误差,其表示式为

$$x = x_{\text{测}} \pm \Delta x_{\text{仪}}$$

其中,  $\Delta x_{\text{仪}} = \text{量程} \times \text{级别} \%$ 。

在多次测量中,经过计算得到的偶然误差很小甚至趋近于零。从简化问题而又不失其合理性考虑,这时仍可取仪器误差作为测量结果的最大误差。

#### (7) 间接测量误差的估算

设间接测量量  $N$  与各独立的直接测量量  $x, y, z, \dots$  有下列函数关系

$$N = f(x, y, z, \dots)$$

用算术平均误差(通常把算术平均误差看成最大误差)表示各个独立的直接测量值为

$$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x}, \quad y = \bar{y} \pm \overline{\Delta y}, \quad z = \bar{z} \pm \overline{\Delta z}, \quad \dots$$

则间接测量值可表示为

$$N = \bar{N} \pm \overline{\Delta N}$$

式中,  $\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ,  $\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \overline{\Delta x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \overline{\Delta y} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \overline{\Delta z} \right| + \dots$

式中取绝对值是考虑到误差最大的情况。

### (8) 相对误差

为了评价测量的精密程度,引入相对误差的概念。相对误差定义为

$$E = \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} \times 100\%$$

在处理间接测量的误差问题时,如果函数关系仅仅是乘除关系,往往先求相对误差,而后根据相对误差公式求出绝对误差。

如:体积  $V = L \times W \times H$

相对误差即为  $E_V = E_L + E_W + E_H$

绝对误差即为  $\overline{\Delta V} = E_V \times \bar{V}$

但如果先算  $\overline{\Delta V}$  就比较复杂。

## 2. 测量仪器的精度级别以及测量值的有效数字

### (1) 仪器的精度级别

测量结果的精密度和正确度是与测量仪器的精确度等级密切相关的。我们通常用精度和级别来描述仪器的这种性质。

仪器的精度通常指它能分辨的物理量的最小值。仪器的精度越高,即它的分度越细,允许的偏差就越小。由于多种因素,如材质不均匀、加工装配的缺陷以及环境(如温度、湿度、震动、杂散光、电磁场等)的影响,仪器的精度受到一定的限制。按照标准,在正常使用条件下(如温度、湿度范围、放置方式、额定功率等都符合要求),用某种级别的仪器进行测量时,对最大允许偏差有具体规定,这种最大允差也叫仪器的极限误差或公差,我们用  $\Delta_{\text{仪}}$  来表示。 $\Delta_{\text{仪}}$  可在产品说明书和仪器手册中查找到。

仪器的级别和最大允差有关。如模拟式(即指针式)电表级别分为 5.0、2.0、1.5、1.0、0.5、0.2、0.1 等。每一量程的最大允差  $\Delta_{\text{仪}} = \text{量程} \times \text{级别} \%$ 。它表示在该量程下正确使用仪器进行测量,结果可能出现的最大误差。而数字式电表测量结果的误差较为复杂,通常表示为读数  $\times$  某百分数 + 最末位的几个单位(具体见说明书)。

一般而言,有刻度的仪器、量具的最大允差大约对应于其最小分度值所代表的物理量。对于数字式仪表,测量值的误差往往在于所显示的能稳定不变的数字中最末一位的半个单位所代表的物理量。应当说明,“最大允差”是指所制造的同型号、同规格的所有仪器中有可能产生的最大误差,并不表明每一台仪器的每个测量值都有如此之大的误差。它既包括仪器在设计、加工、装配过程中乃至材料选择中的缺陷所造成的系统误差,也包括正常使用过程中测量环境和仪器性能随机涨落的影响。

### (2) 测量值的有效数字

对于标刻度的量具和仪器,如果被测量值很明确,照明好,仪器的刻度清晰,要估读到最小刻度的几分之一(如  $1/10$ 、 $1/5$ 、 $1/2$ )。这最小刻度的几分之一,即为测量值的估计误差,记作  $\Delta_{\text{估}}$ 。如用米尺测量书本上两条平行细线之间的距离,应能估读到最小刻度(1mm)的十分之一。人们常把能读准的数字叫可靠数字,估读的一位数字叫可疑数字,测量值的误差往往在这最后一位。用数字式仪表测量,凡是能稳定显示的数值都应记录下来。其数值的位数就是该测量值的有效数字。如用某数字万用表测电压,显示值为 217V,位数为 3,它的有效数字位数就是 3。如果测量值的末位或末两位数字变化不定,应当记录稳定的数值加下一位正在显示的值,或者根据其变化规律,四舍五入到读数稳定的那一位。如果两位以上的数字都变

化不定,应考虑选择更合适的量程或更合适的仪器。如用米尺测量一个边缘磨损的桌子的长度,因被测量值自身的不确定性,就只能读到毫米了,表示估计误差在毫米这一位。

表 1 常用仪器量具的主要技术要求和最大允差

量具(仪器)	量程	最小分度值	最大允差
木尺(竹尺)	30 ~ 50cm	1mm	$\pm 1.0\text{mm}$
	60 ~ 100cm	1mm	$\pm 1.5\text{mm}$
钢板尺	150mm	1mm	$\pm 0.10\text{mm}$
	500mm	1mm	$\pm 0.15\text{mm}$
	1000mm	1mm	$\pm 0.20\text{mm}$
钢卷尺	1m	1mm	$\pm 0.8\text{mm}$
	2m	1mm	$\pm 1.2\text{mm}$
游标卡尺	125mm	0.02mm	$\pm 0.02\text{mm}$
	300mm	0.05mm	$\pm 0.05\text{mm}$
螺旋测微器(千分尺)	0 ~ 25mm	0.01mm	$\pm 0.004\text{mm}$
七级天平(物理天平)	500g	0.05g	1.3mg(接近满量程)
			1.0g( $\frac{1}{2}$ 量程附近)
			0.7g( $\frac{1}{3}$ 量程及以下)
三级天平(分析天平)	200g	0.1mg	0.08g(接近满量程)
			0.06g( $\frac{1}{2}$ 量程附近)
			0.04g( $\frac{1}{3}$ 量程及以下)
普通温度计 (水银或有机溶剂)	0 ~ 100℃	1℃	$\pm 1^\circ\text{C}$
精密温度计(水银)	0 ~ 100℃	0.1℃	$\pm 0.2^\circ\text{C}$

### 3. 测量的不确定度

长期以来,人们用误差来表征测量结果可信程度的好坏。定义误差为测量值与“真值”的偏差。但“真值”是无法确定的,它只是一个理想值。比如两条平行线之间的距离,用米尺、游标卡尺、螺旋测微器和测长仪测得的结果分别为 24.6mm、24.58mm、24.579mm 和 24.5792mm。实际上,所谓“平行线”有一定宽度,而且线的边缘的微观感也是参差不齐的。“两线间宽度”指的是在某种精度下的一个长度范围。而“真值”只是一种理想值或约定值。在消除了系统误差的情况下,高准确度仪器的测量值就是低准确度仪器的相对真值。

以前国内外对于测量结果的不确定度的表述、运算规则都不尽统一。1992年国际计量大会以及四个国际组织制定了协调的具有国际指导性的《测量不确定度表达指南》。1993年,该《指南》经国际理化等组织批准实施。我国的计量标准部门也已明确提出应采用不确定度作为误差数字指标的名称。本节将以《指南》为基础,讲述测量不确定度的基本原理和具体应

用。

测量不确定度是与测量结果相关联的参数,用以表征测量值可信赖的程度,或者说它是被测量值在某一范围内的一个评定。测量不确定度分为 A 类标准不确定度和 B 类标准不确定度。前者由观测列统计分析评定,也称为统计不确定度;后者不按统计分析评定,也叫非统计不确定度。

### (1) A 类标准不确定度

#### ① 测量列的标准差和高斯分布

从理论上说,对物理量  $x$  做  $n$  次等精度测量,得到包含  $n$  个测量值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个测量列。由于是等精度测量,我们无法断定哪个值更可靠。概率论可以证明,其平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

为最佳值,也称期望值,是最可以信赖的。

定义该测量列的标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)} \quad (2)$$

其统计意义是指当测量次数足够多时(比如大于 10 次),测量列中任一测量值与平均值的偏离落在  $[-\sigma, \sigma]$  区间的概率为 0.683,这一公式称为贝塞尔公式。

当  $n$  趋于  $\infty$  时,物理量  $x$  将成为连续型随机变量,其概率密度分布为正态函数,形式为

$$y = (x - \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta} e^{-(x-\bar{x})^2/2\zeta^2} \quad (3)$$

或

$$y(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta} e^{-\delta^2/2\zeta^2} \quad (4)$$

其分布为一连续曲线,像一个倒扣的钟罩, $\delta$  为绝对误差, $\delta = |x - \bar{x}|$ , $\zeta$  为一与具体测量条件有关的正参数,这种分布叫高斯分布或正态分布。

正态分布具有以下特点:

- (a) 对称性:无论比平均值大或小,其差值的绝对值相等时,出现的概率相等。
- (b) 单峰性:与平均值相差越大,出现的概率越小。
- (c) 有界性:在一定条件下,标准差的绝对值有一定限度。
- (d) 抵偿性:标准差的算术平均值随着  $n \rightarrow \infty$  而趋于零。

当  $n \rightarrow \infty$  时,用式(2)中  $\sigma$  代替式(4)中  $\zeta$ ,得到

$$y(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\delta^2/2\sigma^2} \quad (5)$$

从正态函数积分表得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y(\delta) d\delta &= 1 \\ \int_{-\sigma}^{\sigma} y(\delta) d\delta &= p(\sigma) = 0.683 \\ \int_{-2\sigma}^{2\sigma} y(\delta) d\delta &= p(2\sigma) = 0.954 \\ \int_{-3\sigma}^{3\sigma} y(\delta) d\delta &= p(3\sigma) = 0.997 \end{aligned}$$

以上各式表明,当  $n \rightarrow \infty$  时,任何一次测量值与平均值之差落在  $[-\infty, \infty]$  区间的概率为 1, 满足归一化条件;而落在  $[-\sigma, \sigma]$  区间的概率为 0.683, 即表示置信概率为 68.3%, 记为  $P = 0.683$ ; 落在  $[-2\sigma, 2\sigma]$  区间的概率为 0.954, 置信概率  $P = 0.954$ ; 落在  $[-3\sigma, 3\sigma]$  区间的概率为 0.997,  $P = 0.997$ , 这就是标准差的统计意义。次数无限多地测量偏差的绝对值大于  $3\sigma$  的概率仅为 0.3%。对于有限次测量, 这种可能性是微乎其微的, 因此可以认为是测量失误, 该测量值是“坏值”, 应予以剔除。在分析多次测量的数据时, 这是很有用的  $3\sigma$  判据。

正态分布是连续型随机变量中最重要、最常用的分布。一般而言, 若某个数量指标  $x$  是很多随机因素之和, 而每个因素所起的作用均匀微小, 则  $x$  为服从随机分布的变量, 如上述多次等精度独立测量的情况。实际上, 大量生产的同类产品, 当设备、技术、原料、工艺、操作等可控制的生产条件都相对稳定, 不存在明显的系统误差影响时, 产品的质量指标近似服从正态分布。

### ② 测量列的 A 类标准不确定度

在实际工作中, 人们往往关心的不是测量列的数据散布特性, 而是测量结果, 即算术平均值的离散程度。我们设想进行了有限的  $n$  次 ( $n$  仍然足够大) 测量后, 得到一个最佳值  $\bar{x}$ , 这一测量列中任一次测量值  $x_i$  的误差落在  $[-\sigma_x, +\sigma_x]$  区间内的概率为 68.3%。如果我们增加测量次数, 例如  $(n+m)$  次, 则可得到另一个最佳值  $\bar{x}'$  和相应的标准差  $\sigma_{x'}$ 。 $\bar{x}$  与  $\bar{x}'$ 、 $\sigma_x$  与  $\sigma_{x'}$  一般不会相同。继续增加测量次数, 可以发现  $\bar{x}$  也是一个随机变量。那么, 随着测量次数的增加, 算术平均值  $\bar{x}$  本身的可靠性如何呢? 算术平均值的标准差, 用  $u_A$  表示, 具有什么样的性质呢? 显然,  $\bar{x}$  肯定要比测量列中的任一测量值更可靠。由概率论可以证明算术平均值  $\bar{x}$  的标准差  $u_A$  为

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

当测量次数趋于无限时, 算术平均值将无限接近待测物理量的客观值, 为最佳值。 $u_A$  的统计意义为: 待测物理量落在  $[\bar{x} - u_A, \bar{x} + u_A]$  区间内的概率为 68.3%, 落在  $[\bar{x} - 2u_A, \bar{x} + 2u_A]$  区间内的概率为 95.4%, 落在  $[\bar{x} - 3u_A, \bar{x} + 3u_A]$  区间内的概率为 99.7%。 $u_A$  叫做该测量列的 A 类标准不确定度, 即该测量列的平均值的标准差。

### ③ 有限次测量的情况与 $t$ 因子

测量次数趋于无穷只是一种理论情况, 这时物理量的概率密度服从正态分布。当次数减少时, 概率密度曲线变得平坦, 成为  $t$  分布。当测量次数趋于无限时,  $t$  分布过渡到正态分布。

对有限次测量的结果, 要保持同样的置信概率, 显然要扩大置信区间, 把  $u_A$  乘以一个大于 1 的因子  $t$ 。在  $t$  分布下, A 类不确定度记为  $\Delta_A$

$$\Delta_A = t_p u_A \quad (7)$$

要使测量值落在平均值附近, 具有与正态分布相同的置信概率, 即  $P = 0.68$ , 置信区间要扩大为  $[-t_p u_A, t_p u_A]$ ,  $t_p$  与测量次数有关。

表 2 给出不同置信概率下  $t$  因子与测量次数的关系 (有些资料用自由度  $\gamma$  代表测量次数  $n$ , 对于一个物理量的测量,  $\gamma = n - 1$ )。

表2  $t$  与  $n$  的关系

$\frac{n}{P}$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	$\infty$
0.68	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03	1
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.86	1.83	1.76	1.73	1.71	1.65
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	2.15	2.09	1.96
0.99	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.98	2.86	2.58

## ④ 泊松分布

描述离散性随机变量的取值概率与连续型变量有所不同。对于大量次数的试验,其中小概率事件出现的次数,常用泊松分布表示,若随机变量  $x$  取非负整数值  $k$  的概率为

$$P(x = k) = P(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (\lambda > 0)$$

则  $x$  的分布称为泊松分布,  $\lambda$  是参数。泊松分布应满足归一化条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k, \lambda) = 1$$

在人口统计、核物理计数中常用泊松分布。像正态分布、 $t$  分布一样,泊松分布也有表可查。

## (2) B 类标准不确定度

## ① 测量仪器的最大允差

测量中凡是不符合统计规律的不确定度统称为 B 类不确定度。记为  $\Delta_B$ 。在物理实验中,经常遇到一些不能多次重复测量的情况,如热敏半导体的电阻与温度关系的动态测量。有时,仪器的精度较低,多次测量的结果可能完全相同,反映不出随机性,多次测量便失去意义。事实上,实际工作和生活中,绝大多数测量都是一次测量。对一般有刻度的量具和仪表,估计误差在最小分格的  $1/10 \sim 1/5$ ,通常小于仪器的最大允差  $\Delta_{\text{仪}}$ 。所以通常以  $\Delta_{\text{仪}}$  表示一次测量结果的 B 类不确定度。测量值与客观值(即所谓的真值)的误差在  $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$  内的置信概率为 1。

实际上,仪器的误差在  $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$  范围内是按一定概率分布的。在相同条件下大批生产的产品,其质量指标一般服从正态分布。由正态分布函数的性质可知,误差大于三倍标准差的概率不到 0.3%,所以质量指标服从正态分布的产品,一次测量值的 B 类标准差(记为  $u_B$ )为  $\Delta_{\text{仪}}/3$ 。

一般而言,  $u_B$  与  $\Delta_{\text{仪}}$  的关系为

$$u_B = \Delta_{\text{仪}} / C$$

式中,  $C$  为置信系数。

也有一些仪器的质量指标在  $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$  范围内服从均匀分布或三角分布。均匀分布的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_{\text{仪}}}, & |x| \leq \Delta_{\text{仪}} \\ 0, & |x| > \Delta_{\text{仪}} \end{cases} \quad (8)$$

根据概率统计理论,对于均匀分布函数的 B 类标准差,  $C = \sqrt{3}$ ,即  $u_B = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{3}$ ,测量值误差在  $[-u_B, u_B]$  内的置信概率  $P = 0.58$ ;而对三角分布,  $C = \sqrt{6}$ ,即  $u_B = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{6}$ ,在

$[-u_B, u_B]$  内的置信概率  $P = 0.74$ 。只有对正态分布, 测量值误差落在  $[-u_B, u_B]$  内的概率才是  $P = 0.68$ 。正态分布条件下, 测量值的  $B$  类不确定度  $\Delta_B = k_p u_B = k_p \frac{\Delta_{\text{仪}}}{C}$ ,  $k_p$  为置信因子, 置信概率  $P$  与  $k_p$  的关系见表 3。

表 3  $P$  与  $k_p$  的关系

$P$	0.500	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997
$k_p$	0.675	1	1.65	1.96	2	2.58	3

几种常见仪器的质量指标在最大允差  $\Delta_{\text{仪}}$  内的分布与置信系数  $C$  的关系见表 4。

表 4 几种常见仪器的误差分布及置信系数  $C$ 

仪器名称	米尺	游标卡尺	千分尺	物理天平	秒表
误差分布	正态分布	均匀分布	正态分布	正态分布	正态分布
$C$	3	$\sqrt{3}$	3	3	3

目前人们对很多仪器的质量标准在最大允差范围内的分布性质有不同的说法, 对某些分布性质还不清楚。很多文献都把它们简化成均匀分布来处理。但必须指出, 只有服从正态分布的随机量落在正负标准差范围内的概率才等于 0.683。其他分布函数没有这种性质。

### ② 测量的估计误差

我们曾讨论过, 一般  $\Delta_{\text{估}}$  比  $\Delta_{\text{仪}}$  小得多, 所以将  $\Delta_{\text{仪}}$  作为一次测量结果的  $B$  类不确定度, 且在此范围内的置信概率  $P = 1$ , 但也有例外。以长度测量为例, 正常测量操作应是先将直尺的某一刻线对齐被测物的一端(记下该刻线的读数), 然后读取被测物另一端对应的米尺读数, 两读数之差即为被测物的长度值。在拉伸法测弹性模量实验中, 要测量钢丝长度以及反射镜与标尺间的距离(约 1m 左右), 但由于装置的原因, 很难将被测物两端与米尺的刻线对齐。这时测量结果的最大误差可估计为 1mm。在较暗的房间中做几何光学实验, 测量光学元件间距时, 也有类似情况。

在第 30 届国际物理奥林匹克竞赛的实验中, 需用一个  $T$  型金属物判断某杆质心所在。 $T$  型物的棱宽为 2.0mm, 杆在其上左右移动 1.0mm, 均能保持平衡。因此对质心位置的测量便有  $\Delta_{\text{估}} = \pm 1.0\text{mm}$ , 远大于钢尺的  $\Delta_{\text{仪}}(0.15\text{mm})$ 。

再如用电子秒表测时, 电子秒表内的石英晶体振荡频率的准确度在  $10^{-5}\text{s}$  以上。但实验者在判定计时开始和结束时会有 0.1 ~ 0.2s 的估计误差, 远远大于  $\Delta_{\text{仪}}$ 。

由于  $\Delta_{\text{估}}$  和  $\Delta_{\text{仪}}$  是相互独立的, 都不满足统计规律, 所以

$$\Delta_B = \sqrt{\Delta_{\text{估}}^2 + \Delta_{\text{仪}}^2} \quad (9)$$

若一个分量小于另一分量的三分之一, 则按式(9), 可以忽略较小的分量。

与仪器最大允差  $\Delta_{\text{仪}}$  类似,  $\Delta_{\text{估}}$  是估计读数的最大允差。关于测量误差在  $[-\Delta_{\text{估}}, \Delta_{\text{估}}]$  内的分布性质, 尚未见确切的说法, 可以预期与  $\Delta_{\text{仪}}$  有相同的性质。这时测量结果的  $B$  类标准不确定度为

$$u_B = \Delta_B / C \quad (10)$$

### (3) 合成标准不确定度和展伸不确定度

假设测量误差在  $[-\Delta_B, \Delta_B]$  范围内服从正态分布, 这时  $B$  类标准不确定度为  $u_B = \Delta_B / \sqrt{3}$ , 测量值的合成标准不确定度为



$$U = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad P = 0.68 \quad (11)$$

$t_{0.68}$  因子修正后有 ( $P = 0.68$ )

$$U_{0.68} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + u_B^2} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (\Delta_{ix}/C)^2} \quad (12)$$

将合成标准不确定度乘以一个与一定置信概率相联系的包含因子(或称覆盖因子) $K$ , 得到增大置信概率的不确定度, 叫做展伸不确定度(或扩展不确定度)。国家技术监督局 1994 年建议, 通常取置信概率为 0.95, 对正态分布,  $k_p = 1.96$ , 即  $K \approx 2$ , 由式(11)得展伸不确定度为

$$U_{0.95} = 2U_{0.68} = 2\sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad P = 0.95 \quad (13)$$

若置信概率为 0.99 ( $k_p = 2.58$ ), 取  $K \approx 3$ , 则展伸不确定度为

$$U_{0.99} = 3U_{0.68} = 3\sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad P = 0.99 \quad (14)$$

考虑到通常实际测量次数  $6 \leq n \leq 10$ ,  $t_{0.95} \approx 2.5$ ,  $\sqrt{n} \approx 2.8$ , 所以  $t_{0.95}/\sqrt{n} \approx 1$ ; 同样,  $K = 2$ ,  $C = 3$ ,  $(K/C)^2 \approx \frac{1}{2}$ , 所以式(12)为

$$U_{0.99} = \sqrt{(2u_A)^2 + (2u_B)^2} = \sqrt{(t_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2 + (k \frac{\Delta_{ix}}{C})^2} \quad (15)$$

$$\text{或} \quad U_{0.95} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{2}\Delta_B^2} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{2}\Delta_{ix}^2 + \frac{1}{2}\Delta_{估}^2} \quad (16)$$

式中,  $\sigma$  为  $n$  次测量列的标准差。

注意到测量结果不确定度的统计意义以及在上述操作中所做的许多近似, 在实际工作中, 常常忽略不同分布的差别(甚至也不知道是何种分布), 而把  $\Delta_{ix}$  和  $\Delta_{估}$  都当成均匀分布对待, 取置信因子  $C = \sqrt{3}$  代入式(15), 得到一种较为保守的估算公式, 考虑到  $(K/C)^2 \approx 1$ , 有

$$U = \sqrt{\sigma^2 + \Delta_B^2} = \sqrt{\sigma^2 + \Delta_{ix}^2 + \Delta_{估}^2}, \quad P \geq 0.95 \quad (17)$$

式(17)的计算值偏大是显见的(或者说置信概率偏小), 因为即使  $\sigma = 0$ , 按  $\Delta_{ix}$  的定义, 测量值在  $[-\Delta_{ix}, \Delta_{ix}]$  范围内的概率为 1。所以, 如使用式(17)计算, 置信概率应标为  $P \geq 0.95$ 。

用由均匀分布或三角分布得到的  $B$  类标准不确定度与服从正态分布的  $A$  类标准不确定度来计算合成不确定度时, 其结果与  $\Delta_B$  和  $\Delta_{ix}$  之比有关, 计算较为复杂, 这里不多介绍。

从以上计算公式的推演过程的诸多近似中可以看出, 测量结果的表达式给出了物理量的期望值及其在一定置信概率下的置信区间。所以, 置信概率和不确定度通常只取两位有效数字, 不确定度的首位数字大于等于 3 时, 也可取一位有效数字。

#### (4) 测量结果的表示

根据所用的置信概率, 测量结果的最终表达式为

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm U_{0.68}, & P &= 0.68 \\ x &= \bar{x} \pm U_{0.95}, & P &= 0.95 \\ x &= \bar{x} \pm U_{0.99}, & P &= 0.99 \end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $\bar{x}$  为不含系统误差的测量结果, 通常就是测量列的平均值, 不确定度取 1 位或 2 位有效数字, 测量值  $x$  的最后一位与不确定度的最后一位对齐。