中学数学中的証明

馬忠林

吉林人民出版社

中学数学中的証明　　　　　　馬 忠 林

吉林人民出版社出版　(长春市北京大街)　吉林省书刊出版业营业許可証出字第1号

长春新华印刷厂印刷　　　　吉林省新华书店发行

开本：787×1092 1/32　印张：3/4　字数：17,000　印数：1—20,000册

1960年4月第1版　　1960年4月第1版第1次印刷

統一書号：13091·24　　　定价(8)：0.10元

目　次

前　言

很多的中学生在学习几何課时，感到証明定理非常吃力，他們不太了解几何定理为什么需要証明；在証明时不知道从哪儿下手；不明确所要証明的結論是什么，因此，就不知道証明到什么地方为止。至于在証明过程中引用論据的錯誤，各个判断間邏輯关系的脫节，就更是屡見不鮮的了。还发現很多中学毕业生，对証明一般的几何定理，具有一定的能力，但是对哪些定理适于用哪种方法来进行証明，哪些命題可以用来作为証明的論据，也还不是十分明确的。我們也发現有些大学一年生不会运用数学归納法，个别人对反証法的使用也不太熟練。所有这些問題，都說明了在我們的中学数学教学中对“証明”这項极关重要的基本訓練，还須加强工作。

中学几何学的証明是从等腰三角形的性质及三角形全等定理的証明开始的。这里首先是运用了重合法，用这种方法証明定理是从在这以前的凭实驗观察来肯定图形的某些性质，过渡到論証的开始。要使学生很好地接受它顺利地开始証明工作，是要費一番工夫的。为此，首先就是使学生很好地認識到証明的必要性，逐步地掌握証明的規則和方法。

証明在数学中的重要作用，可以提出很多在科学上不可忽視的极为重要的理由。但对中学生来說，倒不需要从这些方面加以說明，只从教材內容的发展及学生心理上的要求，进行必要的論証就足够了。

中学几何課中在提出証明以前，进行了很多观察、測量图形的工作，在这中間势必发生观察中的錯覚及測量中的誤差。

因此，在肯定某些命題的眞实性时，必要遇到一些困难，而这正是促使学生要求进行証明的心理基础，也是教材发展的必然結果。

在講“三角形三內角的和等于二直角”这个定理之前，讓学生用量角器实际进行測量这些角的和，由于誤差的存在，不易肯定定理的結論，以后再加以邏輯地証明，就易使学生了解証明的必要性和它的作用。

在学生开始学习証明时，使他們了解証明的必要性及其科学意义，是开始这項培养工作的第一步。

培养学生有足够的証明能力及使他們掌握有关証明方面的科学方法上的知識，是中学数学教学中的一項重要工作，这对学生巩固地修得数学知識，邏輯思維的发展，以及克服对定理的死記硬背傾向等方面都起着重大作用。所以，在中学数学教学中，至少应作到以下几点：

1. 使学生明确地了解証明的結构，証明的規則，培养他們有足够的能力証明教科書中的定理及习題。

2. 使他們能掌握各种邏輯推理方法，特別是演繹法和归納法的运用。

3. 使学生能針对各种不同性質的定理，运用各种不同証明方法进行証明。

使学生了解：直接証明与間接証明在本質上的区別和它們各个的邏輯推理結构。

应充分强調在証明和作图步驟中，分析和綜合的相互作用。

4. 应随时更正和防止学生們在証明中易犯的錯誤。特別是在推理过程中各判断間的邏輯关联性上所犯的錯誤。

为了达到上述目的，我想談下面几个問題，供教师們在工作中参考。

一、証　　明

証明是借助于一些其眞实性已經确定了的命題来論述某一命題的眞实性的推理过程。

在每一門科学中，很多的眞理（如数学中的定理）都不是与其他眞理不相关联而被判明为眞理的，是通过已确定出的某些命題（公理、定义）和已証明过的眞理（数学中的定理）的必然的邏輯（推理）而判明其为眞理的。因此，証明是肯定一切論断的具有科学性的和必需的手段。

科学眞理需要証明，乃是科学思想的一个根本性的和最重要的特点之一。在科学的討論或証明过程中，不容有任何所謂感官的根据和无稽之談，任何一个論断，只有当它被証明了的时候，才能成为科学的論断。

数学定理只有在証明以后，才具有无可辯駁的說服力和眞实性，才能使人們建立巩固的科学信念。

强調証明的作用，是科学工作者极为重要的科学观点，因为証明是邏輯学的基本規律之一——理由充足律的結果。这个規律要求我們在提出任何論断时都应当是有根据的。也就是說要使所得出的論断有足够的有力的依据，来証实論断的正确性，以及它与客观实际的一致性。

任何一个証明都有：1）論題；2）論据（証明的根据）；和3）論証（証明的方法）三个組成部分。

論題是要借助于某个証明来弄清眞伪的那个判断，是一个有条件和結論的命題。在証明之前充分审查論題是一項非常重

要的工作，它可以指示出証明的方向和目的。有些中学生証明时目的不明确，不知道証明什么，不知道証到什么地方为止，这种情况的发生都是审题不够的結果。

在証明时所依据的，以及从中必然得出被証明論題眞实性的一切命題，都叫做証明的論据。教师必須使学生清楚地明白为了使証明是步步有据的，并满足理由充足律，所以論据不容是任何主观臆想的事实，或引用所謂“显而易見”的道理。我們发现中学生在証明时引用自認为可靠的論据，实际却是他們臆断的或他們自認为大致可靠的事实，导致錯誤的結論，使証明不能很好的完成。所以必須使学生十分明确論据应是一些已經规定了的，或已証明过的不容有任何疑問的命題。如，定义、公理、以及証过的定理等都可以作为数学証明中的有力論据。也惟有如此，証明才能形成一个正确的推理，从而得出正确的結論。

論題的正确性是根据正确地論据，进行一系列的推理而得到肯定的。这个推理的联貫性，或过程，叫做証明的方法或論証。因此，它与証明的其他两个組成部分(論題、論据)不同，它有自己的特点。論題和每个論据，都是个别的单一命題，相反地，論証向来都不是个别的命題，也不是个别命題的簡单总和，而是各个命題的能导致一定結果的邏輯联系，是一連串的邏輯推理。

二、推理、演繹推理

数学知識大部分是通过推理得到肯定的。数学中定理的証

明，就是具体体现这个目的的。推理是認識眞理的重要手段。

推理是我們用以从两个或几个判断中获得一种新的判断的邏輯方法。

例如：1）所有边数相同的正多边形是相似的；

2）所給的两个正多边形边数是相同的；

3）所給的两个正多边形是相似的。

由于数学知識多从判断推理获得結論，因此应把这些判断用一定方法联系起来。但絕不是可从許多偶然的判断中作出結論来。从上例可以看出：由1）、2）两个正确的判断可得出3）来，但不可能由互不联系的两个判断：

1）凡直角皆相等；

2）尾数为零的数是二的倍数。

中得出任何結論。

所以，推理总是由一些互有联系的判断所形成的邏輯方法。

推理有演繹推理和归納推理的区别。但在人們的思維活动当中，它們之間也还是互有联系的。

演繹推理是从普遍（一般的）到特殊的思維方式，它具有一个三段論法的形式。

三段論法或演繹推理，是从两个判断得出第三个判断的一种推理，而两个判断中的一个一定是全称判断（一般的）。

例如：1）矩形的对角綫相等；

2）正方形是矩形；

3）正方形的对角綫相等。

三段論法中所包括的概念，叫做三段論法中的名詞。三段論法中共有三个名詞，在上例中它們是“矩形”、“对角綫”和“正方形”。作为結論主詞的那个（正方形）叫作小詞，用字

母 S 表示它； 作为結論賓辞的那个（对角綫）， 叫做大詞，用字母 P 表示.

两个前提所包含的，在結論中消失的那个名詞（例中的矩形），叫做中詞，用字母 M 表示. 中詞在大詞小詞中間起着联系作用.

包含大詞的前提叫做大前提（例中的“矩形的对角綫相等”）；包含小詞的前提叫做小前提（例中的“正方形是矩形”），三段論法中的各前提永远是簡单的判断.

因此，三段論法是以两个簡单的判断作为前提的演繹推理，在这种推理中根据在前提中大詞、小詞对于中詞的关系，便确定出在結論中大詞和小詞中間的联系，同时中詞在結論中消失不見.

三段論法总服从一些确定的規則，而这些規則是由三段論法的公理所决定的.

三段論法的公理可表述如下：

如果知道 P 性質属于（或不属于）一类对象中的每个对象，那末这个性質也将属于（或不属于）該类的任一个别对象.

在前例中，若知道性質 P（对角綫相等）属于任何矩形，那么要知道了正方形是矩形的一种之后，則它必有性質 P（对角綫相等）.

由上述三段論法各詞間的关系，可以以各概念相应的外延間的关系表示出来，如概念 M 的外延包含在 P 的外延中，而概念 S 的外延又包含在概念 M 的外延中，那么概念 S 的外延必然也包含在概念 P 的外延中.

由上例可知，P 可代表具有相等对角綫的四边形的外延，M 是矩形的外延，S 为正方形的外延. 用欧拉圓可表示如下：

（1）凡 M 为 P；

（2）凡 S 为 M；

（3）結論：凡 S 为 P.

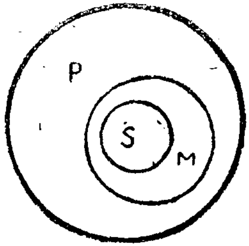

图 1

上述的三段論法公理中，对于 P 性質不屬于一类对象中的任一对象时，可用下面例子說明它．例如：

1）凡两对角的和不等于两直角的四边形不能內接于圓．

2）非直角的平行四边形对角的和不等于两直角．

3）非直角平行四边形不能內接于圓．

若用 P 表示不能內接于圓这类的四边形，用 M 表示两对角的和不为两直角的四边形，用 S 表示非直角的平行四边形时，上例用欧拉圓可表示如下：

（1）凡 M 都不为 P；

（2）凡 S 为 M；

（3）凡 S 都不为 P.

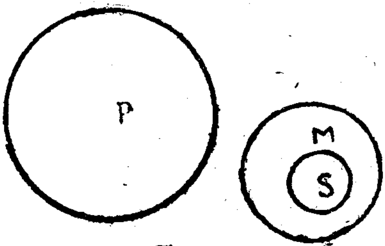

图 2

数学中的絕大多数演繹推理，不是按第一种形式，就是按第二种形式来进行的．

演繹推理被广泛地使用在用各种証明方法的証明当中，它是易于被人們所理解的．在証明的推理过程中，就体現着一系列的三段論式結論的邏輯連貫性．一般地，只写出三段論式的結論而略去其前提，这些結論（判断）即形成一个严密的邏輯推理．

三、直接証明

直接証明是就論題本身，利用推理而肯定其結論真实性的証明方法。

从定理的假設（条件）出发，引用一系列的論据（定义、公理、定理），从而得出定理結論的証明方法，叫做綜合法。这种方法在中学几何里使用得較多。

例如，"在同一三角形 ABC 中对大边的角也大"这个定理，用綜合法是这样进行証明的：

在三角形 ABC 中，若 $AB>AC$，在边 AB 上取 $AD=AC$（图3），則 $\angle ADC=\angle ACD$（$\triangle ADC$ 是等腰三角形）。但由于 $\angle C>\angle ACD$（公理），所以 $\angle C>\angle ADC$。又因为 $\angle ADC>\angle B$（定理），所以 $\angle C>\angle B$。

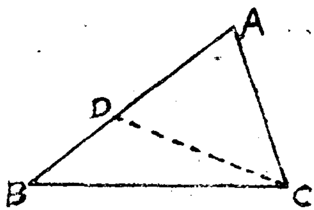

图 3

这个定理就这样由已知条件出发，推証出結論来，而这个定理的論証过程是由四个推理所組成的，且每后一个結論都是以前者为其充分条件。因此，結論才是正确的。而每一个推理又都是一个由三段論式演繹出来的：

1. 所有等腰三角形底角相等。
   三角形 ADC 是等腰三角形，
   所以 $\angle ADC=\angle ACD$。
2. 任何一个角的全体都大于其一部分。

$\angle ACD$（等于角 ADC）是$\angle C$ 的一部分，
所以，$\angle ACB$ 大于$\angle ACD$（等于$\angle ADC$）。

3. 任何一个三角形的外角大于其不相邻内角．
$\angle ADC$ 是三角形 BDC 的外角，
所以，$\angle ADC$ 大于角 B．

4. 甲量大于乙量，乙量大于丙量时，甲量大于丙量．
$\angle ACB$ 大于$\angle ADC$，而$\angle ADC$ 又大于$\angle B$，
所以$\angle ACB$ 大于$\angle B$．

在推理过程中，实际上只是写出了各个推理的結論，但这些結論是由上述的三段論式中得来的．特别是对某些較复杂定理的証明应注意这些結論的来源，在証明过程中虽只写其結論，但要充分注意它們之間的邏輯相关性．

例如，在高中立体几何里，对于直綫垂直于平面定理的証明，用綜合法証明可按下列的各个步驟来进行．

定理 已知一直綫 MA 与平面 α 相交，并垂直于平面 α 上的二已知相交直綫 AB 和 AC 时，則直綫 MA 将垂直于平面 α 上的任意直綫 AK．

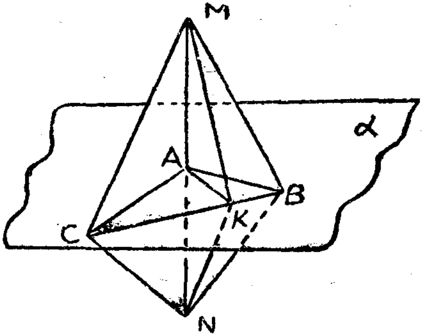

图 4

証明 在直綫 AM 上向平面 α 的两側截取綫段 $MA=NA$（图 4）．在直綫 AB 和 AC 上从点 A 起取点 B 和 C．連結 BC 令其与 AK 的交点为 K．将点 M 和 N 分别与点 B、C 和 K 連成綫段．

1. 考察$\triangle MAB$ 和$\triangle NAB$，$MA=NA$，AB 是公用

边，$\angle MAB=\angle NAB$（直角）．$\therefore\triangle MAB\equiv\triangle NAB$，由此得出：$MB=NB$．

2．仿1的情形，可得出$\triangle MAC\equiv\triangle NAC$，$MC=NC$．

3．考察$\triangle MBC$和$\triangle NBC$，这里$MB=NB$，$MC=NC$，边BC公用，所以$\triangle MBC\equiv\triangle NBC$，由此得出：$\angle MBK=\angle NBK$．

4．考察$\triangle MBK$和$\triangle NBK$，这里$MB=NB$，边BK公用，$\angle MBK=\angle NBK$，所以$\triangle MBK\equiv\triangle NBK$，由此得出：$MK=NK$．

5．考察$\triangle MAK$和$\triangle NAK$，这里$MA=NA$，边AK公用，$MK=NK$，所以，$\triangle MAK=\triangle NAK$．由此得出：$\angle MAK=\angle NAK$，但$\angle MAK$和$\angle NAK$互为补角，所以，它們都是直角，定理得証．

与綜合法相反，由論题的結論出发經过一系列的推理，达到已知条件的証明方法，叫做分析法．这种方法的特点是从所要証明的論題的結論出发，找出使它成立的充分条件．即找出哪一个判断能使已知定理的結論成立，并依次追溯上去，最后达到已知定理的条件．这样，就可以得出一系列的推理，而每后一个判断都和前一个是等价的命題．因此，这就充分地說明，这个最后結論的正确性是由于已知条件所确定的．

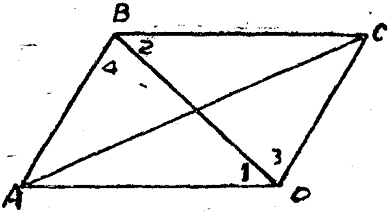

图 5

例如，在証明“两組对边相等的四边形，是平行四边形”这个定理时，可采用以下步驟进行証明．

首先，要求出为了使四边形 $ABCD$（图5）是平行四边形的充要条件是什么，这就是 $AD \parallel BC$、$AB \parallel DC$. 这样依次追溯上去，为了使 $AD \parallel BC$ 和 $AB \parallel DC$ 成立，必有 $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$. 为了使这个結論成立，必有$\triangle ABD=\triangle BCD$. 最后，为了使这两个三角形全等，$AB=CD$，$AD=BC$（$BD$ 公用）就可以了，而这两个等式，恰是定理中已知的条件.

由于这一系列的推理，每相邻的两个命題都是等价的，所以这个定理的結論是正确的，因为由相反順序即可由其条件推出結論.

由此我們可以看出，分析法和綜合法，它們在論証过程中，其推理的順序恰是相反的. 我們也可以由下面用綜合法已証过的例子，再用分析法进行証明，以說明两种不同方法的特点.

用分析法証明直綫垂直于平面的定理时，可首先从命題的結論出发，考虑使它成立的条件.

$\angle MAK$ 和 $\angle NAK$ 是邻角(图4)，为了要証明 MA 和 AK 垂直，需要証明这两个角相等.

为了証明这两个角相等，应找出含有这两个角的三角形幷証得它們是全等的. 作 $AM=AN$，在 AK 上选任意点 K，幷作三角形 MAK 和 NAK. 这时，$\angle NAK$ 和 $\angle MAK$ 包含在这两个三角形里，我們只要証明这两个三角形全等，也就証明了 AK 垂直于 MN.

为此，現在可以利用定理的条件($MA \perp AB, MA \perp AC$)，幷过平面 α 上的一点 K 引任意直綫，它与 AB 和 AC 的交点为 B 和 C. 再引直綫 MB、MC、NB 和 NC.

为了証明$\triangle MAK$ 和 $\triangle NAK$ 全等，我們看到，在这

两个三角形里 $MA=NA$, AK 是公用边，因此，能証得 $MK=NK$ 就可以了. 这就需要証明：两个$\triangle MBK$ 和 $\triangle NBK$ 全等，或$\triangle MCK$ 和 $\triangle NCK$ 全等.

現在，考慮証明$\triangle MBK$ 和 $\triangle NBK$ 的全等.

我們看到它們有公用边 BK, 因此，还須要找到两个相等的边或角.現在,由于很易証明两个$\triangle MAB$ 和$\triangle NAB$ 全等，所以，$MB=NB$.因此，只要能証明,角 MBK 和 $\angle NBK$相等，則$\triangle MBK$ 和 $\triangle NBK$ 就全等了.

但为了証明这两个角的相等，也还必需証明包含他們的两个三角形的全等,那就是$\triangle MBC$ 和$\triangle NBC$. 在这两个三角形里，边 BC 是公用边，$MB=NB$, 只要能再肯定边 $MC=NC$ 就可以了. 但这一点是很明显的，因很易証出：$\triangle MAC$ 和 $\triangle NAC$ 是全等的（定理的条件）.

分析与綜合是思路不同的两种邏輯思維方法，它們也象演繹和归納一样，是認識同一事物的两个方面，在很多場合它們是互相联系而不可分割的. 当我們寻求一个眞理或为証明某个数学定理时，用分析法进行必要的分析，以寻求証明方法，是非常有利的. 虽然它們也往往作为科学的証明方法而被单独地使用着，但在任何的邏輯思維当中把分析和綜合对立起来是不对的.

四、归納推理、数学归納法

归納推理与演繹推理不同，它是由特殊到一般的思考过程. 也就是說它是由某些单称或特称的前提得到一般結論的推理.

归納推理在人們发見科学規律和分析、概括事物发展規律过程中，广泛地被使用着。

通过归納推理进行概括的过程中，可能有两种情况：

第一种情况，就是被概括的同类事物的数量是有限的。因此易于根据这所有的个别事实，逐一研究，再进行概括而得出一般性的結論。

这种归納推理方法叫做完全归納法。

例如，在几何学里我們要証明："圓周角和它所对的弧的一半的量是相等的"这个定理时，应把它分成三种情形来一一証明：1）圓心在圓周角的內部；2）圓心在圓周角的一个边上；3）圓心在圓周角的外部。当証得定理在这三种个别情况下都正确时，最后就肯定了其一般性的結論。

要想作出完全归納法的推理，第一，必須确知所研究的对象或現象的数量；第二，必須确認所概括的那一个属性是每一个数学对象所固有的。

根据完全归納法的前提，可知完全归納法的結論可以是全称肯定的判断，也可以是全称否定的判断。如果前提是肯定的，則結論也是肯定的；如果前提是否定的則結論也是否定的。

用完全归納法进行推理，是由所研究对象的各个特殊方面的結論，而概括出一般性結論。所以它是非常可靠的科学方法，在数学中它是比較广泛地被使用着。

第二种情况，就是同类事物的数量是无限多的，或者是既使是有限的也不可能把每一事物都分别的考察到。在这种情形下，只能基于研究一部分同类事物，来作出一般性的結論。这种归納推理方法，叫做不完全归納法。这种方法，不能作为科学証明方法来应用，因为它会使人們怀疑那些未經考察的个别事物的性质是否合乎一般結論的要求。在数学中这种情况是存

在的．在科学研究当中，为了很好地归納概括現实材料，从而得出一般性的結論，較多的个别材料的初步結論，也还是能概括出正确結論的方向，有利于工作的进行．

但在数学里，有些定理中包含着需要考察的同类事項无限之多，而我們又必須証得其一般性的結論，这就需要一种科学的証明方法．

数学归納法是数学証明中的一种特殊方法．这种証明方法虽然也是根据某些个别情况的考察，而作出普遍的結論，但它与不完全归納法不同，这个結論是根据归納法原理进行証明而肯定的．所以它总是十分正确的．因此，数学归納法是完全归納法．

在数学里，由某一个命題的正确完全有可能肯定对一系列的特殊情况都是正确的，但并不一定对一般都是正确的．恰是这种命題就包含着我們需要考察的对象无限之多，无法作一一的考察，因此，对这类命題作一般性的結論，数学归納法就起着它特殊的重要作用．

例如，在求$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$的$n$个奇数的和时，由若干个别情况，可以看出：

$$S_1=1$$
$$S_2=1+3=4=2^2$$
$$S_3=1+3+5=9=3^2$$
$$S_4=1+3+5+7=16=4^2$$
$$S_5=1+3+5+7+9=25=5^2$$

但我們还不可能不加証明地作出其n項的和等于n^2的結論．所以不能这样作，是因为其特殊情况虽然到第五項甚至更多的項都正确，但不能保証一般都是正确的．