高等学校教学用书

理論力学教程

下册 第二分册

Л. Г. 洛强斯基
А. И. 路尔叶 著
吳礼义等譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

理論力学教程

下册 第二分册

Л. Г. 洛强斯基, А. И. 路尔叶著
吳 礼 义 等 譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Гостехиздат)出版的洛强斯基(Л. Г. Лойцянский)和路尔叶(А. И. Лурье)合著的"理論力学教程"(Курс теоретической механики)下册1948年版譯出。原书經苏联高等教育部审定为高等工业学校教学参考书。

本书分两册，上册包括靜力学和运动学，下册是动力学。中譯本上、下册又各分两个分册出版。

参加本分册翻譯与校訂工作的有北京航空学院吳礼义、黃克累、高为炳及郑元熙等同志，参加翻譯工作的另有陈亚洪、馬宗祥等同志。

理 論 力 学 教 程

下册　第二分册

Л. Г. 洛强斯基，А. И. 路尔叶著

吳 礼 义 等 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上 海 市 印 刷 五 厂 印 裝

新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·377　开本 850×1168 1/32　印张 8 8/16

字数 266,000　印数 16,701—18,700　定价(6) ¥0.85

1958年1月第1版　1961年11月上海第8次印刷

目　录

第五篇　动力学專門問題

第五篇　动力学專門問題

第二十三章　相对运动动力学

§142. 相对运动动力学基本方程式 拉格倫日方程式的应用

假定某一坐标系 $\overline{Oxyz}$ 可以取为伽利略系，于是在这坐标系中点的运动可以由以下微分方程式来决定：

$$m\overline{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{F}, \tag{1}$$

这里 $\overline{\boldsymbol{w}}$ 是点相对于伽利略系的加速度。为了写出对于另一个坐标系 $Oxyz$ 的运动方程式，而这坐标系又以給定的形式相对于伽利略系而运动，我們回忆一下 $\overline{\boldsymbol{w}}$ 与点在 $Oxyz$ 系中的加速度 $\boldsymbol{w}$ 之間的运动学关系：

$$\overline{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}_e+\boldsymbol{w}_c, \tag{2}$$

这里，$\boldsymbol{w}_e$ 是牽連加速度，也就是所考慮的动点在某一瞬时所經过的系 $Oxyz$ 上的点的加速度（相对于伽利略系），$\boldsymbol{w}_c$ 是点的哥里奥利斯加速度，它是由于系 $Oxyz$ 相对于伽利略系 $\overline{Oxyz}$ 有轉动而产生的。

如以 $\boldsymbol{\omega}$ 表示系 $Oxyz$ 的轉动角速度向量，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示它的角加速度向量，$\boldsymbol{w}_0$ 表示原点 O 相对于伽利略系的加速度向量，$\boldsymbol{r}$ 表示动点对系 $Oxyz$ 的原点 O 的向徑，而 $\boldsymbol{v}$ 表示点在动系中的速度向量，那么，从运动学知：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{w}_e&=\boldsymbol{w}_0+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),\\ \boldsymbol{w}_c&=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}。\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

以(2)式中加速度 $\overline{\boldsymbol{w}}$ 的值代入基本等式(1)中，得：

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{w}_e-m\boldsymbol{w}_c; \tag{4}$$

令 $$-m\boldsymbol{w}_e=\boldsymbol{S}_e,\ -m\boldsymbol{w}_c=\boldsymbol{S}_c,$$

于是等式(4)成为:

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{S}_e+\boldsymbol{S}_c。 \tag{5}$$

向量 $\boldsymbol{S}_e$ 和 $\boldsymbol{S}_c$ 起惯性力的作用; $\boldsymbol{S}_e$ 称为**牽連慣性力**, $\boldsymbol{S}_c$ 称为**轉动力或哥里奧利斯力**。从公式(5)可以得到一个結論:**相对运动的动力学微分方程式**,亦卽相对于非伽利略系的运动方程式,**其結構与伽利略系中的运动方程式相同,只是在直接施加力之外还要加入牽連慣性力与哥里奧利斯慣性力**,这些慣性力是和相对坐标系的运动以及点相对于該系的运动有关的。

如果系 $Oxyz$ 相对于伽利略系 $\overline{Oxyz}$ 作等速直綫移动,那么 $Oxyz$ 系也就是伽利略系了,这就是說,在这系中的运动方程式和在伽利略系中的沒有什么区别; 实际上,在这种情况下 $\boldsymbol{S}_e=\boldsymbol{S}_c=0$, 所以方程式(5)和(1)重合。

应用公式(3),我們可以把慣性力写成明显的形式:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{S}_e&=-m\boldsymbol{w}_0-m\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\ \boldsymbol{S}_c&=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}\end{aligned}\right\}。 \tag{6}$$

在系 $Oxyz$ 相对于系 $\overline{Oxyz}$ 作平面运动的場合,向量 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}$ 而

$$\boldsymbol{S}_e=-m\boldsymbol{w}_0-m\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+m\omega^2\boldsymbol{r};$$

当系 $Oxyz$ 繞定軸或繞相对于伽利略系作等速直綫移动($\boldsymbol{w}_0=0$)之軸作等速轉动($\varepsilon=0$)时,我們得到

$$\boldsymbol{S}_e=m\omega^2\boldsymbol{r},$$

——这就是**离心力**。

若系 $Oxyz$ 作移动($\boldsymbol{\omega}=0$)或由于約束的性質点被迫作平行于轉动軸的移动($\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=0$),則在相对运动公式中不含有哥里奧利斯力。

从相对运动方程式很容易求得相对平衡(靜止)的方程式。为此,只要在公式(5)中令 $\boldsymbol{w}=0$, $\boldsymbol{v}=0$ 就行了,于是我們有相对平衡方程

式：

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{S}_e=0。\tag{7}$$

对于一个点所討論的一切情况，当然，都可以推广到任意的点系上去。加上慣性力之后，我們就可以把在非伽利略系中对运动的研討，归結为前述对于伽利略系的动力学方法和定理之应用了。

在某些情况下，問題还可以簡化。例如，不必計算慣性力就可以把动量矩定理应用到作移动的非伽利略系上去，这个系的原点是在点系的慣性中心上的。在一般情况下就必須先加上慣性力，然后再应用已知的动力学方法。

所述的方法与靜态动力学的方法很少区别。事实上，在研究相对运动的时候，把慣性力（牽連慣性力和哥里奥利斯力）加到点上去，我們就可以应用通常的运动方程式；如再加上对应于相对加速度的慣性力

$$\boldsymbol{S}=-m\boldsymbol{w},$$

就完全变成靜态动力学方法的应用了，这就是説，变成在实际施加力以及由下列三項所組成的慣性力

$$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}_e+\boldsymbol{S}_c$$

之作用下，点的虛假平衡的研究了。

除了上述方法之外，拉格倫日方法对相对运动的研究也具有重大的实际意义。

拉格倫日方程式应用到相对运动动力学上的想法是極簡單的。

既然非伽利略系 $Oxyz$ 相对于伽利略系 $\overline{Oxyz}$ 的运动已經給定，那么动点或点系相对于伽利略系之坐标 $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ 可以表示为非伽利略系中笛卡兒坐标的函数，或非伽利略系中广义坐标的函数。

取后者为系統的广义坐标，我們用通常的方法列出拉格倫日方程式，并解之，卽可求得所需的以时間的函数表示的坐标，亦卽相对运动方程式。

应用这个在各方面都感到方便和簡單的方法的时候，可以不必引

用虚構的慣性力。它們自动地列入于拉格倫日方程式左边的运动学部份中。

例題 210. 一已知其形狀的曲綫以等角速繞鉛垂軸轉动，試求一重質点在这曲綫上的相对平衡条件。当轉动的角速度給定时，如要使点在曲綫上的任何位置都能平衡，問曲綫应具有何种形狀？(圖 131)。

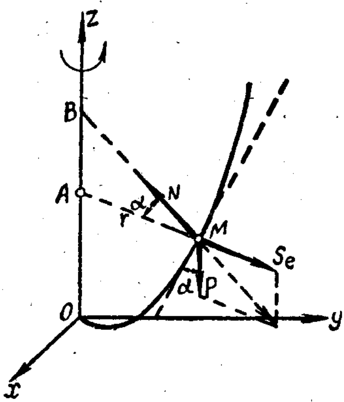

圖 131

本題的解法就是靜态动力学方法的应用。M 点在以下諸力的作用下处于"平衡"狀态：重量 p，离心力

$$S_e=\frac{p}{g}\omega^2 r$$

和曲綫反作用力 N，其方向可以認定是沿曲綫的法向。写出在切綫上投影的平衡条件后，得

$$p\cos\alpha-S_e\sin\alpha=0,$$

或以 S_e 的值代入，得

$$\omega^2 r\operatorname{tg}\alpha=g。$$

綫段

$$r\operatorname{tg}\alpha=\overline{AB}$$

是 M 点所在的曲綫

$$r=f(z)$$

的次法距，而平衡条件由以下等式給出：

$$\overline{AB}=\frac{g}{\omega^2}。\qquad (*)$$

令

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dr}{dz},$$

我們改写平衡条件如下：

$$r\frac{dr}{dz}=\frac{g}{\omega^2}。\qquad (**)$$

在这一方程式中，將 r 代以 z 的函数之后，即可得到在 ω 給定时可發生平衡的縱坐标 z_0。

为解第二問題，我們来积分方程式(**)；于是就可以求得拋物綫方程式：

$$r^2=\frac{2g}{\omega^2}z;$$

拋物綫参数(坐标原点位于曲綫与 z 軸的交点处) 等于 $\frac{g}{\omega^2}$。当这拋物綫以角速度 ω 轉动时，重小球將在該綫上处于相对隨遇平衡狀态。維持軸以一定角速度轉动的拋物綫調速器，其構造原理卽基于此。

大家知道,轉动容器中液体的自由表面也形成具有相应的参数的旋轉拋物面。

例題 211. 轉速表的構造是这样的:在轉动軸上(圖 132)用鉸鏈固定兩根杆子,杆端附有重量为 p 的重物 M。当軸以某一角速度 ω 轉动时,重物对称地散开并与軸成角度 φ,同时螺綫形彈簧 f 阻止重物离开轉动軸。現需求角度 φ 与軸的角速度 ω 之間的关系。

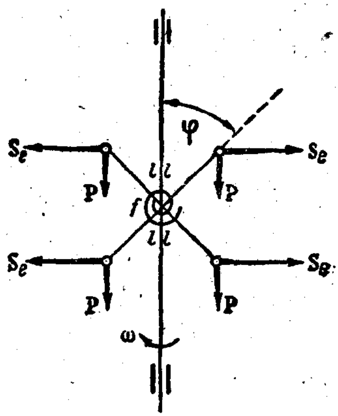

圖 132

为解这个問題,我們列出重物在重力、离心慣性力 $S_e=\frac{p}{g}r\omega^2=\frac{p}{g}l\omega^2\sin\varphi$ 和彈簧的彈性力作用下,在轉动平面中的相对平衡方程式。

以 M_f 表示彈簧的恢复力矩,它等于:

$$M_f=-c(\varphi-\varphi_0),$$

这里 c 是彈簧的剛性系数,以每弧度仟克·米表示之,φ_0 是彈簧未扭前的起始角度。給系統以一可能位移——令杆子轉过一个小角度 $\delta\varphi$,我們写出功的方程式:

$$M_f\delta\varphi+4S_el\cos\varphi\delta\varphi=0,$$

而重力的功等于零;从以上方程式,我們得到

$$c(\varphi-\varphi_0)=4\frac{p}{g}\omega^2l^2\sin\varphi\cos\varphi。$$

从这一等式求得:

$$\omega=\sqrt{\frac{gc(\varphi-\varphi_0)}{2pl^2\sin 2\varphi}}$$

或轉換成每分鐘的轉数:

$$n=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{2}}\sqrt{\frac{c(\varphi-\varphi_0)}{pl^2\sin 2\varphi}}。\qquad (*)$$

表示某一轉速表(即已知 c、p 与 l 时)的 n (或 ω) 和 φ 之間关系的曲綫称为轉速表的特性曲綫。

有了特性曲綫,就可以决定在何种角速度下轉速表可以工作。为此,必須使角度 φ 随轉速 n 的增大而增大,就是說使

$$\frac{dn}{d\varphi}>0。$$

根据(*),这一条件成为以下形式:

$$\sin 2\varphi>2(\varphi-\varphi_0)\cos 2\varphi。\qquad (**)$$

若 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$,則 $\cos 2\varphi>0$,我們就有条件:

$$\mathrm{tg}\,2\varphi>2(\varphi-\varphi_0),$$

在这个角度区域内，当任意 $\varphi_0>0$ 时，以上条件均能满足。

若 $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，則保持不等式(**)的原来形式不动，我們注意到，永远要 $\varphi>\varphi_0$，因为如果不是这样，根据(*)，n 就会是虚数了。当 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时，不等式(**)显然成立。当 $\varphi>\frac{\pi}{4}$ 时，左边部份是正的，而右边部份是負的，因此在全部这个区域内不等式(**)都能成立。

負的 φ_0 角的情形，却是另一种样子。若 $\varphi_0<0$，則方程式

$$\sin 2\varphi=2(\varphi-\varphi_0)\cos 2\varphi \text{ 或 } \operatorname{tg} 2\varphi=2(\varphi-\varphi_0)$$

显然有一个根 $$\varphi=\varphi_1,$$

于是 $$\text{当 } \varphi<\varphi_1 \text{ 时，} \quad \frac{dn}{d\varphi}<0,$$

$$\text{当 } \varphi>\varphi_1 \text{ 时，} \quad \frac{dn}{d\varphi}>0。$$

角度 $\varphi=\varphi_1$ 称为**靜力点**，区域 $\varphi<\varphi_1$ 为轉速表的**非穩定区**，而 $\varphi>\varphi_1$ 为轉速表的穩定区。

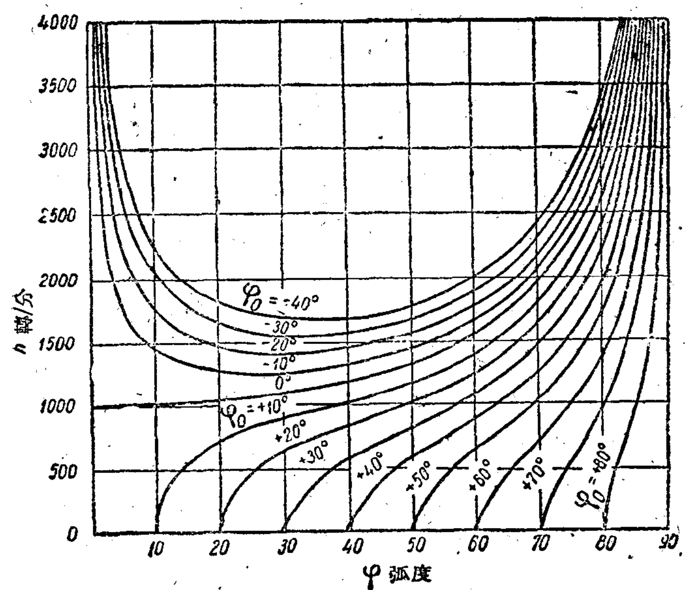

圖 133

圖 133 中画出了轉速表的特性曲綫；上述特性曲綫的性質这里都清楚地表示出来了。圖 134 所示的是賀恩(Горн)轉速表的一般構造簡圖。类似这样的構造也可在其他仪器中采用，例如用来定風速的翼式風速計就采用它。

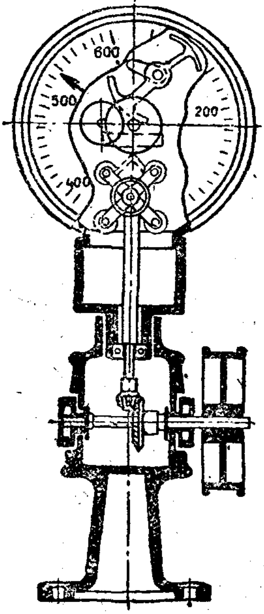

圖 134

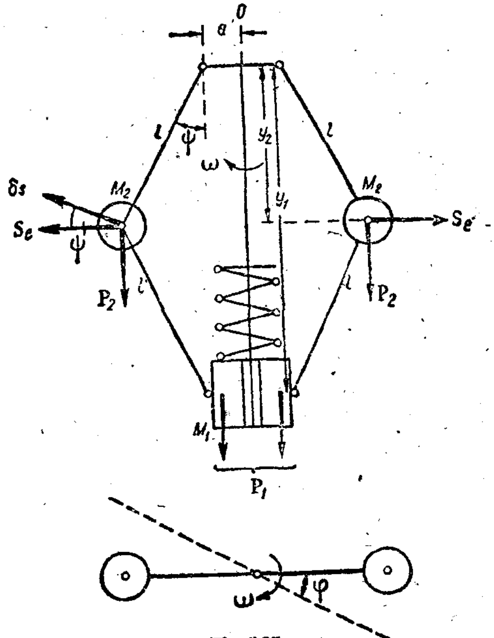

圖 135

例題 212. 某离心調速器的構造如圖 135 所示，在这調速器中用彈簧支持着結合管。設調速器以等角速轉动，試求調速器的角速度与杆同轉动軸的交角 ψ 之間的关系。

每一 M_2 球的重量以 p_2 表示，結合管 M_1 的重量以 p_1 表示，杆(其長为 l) 与轉动軸的交角以 ψ 表示。杆重可以略去不計。其次假定，当調速器在角 $\psi=0$ 的位置上时，彈簧不受压縮；而彈簧的剛性系数为 c。于是，在圖示調速器位置上，彈簧的彈性力 (在方向沿轉动軸而朝下的 OY 軸上之投影) 等于：

$$F_y=2c(l-l\cos\psi)=2lc(1-\cos\psi)。$$

为了求得机構相对于轉动平面的相对平衡条件，我們应用靜态动力学的方法。在每一球上加离心慣性力

$$S_e=\frac{p_2}{g}(a+l\sin\psi)\omega^2,$$

并写出重物的重力 p_2、結合管的重力 p_1、彈性力 F 和球的离心力 S_e (結合管的轉动慣性力显然是沿半徑方向的，并相互平衡而抵銷) 的元功方程式。使机構对应于角度 ψ 的变化 $\delta\psi$ 作一可能位移；这时結合管 M_1 的可能位移决定于公式：

$$\delta y_1=\delta(2l\cos\psi)=-2l\sin\psi\delta\psi;$$

重物的可能位移是 $\delta s=l\delta\psi$，而这一位移与力 S_e 的方向成一角度 ψ，重物 M_2 的縱坐标的变化等于 $\delta y_2=\delta(l\cos\psi)=-l\sin\psi\delta\psi$。

功的方程式具有以下的形式：

$$p_1\delta y_1+2p_2\delta y_2+F_y\delta y_1+2S_e\delta s\cos\psi=0。$$

把所有的力和可能位移的值代入上式中，得：

$$-2p_1l\sin\psi\delta\psi-2p_2l\sin\psi\delta\psi-4l^2c\sin\psi(1-\cos\psi)\delta\psi+$$

$$+2\frac{p_2}{g}(a+l\sin\psi)\omega^2l\cos\psi\delta\psi=0,$$

由此，約去 $2l\delta\psi$ 之后，得：

$$\omega=\sqrt{g}\sqrt{\frac{p_1+p_2+2lc(1-\cos\psi)}{p_2(a+l\sin\psi)}\operatorname{tg}\psi}。$$

球的离心力等于：

$$S_e=\frac{p_2}{g}(a+l\sin\psi)\omega^2=[(p_1+p_2)+2lc(1-\cos\psi)]\operatorname{tg}\psi。$$

例題 213. 在方向沿 Oz 軸的鉛垂軸上（圖 136）加一可变轉动力矩 M；軸上固联一槽，槽中有一質量为 m 的物体可以自由地运动。試証①：可以这样选取槽的形狀，使得在轉动力矩 M 的变化規律已經給定的时候，軸是一次近似地作等角速度运动的，而其角速度則相当于 $M=0$ 之情況下的角速度。

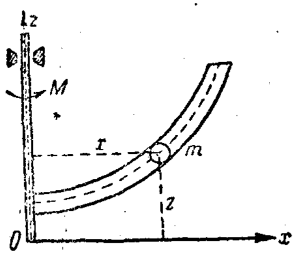

圖 136

我們来列出系的运动微分方程式。以 J 表示軸連同槽对 Oz 軸的轉动慣量；于是，認定槽是一条曲綫，其方程式为 $x=x(z)$，并把从曲綫与 Oz 軸交点算起的这条曲綫的弧長称为 s，我們有对 Oz 軸的动量矩方程式：

$$\frac{d}{dt}[(J+mx^2)\dot{\varphi}]=M, \qquad (*)$$

其次，我們列出重物的相对运动方程式在曲綫的切綫方向上的投影：

$$m\ddot{s}=-mgz'+mx\dot{\varphi}^2x', \qquad (**)$$

式中 $x'=\frac{dx}{ds}$ 和 $z'=\frac{dz}{ds}$ 是曲綫的切綫与 Ox 軸及 Oz 軸所成角度的余弦。

假若力矩 M 等于零而軸以某一角速度 Ω 作等速轉动，那么重物 m 在动曲綫上將处于相对平衡的狀态，这就是說，我們有例題 210 的条件。將关涉到等速狀态的运动学要素記以注脚"0"，按(**)式就有：

$$\Omega^2x_0x_0'=gz_0'。 \qquad (***)$$

---

① E. Meissner. Geschwindigkeitsausgleich rotierender Wellen durch schwingende Lasten (Verhandl. d. dritten Intern. Kongresses für techn. Mechanik. Bd. III, S. 199—204).

現在令
$$M=M_0\cos k\Omega t,$$
这里 k 实际上可以有 1, 2, 3 等值，并研究軸的新的轉动和重物的相对运动。为此，令:
$$s=s_0+\sigma,\quad \dot{\varphi}=\Omega+\eta,$$
并將这些值代入方程式(*)和(**)中。假定 σ 和 η 以及它們的微商 $\dot{\sigma}$ 与 $\dot{\eta}$ 都是很小的量，而这些量的二次和二次以上微量可以略去不計；于是，注意到
$$x=x_0+x_0'\sigma,\ x'=x_0'+x_0''\sigma;\ z=z_0+z_0'\sigma,\ z'=z_0'+z_0''\sigma,$$
按(**)，我們有
$$\ddot{\sigma}-(\Omega^2+2\Omega\eta)(x_0+x_0'\sigma)(x_0'+x_0''\sigma)+gz_0'+gz_0''\sigma=0;$$
再按方程式(***)，我們得到:
$$\ddot{\sigma}+[gz_0''-\Omega^2(x_0x_0''+x_0'^2)]\sigma=2\Omega\eta x_0x_0'。$$
应用以下熟知的关系式:
$$x_0'^2+z_0'^2=1,\ x_0'x_0''+z_0'z_0''=0,$$
还可以消去 z_0''; 由此
$$z_0''=-\frac{x_0'x_0''}{\sqrt{1-x_0'^2}}。$$
最后，我們得到方程式:
$$\ddot{\sigma}-\left[\Omega^2(x_0x_0''+x_0'^2)+g\frac{x_0'x_0''}{\sqrt{1-x_0'^2}}\right]\sigma=2\Omega x_0x_0'\eta。$$
用同样的方法在方程式(*)中加入这些变化量，我們有:
$$(J+mx_0^2)\dot{\eta}+2m\Omega x_0x_0'\dot{\sigma}=M_0\cos k\Omega t。$$
所要研究的基本問題現在可以这样来提出:不管可变力矩
$$M=M_0\cos k\Omega t$$
存在与否，試求軸一次近似地作等速轉动(即 $\eta=0$)时所应滿足的条件。

在前面的方程式中代入 $\eta=0$，得:
$$\ddot{\sigma}-\left[\Omega^2(x_0x_0''+x_0'^2)+g\frac{x_0'x_0''}{\sqrt{1-x_0'^2}}\right]\sigma=0,$$
$$2mx_0x_0'\Omega\dot{\sigma}=M_0\cos k\Omega t。$$
这兩方程式必須同时滿足，因此，从第二方程式求出 σ 的值:
$$\sigma=\frac{M_0}{2mk\Omega^2x_0x_0'}\sin k\Omega t,$$
并代入第一方程式中，得:
$$k^2\Omega^2+\Omega^2(x_0x_0''+x_0'^2)+g\frac{x_0'x_0''}{\sqrt{1-x_0'^2}}=0。$$
这一方程式可以用下面的替换式
$$\Omega^2x_0x_0'=gz_0'=g\sqrt{1-x_0'^2}$$
来化簡；經过約簡之后，我們便求得曲綫的方程式:

$$\frac{k^2+x_0'^2+x_0x_0''}{x_0x_0'}=-\frac{x_0'x_0''}{1-x_0'^2},$$

这就是，在任意角速度 Ω 下，軸的角速度 $\dot{\varphi}$ 对 Ω 的偏差一次近似地等于零时，槽所必須具有的形狀。

經过化簡之后，去掉注脚"0"，我們得到微分方程式：

$$xx''+(k^2+x'^2)(1-x'^2)=0。$$

为要积分这一方程式，作出替換式：

$$x'^2=y,$$

于是
$$2x'x''=y'=\frac{dy}{dx}x', \quad 即\ x''=\frac{1}{2}\frac{dy}{dx},$$

这样一来，方程式成为

$$\frac{1}{2}x\frac{dy}{dx}=(y-1)(y+k^2),$$

或分离变数之后：

$$2\frac{dx}{x}=\frac{-dy}{(1-y)(y+k^2)}=\frac{-1}{1+k^2}\left(\frac{dy}{1-y}+\frac{dy}{k^2+y}\right)。$$

这方程式有一积分：

$$2\ln x+\frac{1}{1+k^2}\ln\frac{k^2+y}{1-y}=\ln C,$$

其中 C 是任意常数，这常数决定于以下条件：

$$当\ y=0\ 时，\ x=a,$$

因此要在切綫与 x 軸所成角度的余弦等于零(角度等于 $90°$)的那个点上給出 x 的值。于是，得：

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{1+\dfrac{y}{n-1}}{1-y}\right)^{\frac{1}{n}}=1,$$

从而
$$y=x'^2=\frac{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n}}{1+\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n}},$$

这里，为了写起来方便，命

$$n=1+k^2。$$

令
$$\frac{x}{a}=\xi, \quad \frac{z}{a}=\zeta,$$

我們写出：
$$z'^2=1-x'^2=\frac{\xi^{2n}}{1+\dfrac{1}{n-1}\xi^{2n}}\cdot\frac{n}{n-1}=a^2\zeta'^2,$$

并与改写成以下形式的前一等式

$$a^2\xi'^2=\frac{1-\xi^{2n}}{1+\frac{1}{n-1}\xi^{2n}}$$

作一比較。

将这两个等式相除;得

$$\frac{d\zeta}{d\xi}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^{2n}}};$$

从上式很容易得到 ζ 的解,这个解是 ξ 的函数并取下面的級数形式:

$$\zeta=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left\{\frac{\xi^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\xi^{3n+1}}{3n+1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\xi^{5n+1}}{5n+1}+\cdots\cdots\right\},$$

这級数在 $\xi<1$ 即 $x<a$ 时收斂。

梅涅 (E. Meissner) 曾根据这个想法造成了液体調速器并且得到了对角速度振动的很好的消振結果。

例題 214. 数学摆的悬挂点 O (圖 137) 可以在鉛垂平面内任意运动。試写出摆对于与悬挂点一起作移动的坐标系的相对运动方程式。

屬于本題所述之类型的有,例如,挂在作直綫运动的(一般說来是加速运动)火車車厢内的摆和在作加速运动的系統中摆的振动的情况。

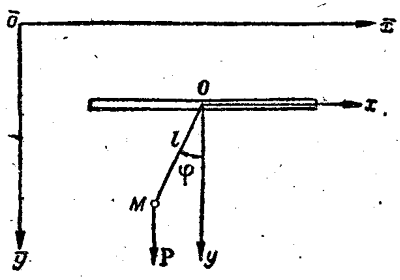

圖 137

我們来研究在按任意規律作移动的敞車上摆的一般理論。把坐标系 Oxy 联結在敞車上并以原点 O 对定系 $\overline{Oxy}$ 的运动方程式表示敞車的移动:

$$\bar{x}_0=\bar{x}_0(t),\ \bar{y}_0=\bar{y}_0(t)。$$

摆的运动微分方程式可以用拉格倫日方法或慣性力方法求得。現在我們把这两种方法都做出来以資比較。

(a)**拉格倫日方程式法。** 取摆偏离 Oy 軸的角度 φ 为广义坐标。M 点的絕对坐标等于:

$$\bar{x}=\bar{x}_0+x=\bar{x}_0-l\sin\varphi,$$

$$\bar{y}=\bar{y}_0+y=\bar{y}_0+l\cos\varphi。$$

現在应用这两个式子来作出动能的表示式,为此,求出

$$\dot{\bar{x}}=\dot{\bar{x}}_0-l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$\dot{\bar{y}}=\dot{\bar{y}}_0-l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

之后,我們得到

$$T=\frac{m}{2}[\dot{\bar{x}}_0^2+\dot{\bar{y}}_0^2+l^2\dot{\varphi}^2-2l(\dot{\bar{x}}_0\cos\varphi+\dot{\bar{y}}_0\sin\varphi)\dot{\varphi}]。$$

势能等于:

$$\Pi=-Py=-mgy=-mgl\cos\varphi,$$

而在写可能位移上所作的元功时，可能位移应該是沿突然停止了的約束的位移，即 δy 而不是 $\delta\bar{y}$。在和本题的情况类似的、有关非固定約束的場合，这点必須严密地注意。

我們有：

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}-ml(\dot{x}_0\cos\varphi+\dot{y}_0\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=ml(\dot{x}_0\sin\varphi-\dot{y}_0\cos\varphi)\dot{\varphi},$$

而拉格倫日方程式成为：

$$ml^2\ddot{\varphi}-ml\frac{d}{dt}(\dot{x}_0\cos\varphi+\dot{y}_0\sin\varphi)-ml(\dot{x}_0\sin\varphi-\dot{y}_0\cos\varphi)\dot{\varphi}=-mgl\sin\varphi,$$

或化簡之后：

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi-\frac{1}{l}(\ddot{x}_0\cos\varphi+\ddot{y}_0\sin\varphi)=0。\qquad (*)$$

（б）**慣性力法**。在这种情况下，重物 M 上应加一牽連慣性力；在动系作移动的給定情形下，它等于：

$$-m\bar{w}。$$

这一慣性力的投影是：

$$-m\ddot{x}_0,\ -m\ddot{y}_0。$$

列出对于 O 点的动量矩方程式，我們得到方程式：

$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})=xP-m(x\ddot{y}_0-y\ddot{x}_0)。$$

將上式中的 x 与 y 用它們的 φ 的表达式來替換，我們又得到微分方程式(*)。

例題 215. 在以向下的等加速度 $w_0<g$ 而运动的（向下加速运动或向上減速运动）升降梯上悬有一摆，試求摆的微振动周期。

应用前題的微分方程式(*)，我們得到摆的微振动方程式：

$$\ddot{\varphi}+\frac{g-w_0}{l}\varphi=0。$$

周期等于($w_0<g$)：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-w_0}};$$

当 $w_0\to g$ 时，$\tau\to\infty$，运动不再是振动的了。

当加速度 w_0 的方向朝上时（向下減速运动，或向上加速运动），周期等于

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+w_0}}。$$

例題 216. 車厢以等加速度（或減速度）w_0 在一水平直綫道路上运动。試求悬于車厢中的摆繩在平衡时的方向以及摆在平衡位置附近作微振动的周期。

平衡位置决定于角度 φ_0：