College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

# 经济应用数学——微积分

# 学习辅导与习题选解



主　编　徐建豪　刘克宁

副主编　易风华　辛萍芳

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

# 经济应用数学
# ——微积分学习辅导与习题选解

主　编　徐建豪　刘克宁
副主编　易风华　辛萍芳

高等教育出版社
Higher Education Press

**内容简介**

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题项目成果之一——《经济应用数学——微积分》的配套教材。

本书共分八章：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、微分方程初步、级数，每章都包含五部分内容：教学基本要求、内容提要、疑难解析、范例讲评、习题和复习题选解。书后编写了四套综合测试题及其参考答案。

本书不仅适合经济、管理类学生使用，还可供教师、科技人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

经济应用数学：微积分学习辅导与习题选解/徐建豪，刘克宁主编．—北京：高等教育出版社，2003.12
ISBN 7-04-012933-7

Ⅰ．经… Ⅱ．①徐…②刘… Ⅲ．微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第095411号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010－64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800－810－0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010－82028899 | | http://www.hep.com.cn |

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京民族印刷厂

| | | | |
|---|---|---|---|
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2003年12月第1版 |
| 印　　张 | 10.25 | 印　　次 | 2003年12月第1次印刷 |
| 字　　数 | 190 000 | 定　　价 | 11.40元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

# 前　言

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题项目成果之一——《经济应用数学——微积分》(徐建豪等主编)的配套教材的配套参考书.同时兼顾其他同类教材的内容，也可单独作为经济、管理类本科教学参考书使用.

本书对《经济应用数学——微积分》中的要点、重点、难点逐一进行分析讲解；对典型例题进行了归纳，着重理清解题的思路、方法，总结其规律，帮助学生正确理解概念，提高分析问题和解决问题的能力；书中题型多样，解题方法典型、新颖，解答简洁，富有一定的启发性.

本书按主教材《经济应用数学——微积分》的章编排，每章都包含五部分内容：教学基本要求、内容提要、疑难解析、范例讲评、习题和复习题选解.“范例讲评”录入了经济类部分考研试题；“习题和复习题选解”对主教材中有一定难度的习题和复习题给出了详细解答，并保持该题在主教材该章节习题中的编号不变，便于查阅.

本书编写了四套综合测试题及其参考答案，供学生自测用.

本书分八章，分别由刘克宁(第1、2章)，易风华(第3章)，徐建豪(第4、5、7章)，辛萍芳(第6、8章)编写，全书框架结构安排、统稿、定稿由徐建豪承担，全书的插图由刘克宁承担.

高等教育出版社的编辑，尤其是李艳馥高级策划为本书的出版付出了辛勤劳动，在此表示衷心感谢.

因编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2003年8月

# 郑重声明



**反盗版举报电话**:(010) 58581897/58581698/58581879/58581877

**传　　真**:(010) 82086060

**E - mail**:dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

**通信地址**:北京市西城区德外大街4号
高等教育出版社法律事务部

**邮　　编**:100011

购书请拨打电话:(010)64014089　64054601　64054588

**策划编辑**　李艳馥
**责任编辑**　张庆波
**封面设计**　王凌波
**责任绘图**　尹文军
**版式设计**　陆瑞红
**责任校对**　朱惠芳
**责任印制**　陈伟光

# 目　　录

# 第一章　函数、极限与连续

## 一、教学基本要求

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域，会判别两个函数的异同，会作出简单的分段函数的图像.

2. 理解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

3. 了解反函数的概念.

4. 掌握复合函数的复合过程.

5. 理解数列极限与函数极限的描述性定义，了解其分析定义，掌握极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与左、右极限的关系.

6. 掌握极限的四则运算法则及两个重要极限.

7. 理解无穷小、无穷大的概念及其相互关系，掌握无穷小的基本性质. 会对无穷小进行比较，会运用等价无穷小代换求极限.

8. 理解函数在一点处连续与间断的概念. 会判断分段函数在分段点处的连续性，会求函数的间断点.

9. 理解初等函数的连续性，会利用函数的连续性求极限.

10. 理解闭区间上连续函数的性质，会用零点定理证明方程根的存在.

## 二、内 容 提 要

### （一）函数

1. 函数的定义

设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个非空实数集合. 如果对于每一个 $x \in D$，变量 $y$ 按照一定的法则 $f$，有确定的实数与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 $D$（也可记作 $D(f)$）叫做这个函数的定义域，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量. 函数值的集合称为函数的值域，记作 $Z$（或 $Z(f)$）.

2. 函数的几种特性

(1) 有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，数集 $X \subset D$，如果存在一个正

数 $M$，使得对任一 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$在 $X$ 上有界，如果这样的 $M$ 不存在，则称 $f(x)$在 $X$ 上无界.

(2) 单调性　设函数 $f(x)$对区间 $I$ 内的任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是增加(或减少)的. 区间 $I$ 称为函数 $f(x)$的增(或减)区间.

(3) 奇偶性　设函数 $f(x)$的定义域 $D$ 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$)，如果对 $D$ 内任意 $x$，都有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$)，则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

(4) 周期性　对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 $T$，使得对于定义域内的任何 $x$，$x+T$ 也在定义域内，且 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，常数 $T$ 称为 $f(x)$的周期. 通常称最小正数 $T$ 为最小正周期，简称周期.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$. 对任意 $y\in Z(f)$，如果有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 $x\in D(f)$与之对应，其对应关系就记作 $f^{-1}$，这个定义在 $Z(f)$上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为 $y=f(x)$的反函数，它的定义域是 $Z(f)$，值域是 $D(f)$.

习惯上函数的自变量都用 $x$ 表示，所以反函数一般都表示为 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

设函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$，当 $x$ 在定义域内取值时，对应的 $u=\varphi(x)$的值能使 $y=f(u)$有定义，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 $x$ 的复合函数. $u$ 称为中间变量.

## (二) 极限

1. 数列极限、函数极限的描述定义

对于无穷数列$\{x_n\}$，如果当项数 $n$ 无限增大时，通项 $x_n$ 无限地趋近于一个确定的常数 $A$，则称当 $n\to\infty$ 时，数列$\{x_n\}$以常数 $A$ 为极限，或称数列收敛于 $A$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 当 $n\to\infty$ 时，如果 $x_n$ 不趋近于一个确定的常数，则称数列$\{x_n\}$没有极限，或称数列是发散的.

如果当 $x$ 无限接近 $x_0$ ($x$ 可以不等于 $x_0$)时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 $A$，则称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时以 $A$ 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$. 否则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$无极限.

如果当$|x|$无限增大(即 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 $A$，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$以 $A$ 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

2. 数列极限、函数极限的分析定义

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ | $\Leftrightarrow$ | $\forall \varepsilon > 0$ | $\exists N > 0$ | 当 $n > N$ 时 | $\lvert x_n - A \rvert < \varepsilon$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ | | | $\exists \delta > 0$ | 当 $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时 | $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ | | | $\exists X > 0$ | 当 $\lvert x \rvert > X$ 时 | |

3. 极限存在的条件

(1) 极限存在的充分必要条件

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

(2) 极限存在的充分条件

夹逼定理　设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$满足条件：(1)在 $x_0$ 的某去心邻域 $N^0(x_0,\delta)$内，$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$；则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

单调有界法则　单调有界数列必有极限.

4. 极限的性质

函数局部保号性　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，并且 $A > 0$（或 $A < 0$），则必存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $N^0(x_0,\delta)$，当 $x \in N^0(x_0,\delta)$时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）成立.

极限保号性　如果 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则有 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

5. 极限的四则运算法则

若$\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B} (B \neq 0)$.

6. 几个常用的基本极限

(1) $\lim C = C$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$;

(3) 当 $a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m = n \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } m < n \text{ 时}, \\ \infty, & \text{当 } m > n \text{ 时}. \end{cases}$

7. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，常用 $\lim\limits_{f(x) \to 0} \dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}$. 常用 $\lim\limits_{f(x) \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \mathrm{e}$.

8. 无穷小与无穷大

(1) 概念

无穷小　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，简称无穷小.

无穷大　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大.

(2) 无穷小与函数极限的关系　在自变量 $x$ 的某一变化过程中，函数 $f(x)$ 具有极限 $A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 $\alpha$ 为这一变化过程中的无穷小.

(3) 无穷小与无穷大的关系　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$ 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(4) 性质

运算规则　$\alpha \pm \beta \to 0$，$\alpha \cdot \beta \to 0$，$\alpha \cdot u \to 0$（其中 $\alpha$、$\beta$ 为无穷小量，$u$ 为有界变量）.

等价代换定理　如果 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(5) 无穷小的比较　设 $\alpha$、$\beta$ 是同一变化过程中的无穷小量，如果

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{则称 } \alpha \text{ 较 } \beta \text{ 高阶}; \\ \infty & \text{则称 } \alpha \text{ 较 } \beta \text{ 低阶}; \\ c\ (c \neq 0) & \text{则称 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 同阶}; \\ 1 & \text{则称 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 等价，即 } \alpha \sim \beta. \end{cases}$$

常用的等价无穷小　$x \to 0$ 时，有 $\sin x \sim x$；$\arcsin x \sim x$；$\tan x \sim x$；$\arctan x \sim x$；$\ln(1 + x) \sim x$；$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$；$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2} x^2$. 以上各式中的 $x$ 均可换为 $f(x)$（当 $f(x) \to 0$ 时）.

### （三）连续

1. 概念

(1) 在一点连续　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续.

(2) 在开区间内连续　若 $y = f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续.

(3) 在闭区间上连续　若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$（称在 $a$ 点右连续），$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$（称在 $b$ 点左连续），则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(4) 间断点　如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，则称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点. 其分类如下表：

| | | |
|---|---|---|
| 第一类间断点 | $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$ 都存在 | $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$（跳跃间断点） |
| | | $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$（可去间断点） |
| 第二类间断点 | $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在 | 无穷间断点 |

2. 连续函数的运算法则

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，则它们的和 $f(x)+g(x)$、差 $f(x)-g(x)$、积 $f(x) \cdot g(x)$、商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0) \neq 0$ 时）都在点 $x_0$ 连续.

3. 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的. 对于初等函数 $f(x)$，如果 $x_0$ 是定义区间内的一点，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$. 即极限符号与函数符号可以交换.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值与最小值.

(2) 介值定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$m$ 和 $M$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对于 $m$ 与 $M$ 之间的任一实数 $c$ $(m < c < M)$，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = c$.

(3) 零点定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a) \cdot f(b) < 0$），则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

# 三、疑难解析

## （一）函数

1．函数的两要素

对于函数 $y=f(x)(x\in D)$，定义域 $D$ 和对应法则 $f$ 是确定函数关系的两要素，函数的值域可由 $D$ 和 $f$ 确定．判别两函数的异同，要看两要素是否相同．

2．确定函数的定义域

对于实际问题，应根据问题的实际意义确定函数的定义域；当函数的数学解析式是下面几种形式时，确定函数定义域的原则是：

（1）分式　要求分母不等于零；

（2）偶次根式　要求被开方式大于等于零；

（3）对数式　要求真数大于零；

（4）反三角函数式　如 $y=\arcsin u$，$y=\arccos u$，要求 $|u|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant u\leqslant 1$；

（5）由有限个函数经四则运算所构成的函数，其定义域是这有限个函数定义域的交集．

3．分段函数

分段函数是自变量在不同范围内用不同的解析式表示的函数．在整个定义域内它只是一个函数，而不是几个函数．对于分段函数，应掌握两点：

（1）分段函数的定义域是各段定义域的并集；

（2）作分段函数图像时，应分段作图像，取各段定义域内的部分．

因初等函数是用一个数学解析式表示，而分段函数是用几个数学解析式表示，所以分段函数一般不是初等函数．但某些分段函数如果可以用一个数学式表示，仍然是初等函数．

例如 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 2,\\ 4, & x>2\end{cases}=x+2-\sqrt{(x-2)^2}$ 是初等函数．

4．函数奇偶性的判定

判定函数 $f(x)$ 的奇偶性，首先考察 $f(x)$ 的定义域是否关于原点对称．例如函数 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$ 就不是偶函数，如果定义域为 $(-1,1)$，则 $f(x)$ 是偶函数．一般情况下，分析函数的奇偶性时，常认为 $f(x)$ 定义在关于原点对称的区间 $(-a,a)$ 上．

例如函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x<0 \end{cases}$ 定义在$(-\infty,+\infty)$上.因为

$$f(-x)=\begin{cases} -x+1, & -x>0, \\ 0, & -x=0, \\ -x-1, & -x<0 \end{cases}=\begin{cases} -(x-1), & x<0, \\ 0, & x=0, \\ -(x+1), & x>0 \end{cases}=-f(x),$$

所以 $f(x)$是奇函数.

5. 反函数

反函数的本质是它表示的对应规律，与自变量、因变量用什么字母表示无关. 因此函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

求 $y=f(x)$反函数的步骤是：先从 $y=f(x)$中求出 $x=f^{-1}(y)$，再互换 $x$、$y$ 得反函数$y=f^{-1}(x)$. 应注意 $y=f^{-1}(x)$与 $x=f(y)$是同一条曲线；而 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

6. 复合函数

将复合函数分解为若干个较简单的函数，应注意分解后的每一个函数都是基本初等函数或它们的和、差、积、商.

例如　将复合函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$分解为 $y=\mathrm{arc}\ u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1-x^2$ 是错的，因为 $y=\mathrm{arc}\ u$ 不是基本初等函数，而应分解为 $y=\arcsin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$.

求分段函数的复合函数是个难点. 设 $f(x)$、$\varphi(x)$是分段函数，求复合函数 $f[\varphi(x)]$时应分两步进行：

(1) 将 $f(x)$中的 $x$ 及各段定义域中的 $x$ 都换成 $\varphi(x)$，可得 $f[\varphi(x)]$的函数表达式；

(2) 解所得到的关于 $\varphi(x)$的不等式，便可求出 $f[\varphi(x)]$的定义域.

例如 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0, \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ x, & x>0. \end{cases}$ 则

$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 0, & \varphi(x)\leqslant 0, \\ -\varphi^2(x), & \varphi(x)>0. \end{cases}$ 因为 $\varphi(x)\leqslant 0$ 时，$x\leqslant 0$，$\varphi(x)>0$ 时，$x>0$ 且 $\varphi(x)=x$，所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ -\varphi^2(x), & x>0 \end{cases}=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ -x^2, & x>0. \end{cases}$$

**(二) 极限**

1. 数列的极限

对于数列$\{x_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$.

如果 $n$ 为奇数与 $n$ 为偶数趋于无穷时，$x_n$ 的极限不同，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在.

2. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 在 $\varepsilon-\delta$ 定义中是用$|x-x_0|<\delta$描述$|x-x_0|$任意小，由于$|x-x_0|>0$，即 $x\neq x_0$，因此函数极限存在与函数在 $x_0$ 处有无定义无关. 而$|f(x)-A|<\varepsilon$是描述$f(x)$无限趋近于 $A$. 用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明极限的关键是找$\delta$，是由$|f(x)-A|<\varepsilon$倒推求出$\delta$. 当 $\delta$ 精确值不易求时，常用放大的方法求 $\delta$.

例如　用 $\varepsilon-\delta$ 方法证明$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-3}{x}=1$.

**证明**　因 $x\to3$，不妨设$2<x<4$，所以$|x-3|<1$，且$|x|>2$.

$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{2x-3}{x}-1\right|=\left|\dfrac{x-3}{x}\right|<\varepsilon$，由$|x|>2$得$\dfrac{1}{|x|}<\dfrac{1}{2}$，于是$\left|\dfrac{x-3}{x}\right|<\dfrac{|x-3|}{2}$(此处用的是放大的方法).

因此，只要$\dfrac{|x-3|}{2}<\varepsilon$，即$|x-3|<2\varepsilon$，就有$\left|\dfrac{2x-3}{x}-1\right|<\varepsilon$. 故取$\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$，则当$0<|x-3|<\delta$时，有$\left|\dfrac{2x-3}{x}-1\right|<\dfrac{|x-3|}{2}<\varepsilon$成立，所以$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-3}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 在 $\varepsilon-X$ 定义中，用$|x|>X$描述 $x$ 的绝对值无限大，即 $x\to\infty$. 用$|f(x)-A|<\varepsilon$描述$f(x)\to A$. 用 $\varepsilon-X$ 定义证明极限的关键是找 $X$，由$|f(x)-A|<\varepsilon$倒推求出 $X$.

3. 无穷小与无穷大

(1) 两个无穷小相比有高阶、低阶、同阶、等价等定义，但并不是任意两个无穷小都能比较其阶的高低. 例如当 $x\to0$ 时，$\alpha=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta=x$ 都是无穷小，因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}\text{不存在，所以 }\alpha\text{、}\beta\text{ 不能进行阶的比较.}$$

(2) 无穷大量与无界变量　无穷大量与无界变量是不同的. 无穷大量一定是绝对值无限大的无界量，但无界变量不一定是无穷大量.

例如　函数$f(x)=x\cos x$. 在$(-\infty,+\infty)$内，取 $x=2n\pi$，当 $n\to\infty$ 时，有 $x\to+\infty$. 因为$f(x)=2n\pi\cos2n\pi\to+\infty$，所以$f(x)$是无界函数. 而取 $x$

$=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，有 $f(x)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$. 所以当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$不是无穷大量.

(3) 等价无穷小代换　对于乘除形式的极限，可以进行等价无穷小代换，而在极限的加减运算中，则不能进行等价无穷小代换.

例如　当 $x\to0$ 时，$\alpha=\sin x+x^2\sim x$，$\beta=\sin x-x^2\sim x$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha-\beta}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2-(\sin x-x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

如果先用等价无穷小代换，再求极限，则计算会出现错误：

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha-\beta}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=0.$$

4. 极限四则运算法则

在函数极限的四则运算中，要特别注意每一个函数的极限必须存在.

例如　法则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$是以极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在为条件的. 失去这一条件，法则就不能成立.

例如　$f(x)=\frac{1}{2-x}$，$g(x)=\frac{1}{x-2}$，虽然 $\lim\limits_{x\to2}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}0=0$，但当 $x\to2$ 时，$f(x)$、$g(x)$的极限都不存在，故法则不能成立. 同样，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$存在，并不表明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在.

## （三）连续

1. 函数连续的定义

函数 $f(x)$在点 $x_0$ 连续的定义有三种不同的形式：

(1) 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 $x_0$ 处连续.

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 $x_0$ 处连续.

(3) 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 恒成立，则称 $f(x)$在点 $x_0$ 处连续.

三种定义应用的侧重点不同. 第一种定义常用于函数连续性的检验；第二种定义常用于间断点的讨论；第三种定义常用于理论上的探讨，这三种定义是等价的. 应用最多的是第二种定义.

2. 函数的连续区间

$f(x)$是初等函数，则它的定义区间就是它的连续区间；如果$f(x)$不是初等函数，从定义区间上除去函数的不连续点(即间断点)即得$f(x)$的连续区间.

必须注意，基本初等函数在其定义域内是连续的，但初等函数在其定义域上不一定连续，只能说初等函数在其定义区间上是连续的. 例如初等函数$f(x)=\sqrt{\cos x-1}$，它的定义域$D=\{x \mid x=2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$，此时$f(x)=0$，其图像在数轴上是一个一个孤立的点，函数$f(x)$显然是不连续的.

## 四、范 例 讲 评

**例 1** 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\ln\left(\dfrac{4x-x^2}{3}\right)}$；　　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\lg(16-x^2)$.

**解** (1) 要使函数有定义，应有$\begin{cases}\ln\dfrac{4x-x^2}{3}\geqslant 0,\\ \dfrac{4x-x^2}{3}>0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{4x-x^2}{3}\geqslant 1,\\ 4x-x^2>0.\end{cases}$解$\begin{cases}x^2-4x+3\leqslant 0,\\ x^2-4x<0\end{cases}$得$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3,\\ 0<x<4.\end{cases}$所以函数的定义域是$[1,3]$.

(2) 要使函数有定义，应有$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 16-x^2>0,\end{cases}$即$\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z},\\ -4<x<4,\end{cases}$所以函数的定义域是$(-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

**例 2** 已知$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$求$f[f(x)]$.

**解** $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |f(x)|>1.\end{cases}$因为无论$x$取何值，$f(x)$只取0与1两个值，总有$|f(x)|\leqslant 1$，所以$f[f(x)]=1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

**例 3** 设$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$及其定义域.

**解** $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，于是$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 因$\varphi(x)\geqslant 0$，所以$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0,\\ 1-x>0.\end{cases}$可求出$\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,0]$.

计算极限是本章的重点,常用的求极限的方法有:

1. 用极限的运算法则

**例 4** 求下列极限: