教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数 学 与 应 用 数 学 专 业 系 列 教 材

计算方法

主编 高益明

中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

计　算　方　法

主编　高益明

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/高益民主编.—北京:中央广播电视大学出版社,2003.8

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材.数学与应用数学专业系列教材

ISBN 7-304-02416-X

Ⅰ.计... Ⅱ.高... Ⅲ.计算方法-电视大学-教材 Ⅳ.0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 068168 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

计算方法

主编 高益明

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京密云胶印厂

开本/B5 **印张**/17.25 字数/305 千字

版本/2003 年 6 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

印数/0001-5000

社址/北京市复兴门内大街 160 号 **邮编**/100031

电话/66419791 68519502 **(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)**

网址/http://www.crtvup.com.cn

书号:ISBN 7-304-02416-X/O·131

定价:23.00 元

序　　言

21 世纪，中国全面进入了一个新的发展与竞争的时代. 归根结底，竞争是人才的竞争与知识的竞争，团体竞争的优胜者将是那些具有一批高水平人才的团体；个体竞争的优胜者将是那些具有现代科学知识与超群工作能力的人. 在这竞争的时代，青年人渴望学习到适应工作岗位需要的知识. 正是在这种环境下，中央广播电视大学与东北师范大学为满足一大批中学数学教师的要求，联合开办了(师范类)本科数学与应用数学专业.

本专业的开办，为追求知识的中学青年教师开辟了一条前进的道路，而知识的获取，要靠学习者的辛勤劳动. 可以说，学习是一项艰苦的劳动. 这项劳动与其他劳动的一个显著区别是：学习不能由别人代替来完成，甚至也不能合作完成. 特别是数学知识的学习，必须经过学习者一番夜不能寐的(有时甚至是痛苦的)冥思苦想，才能掌握数学的本质，才能体会到数学的真谛，能达到由此及彼、由表及里的境界.

数学是众多学科中最为抽象的学科. 正是因为它高度的抽象性，决定了它广泛的应用性，同时也造成了数学学习的困难. 毋庸讳言，相对其他学科来说，学习数学需要花费更多的时间与精力. 但是，数学并不是高不可攀的科学. 数学的学习如同攀登高楼一样，只要一步一个台阶(而不是两个台阶、三个台阶，更不是飞跃)地拾级而上，我们并不觉得太困难即可攀上高楼. 同样，只要学习者扎扎实实地掌握这一步知识，再去学习下一步的内容，循序渐进，数学就可以成为任你的思维纵横驰骋的自由王国.

作为教师，要充分地考虑到学生在自学过程中遇到的各种困难. 我们在教材的编写中，尽最大可能地使教材通俗易懂，由易到难，深入浅出. 为了便于自学，我们适当地作出一些注释，引导学生深入理解知识. 在每章的开始，给出本章学习目标和导学；每章的结尾，做出本章的总结，指出本章的重点及难点，并安排了学习辅导内容，介绍典型例题，同时配备了自测题目.

中央广播电视大学与东北师范大学联合开办的本科数学与应用数学专业处于刚刚起步阶段.我们的教师首次编写这套教材,一切尚处于探索的过程中,因此,这套教材难免有这样或那样的不妥之处.我们热情地欢迎读者提出宝贵的批评意见和改进的建议,使我们的教师及时地改进这套教材,以不断提高学生的学习效果.

史宁中

于长春

2002年4月25日

前　言

本书是为中央广播电视大学开放教育数学与应用数学专业“计算方法”课程编写的文字教材.教材内容的选取主要依据课程的教学大纲.

计算方法课程讲授的是数值分析问题,主要讨论的是计算机使用的数值计算方法.全书共分8章,主要介绍了误差、函数逼近、数值积分、求解线性方程组的直接解法和迭代解法、非线性方程求根以及常微分方程的数值解法等问题.

在本教材的编写过程中,我们充分考虑到广播电视大学开放教育学生的自学情况,尽可能将教材写得通俗易懂,便于自学.文字教材采用“合一式”形式编写,把教学内容和辅导内容融为一体,以方便学生的学习.书中标有*号的习题,一般说来是较难的,供感兴趣的学生选做.书末附有计算题的答案,对部分证明题给予提示,供学生参考.计算方法是和计算机结合得很紧密的一门课程,其中许多题目用计算机来计算可以提高计算精度并且可以大大地减少工作量.所以,我们对一些重要的数值计算方法给出了计算框图,学生可以利用不同的计算机语言编写计算程序,再去计算例题、习题或其他一些题目验算所编程序的正确性.

参加本书编写的有东北师范大学的高益明教授,中央广播电视大学的李林曙教授、赵坚副教授,太原电大的瞿炜副教授.在各自完成撰写任务后,最后由高益明教授负责统一定稿.本书从大纲审定到教材内容的定稿,都得到了北京大学滕振寰教授、北京师范大学陈公宁教授、沈嘉骥教授与东北师范大学高夯教授的指导与帮助.他们为编者提出了很多宝贵的意见,使本书增色不少.在本书的编写过程中,东北师大数学系、中央电大师范部给予了大力支持.中央广播电视大学出版社的有关编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动.在这里,对于给予本书支持与帮助的各位同志一并表示感谢.

由于编者水平有限,本书难免会有不足.我们恳请读者不吝赐教,批评指正.

高益明

写于长春

2002年12月

目　　录

第1章 误　差

学习目标

1. 知道误差及其主要来源,误差传播.

2. 掌握误差(绝对误差、相对误差)、误差限、准确数位和有效数字及其求法.

导　学

大多数数值方法都是近似方法,即使方法是精确的,由于舍入误差的存在,其计算结果也不能精确.所以,对于数值计算方法的讨论及应用,必然要涉及到误差.因此,在讨论具体数值方法之前,先介绍必备的误差基本知识.在本章1.1中介绍了误差的4种主要来源,在数值方法的理论和应用中只涉及截断误差和舍入误差.在1.2中介绍了误差限\相对误差限\准确数位和有效数字及其求法.它们将会对以后各章的学习有用.在1.3中还介绍了四则运算的误差和数值计算中应注意的几个问题.

教学安排

本章教学安排3学时,录像课1讲,IP课2讲.

在数值计算中,采用的计算方法大多是近似方法,参与计算的数大多是带有误差的近似值.如果忽略了误差对计算结果的影响,将会给工作造成严重损失,因此在讨论数值算法之前,对误差的知识作以简单介绍.

1.1 误差的来源

1.1.1 模型误差

在解决实际问题时,首先是要对实际问题作定量分析,建立起反映已知量之间关系的数学模型.这种数学模型往往忽略了一些次要因素.因此,数学模型本身就包含着误差,我们把这种误差称为**模型误差**.

例如我们用 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2(g=9.81\ \mathrm{m/s^2})$来描述自由落体下落时距离和时间的关系,它忽略了空气阻力等因素.设自由落体在时间 t 的实际下落距离,就是"模型误差".

1.1.2 观测误差

在数学模型中常包含有若干参数,它们大多是通过实验观测得到的,因此不可避免地带有误差,这种误差称为**观测误差**.

如设 L_0 为 $t=0$ 时金属棒的长度,我们用 $L(t)=L_0(1+\alpha t)$(其中 $\alpha=(0.000\,023\,8\pm0.000\,000\,1)$ ℃)来描述在时间 t 时金属棒的长度,这里 0.000 000 1 ℃就是参数 α 的观测误差.

1.1.3 截断误差

在求解数学模型时,通常选用有效的数值方法,数值方法计算中常常用有限过程(如取有限项,有限次)代替无限过程(无限项,无限次),由此产生的误差称为**截断误差**.

如我们用级数计算 $\mathrm{e}^{\tilde{x}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{x}^k$,在实际计算时,只能取前有限项(如 n 项)$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\tilde{x}^k$ 来代替,这时它的截断误差是$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\tilde{x}^k-\mathrm{e}^{\tilde{x}}=-\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{x}^k$.

1.1.4 舍入误差

在实际计算中,根据需要或受计算工具限制,常常只能取有限位数字进行计算,这样产生的误差称为**舍入误差**.

如 $\pi=3.141\,592\,6\cdots$,$\sqrt{2}=1.142\,135\cdots$,$\mathrm{e}=2.718\,281\cdots$,在实际计算时只能用有限位小数,如我们取小数点后 4 位数字,则

$$\varepsilon_1 = 3.141\,6 - \pi = 0.000\,007\,3\cdots,$$
$$\varepsilon_2 = 1.414\,2 - \sqrt{2} = -0.000\,013\,5\cdots,$$
$$\varepsilon_3 = 2.718\,3 - \mathrm{e} = 0.000\,018\,1\cdots,$$

就是它们的舍入误差.

总括起来,误差主要有:模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差.在计算方法中主要讨论的是截断误差和舍入误差.

练 习 1.1

1.举例说明什么是模型误差、观测误差.

2.举例说明什么是截断误差、舍入误差.

1.2 误差的表示法

近似数的误差表示法,也就是表示近似数精确度的方法,在不同场合可以采用不同表示方法.

1.2.1 误差与误差限

为了讨论方便,设 x^* 为准确值,x 为其近似值.

定义 1.1 近似值 x 与准确值 x^* 的差

$$\Delta(x) = x - x^* \tag{1.1}$$

称为近似值 x 的误差,或称绝对误差.

误差可正可负,当误差为正时,近似值偏大.称为**强近似**;当误差为负时,近似值偏小,称为**弱近似**.在同一量的不同近似值中,$|\Delta x|$ 越小,x 越精确.

一般情况下,准确值 x^* 往往是不知道的,所以误差 Δx 不可能准确求出.但根据具体测量或取值方法,可以估计出误差绝对值不超过某个正数 ε,即

$$|x - x| \leqslant \varepsilon \tag{1.2}$$

则称 ε 为近似值 x 的(绝对)误差限.

由此可得准确值 x^* 的取值范围:$x - \varepsilon \leqslant x^* \leqslant x + \varepsilon$

通常表示为

$$x^* = x \pm \varepsilon \tag{1.3}$$

例 1-1 一把具有毫米刻度的米尺,测得桌子长度为 1 235 mm.求桌子长度准确值的范围.

解 由米尺的精度我们知道.这个近似值的误差不会超过0.5 mm,则有

$$|x-x^*|=|1\,235-x^*|\leqslant 0.5\ \text{mm}$$

$$1\,234.5\ \text{mm}\leqslant x^*\leqslant 1\,235.5\ \text{mm}$$

这表明桌子准确长度在[1 234.5,1 235.5]区间内,写成 $x^*=(1\,235\pm 0.5)$ mm

例 1-2 已知 $x^*=\pi=3.141\,59\cdots$,求近似值 $x_1=3.14,x^2=3.142,x_3=3.141\,6$ 的误差限.

解

$$|\Delta x_1|=|3.14-\pi|=|-0.001\,59\cdots|<0.002,$$

$$|\Delta x_2|=|3.142-\pi|=|0.000\,41\cdots|<0.000\,5,$$

$$|\Delta x_3|=|3.141\,6-\pi|=|0.000\,007\cdots|<0.000\,008,$$

所以误差限 $\varepsilon_1=0.002,\varepsilon_2=0.000\,5,\varepsilon_3=0.000\,008$.

1.2.2 相对误差与相对误差限

误差无法用来比较不同量近似值的精确程度,例如,甲称 100 kg 误差 1 kg,乙称 1 000 kg 误差 1 kg,虽然他们的误差都是 1 kg,但显然乙称得更为准确,原因是甲的误差是1%,而乙的误差是0.1%.可见不同量的近似值精度如何,不仅要看它的误差大小,还必须考虑这个量本身的数值.

定义 1.2 近似值 x 的误差 Δx 与准确值 x_* 的比值

$$\delta(x)=\frac{\Delta x}{x^*}=\frac{x-x^*}{x^*},x^*\neq 0 \tag{1.4}$$

称为近似值 x 的相对误差.

一般地,在同一量或不同量的近似值中,相对误差的绝对值 $|\delta(x)|$ 越小,近似值 x 越精确.

由于准确值 x^* 未知,$\delta(x)$ 的准确值无法求出,同样地,我们往往可以求出一个正数 ε_r,使得

$$|\delta(x)|=\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\leqslant\varepsilon_r \tag{1.5}$$

则称正数 ε_r 为近似值 x 的相对误差限.在实际计算时,由于 ε 较小,通常取

$$\varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{|x|},|x|\neq 0$$

例 1-3 已知 $x^*=\pi=3.141\,59\cdots,y^*=\sqrt{2}=1.414\,21\cdots$,求 π 的近似值 $x=3.14$,$\sqrt{2}$ 的近似值 $y=1.41$ 的相对误差限.

解 因为

$$|\delta(x)| = \left|\frac{3.14-\pi}{\pi}\right| < 0.000\,6 \qquad |\delta(y)| = \left|\frac{1.41-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| < 0.003$$

所以 π 的近似值 $x=3.14$ 的相对误差限 $\varepsilon_r=0.000\,6$，$\sqrt{2}$的近似值 $y=1.41$ 的相对误差限 $\varepsilon_r=0.003$.

1.2.3 准确数位与有效数字

在科学计算中，人们常把非零十进制数写成介于 0.1 与 1 之间的小数乘以 10 的幂的形式.

例如：
$$12\,347\,800=0.123\,478\times10^8,$$
$$-0.000\,019\,86=-0.198\,6\times10^{-4}$$

对于一个任意非零十进制数 a 表示为

$$a=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\times10^m \tag{1.6}$$

这里 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$为 0～9 之间的数字，且 a_1,m 为整数. 当 m 变化时，a 中的小数点位置随之浮动，则称这种表示为数的十进制规格化浮点表示. 其中 $a=\pm0.a_1,a_2\cdots a_n\cdots$称为它的“尾数”，而指数 m 称为它的“阶数”. 一个十进制规格化浮点数完全由它的“尾数”和“阶数”所决定.

定义 1.3 设浮点近似数

$$x=\pm0.x_1,x_2\cdots x_p\cdots x_n\times10^m$$

若 x 的误差限ε 不超过 10^{m-p}位的半个单位，即

$$\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-p} \tag{1.7}$$

则称近似数 x 准确到 10^{m-p}位. 当 $p=n$ 时，则称 x 是具有 n 位有效数字的有效数. 其中 $x_1x_2\cdots x_n$ 分别称为第 1 位，第 2 位，…，第 n 位有效数字. 由定义 1.3 可知，准确数位越多的近似数 x 越精确.

例 1－4 $\pi=3.141\,592\,654\cdots$，取 $x=3.142$ 为 π 的近似值. 说明 x 有几位有效数字.

解 因为$|\pi-3.142|=0.000\,407<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，所以取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

又因为 $m=1,m-p=-3$，即 $p=4$，则 3.142 具有 4 位有效数字，即为 3，1，4，2.

例 1－5 以22/7＝3.142 857 1…，作为 π 的准确值，它准确到哪位？

解 因为$|\pi-3.142\,857\,1\cdots|<\frac{1}{2}\times10^{-2}$，所以可取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-2}$.

由定义得 x 为准确到 10^{-2}位的近似值.

练习 1.2

1. 已知 $x^*=\sqrt{2}$,求近似值 $x=1.414$ 的误差限和相对误差限.

2. 已知 $x^*=\pi$,求近似值 $x_1=3.142$,$x_2=3.141\ 35$ 的有效数字或准确数位.

1.3 误差的传播

在数值计算过程中,初始数据误差对计算结果是有影响的,这种现象称为误差传播问题,误差的传播问题是否能够得到控制是决定一个数值方法能否使用的一个重要问题,我们将在本节介绍误差传播的几个有关基本问题.

1.3.1 函数运算的误差

设函数 $y=f(x_1,x_2)$ 在点 (x_1^*,x_2^*) 附近可微,观测得到近似点为 (x_1,x_2),由多元微分知,函数的误差(改变量)

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_1,x_2)-f(x_1^*,x_2^*)\\ &\approx \mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1-x_1^*)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2-x_2^*) \\ &=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\end{aligned} \tag{1.8}$$

函数的相对误差

$$\delta f=\frac{\Delta f}{f}\approx\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)$$

由

$$\Delta x_1=x_1\delta x_1,\Delta x_2=x_2\delta x_2$$

得

$$\delta f=\left(\frac{x_1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\delta x_1+\left(\frac{x_2}{f}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\delta x_2 \tag{1.9}$$

由式(1.8)和式(1.9)容易求出简单四则运算的误差.

1. 和的误差

设 $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$,由 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=1$、式(1.8)和式(1.9)得

$$\Delta(x_1+x_2)\approx\Delta x_1+\Delta x_2$$

$$\delta(x_1+x_2)\approx\frac{x_1}{x_1+x_2}\delta x_1+\frac{x_2}{x_1+x_2}\delta x_2$$

2. 差的误差

设 $f(x_1,x_2)=x_1-x_2$，由 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=1$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-1$、式(1.8)和式(1.9)得

$$\Delta(x_1-x_2)\approx\Delta x_1-\Delta x_2$$

$$\delta(x_1-x_2)\approx\frac{x_1}{x_1+x_2}\delta x_1-\frac{x_2}{x_1+x_2}\delta x_2$$

当 $x_1\approx x_2$ 时，相对误差 $\delta(x_1,x_2)$ 可能会很大.

3. 积的误差

设 $f(x_1,x_2)=x_1x_2$，由 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=x_2$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1$、式(1.8)和式(1.9)得

$$\Delta(x_1x_2)\approx x_2\Delta x_1+x_1\Delta x_2$$

$$\delta(x_1x_2)\approx\delta x_1+\delta x_2$$

4. 商的误差

设 $f(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_2}$，由 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{1}{x_2}$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-\frac{x_1}{x_2^2}$、式(1.8)和式(1.9)得

$$\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx\frac{x_2}{x_2^2}\Delta x_1-\frac{x_1}{x_2^2}\Delta x_2$$

$$\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\approx\delta x_1-\delta x_2$$

1.3.2 控制误差的传播

1. 避免两个相近数相减

当数值计算中出现两个相近数相减，将会使计算结果精度急速下降，所以应尽量避免. 一般可采用算式恒等变形法，使变形后的算式不再含有此类运算；或在初始数据中多保留几位有效数字，以确保计算结果所要求精度.

例 1-6 设2.01 和 2为准确数，计算 $\sqrt{2.01}-\sqrt{2}$，使计算结果具有 3 位有效数字.

解 因为 $\sqrt{2.01}=1.417\,744\,6\cdots$ $\sqrt{2}=1.414\,213\,5\cdots$

所以 $\sqrt{2.01}-\sqrt{2}$ 是两个相近数相减. 要使结果具有三位有效数字，应取初始值保留 6 位有效数字，即

$$\sqrt{2.01}-\sqrt{2}\approx1.417\,74-1.414\,21=0.353\times10^{-2}$$

如果采取算式恒等变形，则有

$$\sqrt{2.01}-\sqrt{2}=\frac{0.01}{\sqrt{2.01}+\sqrt{2}}\approx\frac{0.01}{1.42+1.41}\approx 0.353\times 10^{-2}$$

2. 尽量减少运算次数

在数值计算中，简化运算次数十分重要，因为它直接影响计算速度和误差积累，有时甚至可使无法计算的问题得以实现.

例 1-7　计算多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0$ 的值.

解　若直接进行计算，计算 a_kx^k 需进行 k 次乘法，因此共需作 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次乘法和 n 次加法运算. 如果将计算按式(1.10)进行：

$$p(x)=(\cdots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0 \tag{1.10}$$

则只需 n 次乘法和 n 次加法运算.

3. 采取数值稳定算法

在数值计算中，除初始数据外，计算过程的每一步还将有舍入误差，这些误差必然影响计算的结果对于一个数值的算法，如果计算结果受这些误差影响比较小，则称这个数值方法是数值稳定的，否则，则称是数值不稳定的.

例 1-8　对 $n=0,1,2,3,4$ 求积分 $y_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+100}\mathrm{d}x$ 的近似值.

解　由

$$y_n+100y_{n-1}=\int_0^1\frac{x^n+100x^{n-1}}{x+100}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$$

可得逆推公式

$$(\mathrm{I})\ y_n=\frac{1}{n}-100y_{n-1},n=1,2,3,4$$

$$(\mathrm{II})\ y_{n-1}=\frac{1}{100}(\frac{1}{n}-y_n),n=4,3,2,1$$

显然　$$y_0=\int_0^1\frac{1}{x+100}\mathrm{d}x=\ln\frac{101}{100}=0.009\ 95$$

对于一切自然数 n，$y_{n-1}>y_n>0$

若利用逆推公式(Ⅰ)计算，则得

$$y_0\approx 0.009\ 95,\ y_1\approx 0.005,y_2\approx 0,y_3\approx 0.3,y_4\approx -29.75$$

若改用逆推公式(Ⅱ)计算，则得

$$y_4\approx 0.001\ 99,\ y_3\approx 0.002\ 48,y_2\approx 0.003\ 1,y_1\approx 0.004\ 97,y_0\approx 0.009\ 55$$

从上面的计算结果可以看出，计算方法(Ⅱ)是数值稳定的，而(Ⅰ)则不稳定，实

际计算时，当然应采用数值稳定的计算方法.

练 习 1.3

1. 如何计算下列函数值，其误差较小？

(1) 当 $|x| \ll 1$ 时，$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

(2) 当 $|x| \gg 1$ 时，$f(x) = \operatorname{acrtan}(x+1) - \arctan x$.

2. 已知近似数 $a = 1.286\,4$，$b = 0.635$，求 $a+b$，ab 的误差限及准确数位.

习 题 1

1. 求下列近似数的误差限和有效数字.

$$235\,000, 2\,350 \times 10^2, 0.235 \times 10^6$$

2. 求 $\sqrt{2}$ 的近似值 $x_1 = 1.414$，e 的近似值 $x_2 = 2.718$ 的误差限.

3. 求 π 的近似值 $x_1 = 3.141\,6$，$x_2 = \dfrac{355}{113}$ 的有效数字或准确数位.

4. 正方形的边长约为 100 cm，应怎样测量才能使面积误差不超过 1 cm^2.

5. 计算

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n!} x^n$$

使得乘、除法运算次数最少.

*6. 已知积分

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+5} \, dx, n = 0, 1, \cdots, 10.$$

建立递推计算公式，并讨论其计算结果可靠性.