宋健科学论文选集

SELECTED WORKS OF J.SONG

科学出版社

宋健科学论文选集

SELECTED WORKS OF J. SONG

(1962—1997)

科学出版社

1999

内 容 简 介

本文集收集了宋健院士1962—1997年发表在各种期刊杂志上的科学论文73篇。包括系统控制论、分布参数系统、火箭导弹控制、人口控制论及交叉学科研究4部分。较全面地反映了宋健院士对中国的科技事业的主要贡献。

本书可供从事系统控制论、火箭导弹控制、人口控制论及交叉学科的科技工作者参考学习。

图书在版编目(CIP)数据

宋健科学论文选集/宋健著.-北京:科学出版社,1999.2

ISBN 7-03-007101-8

Ⅰ.宋… Ⅱ.宋… Ⅲ.自然科学-文集 Ⅳ.N53

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第32964号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999年2月第 一 版　开本:787×1092 1/16

1999年2月第一次印刷　印张:47 1/2 插页:1

印数:1—1 000　字数:1 114 000

定价:119.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

目　　录

第一部分　系统控制论

PART I　SYSTEM CONTROL THEORY

第二部分　分布参数系统·火箭导弹控制

PART II　DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS · MISSILE AND SPACE-CRAFT CONTROL

第三部分 人口控制论

PART III POPULATION SYSTEM CONTROL

第四部分　交叉学科研究

PART IV INTERDISCIPLINARY STUDIES

第一部分

系统控制论

綫性最速控制系統的分析与綜合理論*

宋 健 韓京清

（中国科学院数学研究所）

由于生产实践的客观需要，控制理論的研究近几年来获得了迅速的进展，它已成为微分方程理論中的一个重要的、新的方向。如果說古典微分方程理論的主要研究对象是了解物质运动的客观規律，那么控制理論的任务是研究如何去影响或制約这个运动規律，使之满足或适应人們的需要。从这个观点看来，微分方程中的控制理論的任何新的研究結果都将直接有助于人們改造客观世界的斗爭。

最优控制理論包括两个方面：最优控制的性质和最优控制系統的綜合。在前一方面目前已得到了卓越的成就[3,4]，但在最优控制系統的綜合理論研究方面尚需科学工作者做出更大的努力。

本文的目的，是研究解决綫性最速控制系統的綜合問題。我們所用的研究方法不同于文献[3]的方法，而引用了等时区域的概念。本文所得到的結果部分地与上述文献中的結論重合，但关于綜合理論部分却不能为前者所代替。本文 § 2—4 对一般变系数綫性系統的等时区域的几何性质做了詳尽的分析，而在 § 5 內对常系数綫性系統的綜合理論做了些研究。

§ 1. 問題的提出

設有一受控制系統，它的运动規律可由下面常系数綫性常微分方程組所描繪：

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} a^i_\alpha x^\alpha + \sum_{\beta=1}^{r} b^i_\beta u^\beta,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n, r, 1 \leqslant r \leqslant n, \text{是常数.}$$

或写成向量形式：

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{1.1}$$

其中，$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 是相空間 R_n 中的点，称为系統的描繪点；$u = (u^1, u^2, \cdots, u^r)$ 是 r 維欧氏空間 E_r 中的閉正方体 $U: |u^i| \leqslant 1, i = 1, \cdots r$ 的一点，称为系統的控制参数；A 是 $n \times n$ 矩陣；B 是 $n \times r$ 矩陣。

設在相空間 R_n 中有一任意固定的有界凸閉区域 Ω，現需找出 r 个 n 元的控制函数

$$u^i = u^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) = u^i(x), i = 1, 2, \cdots, r.$$

若将它代入受控系統（1.1）后，使系統变为非受控系統，并且系統的描繪点自任何初始状态出发，均以最短的时間到达域 Ω。

* 1962 年 6 月 27 日收到。

在 § 2—4 內对一般綫性系統

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \tag{1.2}$$

的等时区域的性質做詳尽分析，其中 $A(t) = (a_\alpha^i(t))$, $t_0 \leqslant t < +\infty$ 的元素为 $n-2$ 次可微函数；$B(t) = (b_\beta^i(t))$, $t_0 \leqslant t < +\infty$ 的元素为 $n-1$ 次可微函数．显然，对(1.2)所討論的等时区域的性質，对系統(1.1)也是成立的．

設 $b_i(t)$ 是矩陣 $B(t)$ 的第 i 列向量，令

$$b_i^{(1)}(t) = b_i(t),\ b_i^{(j)}(t) = -A(t)b_i^{(j-1)}(t) + \frac{db_i^{(j-1)}(t)}{dt},$$

$$j = 2, 3, \cdots, n.$$

若对每个 i, $1 \leqslant i \leqslant n$, 向量組

$$b_i^{(1)}(t),\ b_i^{(2)}(t),\ \cdots,\ b_i^{(n)}(t) \tag{1.3}$$

对任何 t, $t_0 \leqslant t \leqslant +\infty$, 都綫性无关，則称系統 (1.2) 在 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 上为非蛻化的．对系統(1.1)向量(1.3)为

$$b_i,\ -Ab_i,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}A^{n-1}b_i.$$

下面我們总假定系統(1.2)和(1.1)为非蛻化的．

控制 $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \cdots, u^r(t))$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, 称为可准控制，如果 $u(t) \in U$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, 且 $u(t)$ 的每个分量在 $[t_1, t_2]$ 上为 L 可积函数．在 $[t_1, t_2]$ 上确定的可准控制的全体記为 $V(t_1, t_2)$．

設 $\Phi(t_0, t)$ 是滿足条件

$$\Phi(t_0, t_0) = E$$

的方程組

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

的标准基本解矩陣，則

$$\Phi(t_1, t)\Phi(t_0, t_1) = \Phi(t_0, t),$$
$$\Phi^{-1}(t_0, t_1) = \Phi(t_1, t_0).$$

若給定了一可准控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$，則(1.2)的滿足起始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解为

$$x(t) = \Phi(t_0, t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right) =$$
$$= \Phi(t_0, t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, t)B(t)u(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

若(1.2)为常系数方程組，則 $\Phi(t_0, t) = e^{A(t-t_0)}$, 故

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{1.5}$$

我們称 $x(t)$ 为控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 所对应的軌道，把 x_0 称为 $t = t_0$ 时的起始状态(或簡称起点)，$x(t_0 + T) = x_1$ 称为控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 所对应的終点，此时說，控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 把 x_0 引至 x_1.

定义 1. 設 x_0, $x_0 \in R_n$, 是任意給定的点，$T \geqslant 0$ 是任意数．系統 (1.2) 的 t_0 时以 x_0

为起点的T等时区域是指所有控制$u(t)\in V(t_0, t_0+T)$所对应的t_0时以x_0为起点的軌道$x(t)$的終点集合,記之为$G^+_{t_0}(x_0, T)$. 相仿的,(t_0+T)时以x_0为終点的T等时区域是指所有控制$u(t)\in V(t_0, t_0+T)$所对应的(t_0+T)时以x_0为終点的軌道的起点集合,記之为$G^-_{t_0}(x_0, T)$. 若終点不是一个点,而是某一固定集Ω时,用$G_{t_0}(\Omega, T)$表示以Ω的点为終点的軌道的起点集合. 这时

$$G_{t_0}(\Omega, T)=\bigcup_{x_0\in\Omega} G^-_{t_0}(x_0, T).$$

显然,若$x\in G^+_{t_0}(x_0, T)$或$x\in G^-_{t_0}(x_0, T)$,则有$u(t)\in V(t_0, t_0+T)$满足

$$x=\Phi(t_0, t_0+T)\Big(x_0+\int_{t_0}^{t_0+T}\Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\Big); \tag{1.6}$$

或

$$x=\Phi(t_0+T, t_0)\Big(x_0+\int_{t_0+T}^{t_0}\Phi^{-1}(t_0+T, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\Big). \tag{1.7}$$

若$x\in G_{t_0}(\Omega, T)$,则有$z\in\Omega$和$u(t)\in V(t_0, t_0+T)$,满足

$$x=\Phi(t_0+T, t_0)\Big(z+\int_{t_0+T}^{t_0}\Phi^{-1}(t_0+T, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\Big). \tag{1.8}$$

下面除定理4外,所考慮的起始时刻都是t_0,故在等时区域的符号中我們将不写下标t_0. 用$S^\pm(x_0,T)$, $S(\Omega,T)$和S分别表示$G^\pm(x_0, T)$、$G(\Omega, T)$和Ω的边界;用$\mathring{G}^\pm(x_0, T)$、$\mathring{G}(\Omega, T)$和$\mathring{\Omega}$分别表示它們的內部.

定义 2. 設$T_0>0$. 若对任給的$\varepsilon>0$, 有$\delta>0$, 当$T_1, T_2\in[t_0, t_0+T_0]$满足不等式

$$|T_1-T_2|<\delta$$

时,对任意$x_1\in G^\pm(x_0, T_1)$都有$x_2\in G^\pm(x_0, T_2)$,反之,对任意$x_2\in G^\pm(x_0, T_2)$都有$x_1\in G^\pm(x_0, T_1)$满足

$$\|x_1-x_2\|<\varepsilon,$$

那么,我們說等时区域$G^\pm(x_0, T)$在$[t_0, t_0+T_0]$上对T連續.

同样我們可以定义等时区域$G(\Omega, T)$的連續性.

設在R_n中凸閉区域Ω是由不等式

$$g_l(x^1, x^2, \cdots, x^n)\leqslant 0,\ l=1, 2, \cdots, p$$

所确定,其中$g_l(x)$是連續可微函数,且grad $g_l(x)$在S的一切点上都不为零. 显然,S上每一点$x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$有$i$, $1\leqslant i\leqslant p$, 满足

$$g_i(x^1, x^2, \cdots, x^n)=0,$$
$$g_l(x^1, x^2, \cdots, x^n)\leqslant 0,\ l\neq i.$$

下面用符号$g(x)=0$表示决定S的一切上述諸式,用grad $g(x)$, $x\in S$, 表示S的过x点的任意承托支面的与Ω不在同一側的法向量. 显然,若x为S的光滑点,則有i, $1\leqslant i\leqslant p$, 使得grad $g_i(x)=$ grad $g(x)$,若x为S上的不光滑点,則grad $g(x)$就認为是在此点几个grad $g_i(x)$的錐性組合. 我們把向量grad $g(x)$, $x\in S$, 称为过x的S的外法向量,其負向量称为內法向量. 对一般的凸曲面所說的外法向量是指任意承托支面的与此凸曲面不在同一側的法向量,內法向量是指外法向量的負向量.

§2. 等时区域的性質

1° 等时区域 $G^{\pm}(x_0, T)$ 的性質。

i) $G^{\pm}(x_0, T)$ 是有界凸閉集。

由(1.6)及(1.7)知 $G^{\pm}(x_0, T)$ 的有界性是显然的。

設 $x_1, x_2 \in G^{+}(x_0, T)$，則有 $u_1(t), u_2(t) \in V(t_0, t_0+T)$ 滿足

$$x_i = \Phi(t_0, t_0+T)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u_i(\tau)d\tau\right),\ i = 1, 2.$$

因为对任 λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，都有

$$\lambda u_1(t) + (1-\lambda)u_2(t) \in V(t_0, t_0+T),$$

且

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \Phi(t_0, t_0+T)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)[\lambda u_1(\tau) + (1-\lambda)u_2(\tau)]d\tau\right)$$

故

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in G^{+}(x_0, T),$$

因此，$G^{+}(x_0, T)$ 是凸集。同样可証 $G^{-}(x_0, T)$ 的凸性。

設序列 $\{x_n\}$, $x_n \in G^{+}(x_0, T)$, $n = 1, 2, \cdots$，收斂于 x^*。今証 $x^* \in G^{+}(x_0, T)$。因 $x_n \in G^{+}(x_0, T)$, $n = 1, 2, \cdots$，故有 $\{u_n(t)\}$, $u_n(t) \in V(t_0, t_0+T)$, $n = 1, 2, \cdots$，滿足

$$x_n = \Phi(t_0, t_0+T)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u_n(\tau)d\tau\right),\ n = 1, 2, \cdots,$$

現在把 $u_n(t)$ 的每个分量 $u_n^i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, r$，看作平方可积函数空間 $L_2(t_0, t_0+T)$ 的元素。因为 $|u_n^i(t)| \leqslant 1$，故它在 $L_2(t_0, t_0+T)$ 中的模 $\|u_n^i\| \leqslant \sqrt{T}$, $n = 1, 2, \cdots$, $i = 1, 2, \cdots, r$，因而对每个 i，$\{u_n^i(t)\}$ 一致有界。于是在序列 $\{u_n^i(t)\}$ 中必有一子序列弱收斂于 $u^{i*}(t) \in L_2(t_0, t_0+T)$, $i = 1, 2, \cdots, r$，且几乎对所有 t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+T$, $|u^{i*}(t)| \leqslant 1$。因为，在零測度集上改变 $u^{i*}(t)$ 的值不会影响方程組(1.2)的解，故可以認为 $|u^{i*}(t)| \leqslant 1$ 处处成立。令

$$u^*(t) = (u^{1*}(t), u^{2*}(t), \cdots, u^{r*}(t)),$$

則 $u^*(t) \in V(t_0, t_0+T)$。但由 $u^*(t)$ 的定义，得

$$x^* = \Phi(t_0, t_0+T)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u^*(\tau)d\tau\right),$$

即

$$x^* \in G^{+}(x_0, T),$$

因此 $G^{+}(x_0, T)$ 是閉集。同样可証 $G^{-}(x_0, T)$ 的閉性。

显然

$$S^{\pm}(x_0, T) \subset G^{\pm}(x_0, T).$$

ii) 当 $T > 0$ 时，在 R_n 中 $\mathring{G}_{\pm}(x_0, T)$ 是非空集。因而是 n 維的。

把(1.6)式改写为：

$$x - \Phi(t_0, t_0+T)x_0 = \Phi(t_0, t_0+T)\int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \qquad (2.1)$$

并用 $\psi^1(t), \psi^2(t), \cdots, \psi^n(t)$ 表示矩陣 $\Phi^{-1}(t_0, t)$ 的行向量。

令

$$m = \max_i \{ \sup_{t\in[t_0, t_0+T]} (|(\psi^i(t), b_1(t))| + 1)\};$$

$$u_i(t) = ((\psi^i(t), b_1(t))/m^2, 0, \cdots, 0), i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.2}$$

显然，$u_i(t) \in V(t_0, t_0 + T)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 設

$$\begin{aligned} z_i &= \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u_i(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) b_1(\tau) \frac{(\psi^i(\tau), b_1(\tau))}{m^2} d\tau. \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$x_i - \Phi(t_0, t_0 + T) x_0 = \Phi(t_0, t_0 + T) z_i, \tag{2.4}$$

$$i = 1, 2, \cdots, r,$$

这时

$$x_i \in G^+(x_0, T), i = 1, 2, \cdots, r.$$

今証向量組(2.3)綫性无关．事实上，向量組(2.3)所成的矩陣为函数組

$$\frac{(\psi^1(t), b_1(t))}{m}, \frac{(\psi^2(t), b_1(t))}{m}, \cdots, \frac{(\psi^n(t), b_1(t))}{m} \tag{2.5}$$

的在区間 $[t_0, t_0 + T]$ 上的格拉姆矩陣

$$\left[\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{(\psi^i(\tau), b_1(\tau))}{m} \cdot \frac{(\psi^j(\tau), b_1(\tau))}{m} d\tau\right].$$

假設向量組(2.3)綫性相关，則上述矩陣的行列式等于零，因而函数組(2.5)在 $[t_0, t_0 + T]$ 上綫性相关，卽有一組不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，滿足

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (\psi^i(t), b_1(t)) \equiv 0$$

或写成向量形式

$$(c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1(t)) \equiv 0, \tag{2.6}$$

其中 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$. 因为

$$\frac{d\Phi^{-1}(t_0, t)}{dt} = -\Phi^{-1}(t_0, t) A(t),$$

故以次微分(2.6)得

$$\left(c, -\Phi^{-1}(t_0, t) A(t) b_1(t) + \Phi^{-1}(t_0, t) \frac{db_1(t)}{dt}\right) =$$

$$= (c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1^{(2)}(t)) \equiv 0.$$

$$(c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1^{(3)}(t)) \equiv 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1^{(n)}(t)) \equiv 0.$$

取 $t = t_0$ 得

$$(c, b_1^{(1)}(t_0)) = 0,$$

$$(c, b_1^{(2)}(t_0)) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(c, b_1^{(n)}(t_0)) = 0.$$

因 $c \neq 0$，故向量組

$$b_1^{(1)}(t_0),\ b_1^{(2)}(t_0),\ \cdots,\ b_1^{(n)}(t_0)$$

綫性相关，这与系統(1.2)的非蜕化性矛盾．因此，向量組(2.3)綫性无关．由此知向量組(2.4)也綫性无关．

取

$$v_i(t) = -u_i(t),\ t \in [t_0, t_0 + T],\ i = 1, \cdots, n,$$

則对应的向量組(2.3)为 $-z_1, -z_2, \cdots, -z_n$，也是綫性无关．令

$$x_i' - \Phi(t_0, t_0 + T)x_0 = \Phi(t_0, t_0 + T)(-z_i),\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

則 $x_i' \in G^+(x_0, T)$．由此根据 $G^+(x_0, T)$ 的凸性得

$$\Phi(t_0, t_0 + T)x_0 \in \mathring{G}^+(x_0, T).$$

同样可証

$$\Phi(t_0 + T, t_0)x_0 \in \mathring{G}^-(x_0, T).$$

推論 1. 若一控制 $\tilde{u}(t) \in V(t_0, t_0 + T)$，其某一分量 $\tilde{u}^k(t)$ 在 $[t_0, t_0 + T]$ 的某一部分区間 $[t_1, t_2]$，$t_2 > t_1$，上有一常数 ε，$0 < \varepsilon \leqslant 1$，使不等式

$$|\tilde{u}^k(t)| \leqslant 1 - \varepsilon,\ t \in [t_1, t_2]$$

成立，則 $\tilde{u}(t)$ 所确定的点 $\tilde{x}$ 是 $G^\pm(x_0, T)$ 的內点．

証． 取如下形式的控制簇 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$：

$$u^i(t) = \tilde{u}^i(t),\ i \neq k,$$

$$u^k(t) = \begin{cases} \tilde{u}^k(t), & t \bar{\in} [t_1, t_2]; \\ \tilde{u}^k(t) + v^k(t), & t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

其中 $v^k(t)$ 是在 $[t_1, t_2]$ 上可測的 $|v^k(t)| \leqslant \varepsilon$ 的函数，这时

$$x = \Phi(t_0, t_0 + T)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right) =$$

$$= \tilde{x} + \Phi(t_1, t_0 + T)\int_{t_1}^{t_2} \Phi^{-1}(t_1, \tau)b_k(\tau)v^k(\tau)d\tau.$$

因为 $v^k(t)$，$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$，在 $|v^k(t)| \leqslant \varepsilon$ 的限制下可以任意取，由此由性質 ii）的証明知 $\tilde{x} \in \mathring{G}^+(x_0, T)$．同样可証 $\tilde{x} \in \mathring{G}^-(x_0, T)$．

iii）等时区域 $G^\pm(x_0, T)$ 对时間 T 是連續的．

設 T_1, T_2 是两个給定数，$x_1 \in G^+(x_0, T_1)$，則有 $u_1(t) \in V(t_0, t_0 + T_1)$ 满足(1.6)式．若 $T_2 \geqslant T_1$，則取

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1; \\ 0, & t_0 + T_1 \leqslant t \leqslant t_0 + T_2; \end{cases}$$

若 $T_1 \geqslant T_2$，則取

$$u_2(t) = u_1(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_2.$$

用 x_2 表示 $u_2(t)$ 所对应的点，則 $x_2 \in G^+(x_0, T_2)$，这时

$$\|x_2 - x_1\| = \|(\Phi(t_0, t_0 + T_2) - \Phi(t_0, t_0 + T_1))[x_0 +$$

$$+ \int_{[t_0, t_0+T_1]\cap[t_0, t_0+T_2]} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u_1(\tau)d\tau]\|.$$