

宋健科学论文选集

SELECTED WORKS OF J.SONG

科学出版社

宋健科学论文选集

SELECTED WORKS OF J. SONG

(1962—1997)

科学出版社

1999

内 容 简 介

本文集收集了宋健院士 1962—1997 年发表在各种期刊杂志上的科学论文 73 篇。包括系统控制论、分布参数系统、火箭导弹控制、人口控制论及交叉学科研究 4 部分。较全面地反映了宋健院士对中国的科技事业的主要贡献。

本书可供从事系统控制论、火箭导弹控制、人口控制论及交叉学科的科技工作者参考学习。

图书在版编目(CIP)数据

宋健科学论文选集/宋健著.-北京:科学出版社,1999.2

ISBN 7-03-007101-8

I. 宋… II. 宋… III. 自然科学-文集 IV. N53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 32964 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年2月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

1999年2月第一次印刷 印张: 47 1/2 插页: 1

印数: 1—1 000 字数: 1 114 000

定价: 119.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)



目 录

第一部分 系统控制论

1. 线性最速控制系统的分析与综合理论. 数学进展, 第 5 卷, 第 4 期, pp.
264—284, 1962(与韩京清合作) (2)
2. 最速控制系统的分析与综合. 自动化学报, 第 3 卷, 第 3 期, pp.
121—130, 1965(与韩京清合作) (23)
3. 具有一般质量指标的控制系统综合方法. 自动化学报, 第 1 卷, 第 1 期,
pp. 12—20, 1963 (33)
4. 状态空间中的频率方法. 国防科学技术报告, GF-19570, 1980(与于景元
合作) (42)
5. 系统控制论. 中国大百科全书《自动控制·系统工程》卷总序, pp. 1—6,
1991 (60)
6. 工程控制论. 《系统工程理论与实践》, 1985 年, 第 2 期, pp. 1—4(为中国
大百科全书《自动控制·系统工程》卷写的条目) pp. 134—136, 1991
..... (66)

PART I SYSTEM CONTROL THEORY

1. Синтез управляющей части оптимальной по быстродействию следящей
системы. *Автоматика и телемеханика*, том XX, №. 3, стр. 273—288,
1959 (72)
2. Синтез оптимальной системы управления на основании поля изохрон. *Известия
Академии Наук СССР, ОТН Энергетика и автоматика*, 1960, №. 5, стр.
96—103. (88)
3. Оптимальное управление в одной нелинейной системе. *Автоматика и
телемеханика*, том XXI, №. 1, стр. 3—14, 1960 (96)
4. Синтез оптимальных систем автоматического управления по
принципу максимума. Автореферат диссертации, 1960. Приложения;
Отзывы на диссертацию. А. А. Фельдбаум, В. В. Добронравов,
К. Станюкович, В. В. Солодовников (108)
5. Оптимальный следящий привод с двумя параметрами управления.
Автоматика и телемеханика, том XXII, №. 2, стр. 157—170, 1961.

- (всотрудничестве с А. Е. Бор-Раменский) (139)
6. К построению функционального преобразователя со многими входами.
Известия Академии Наук СССР, Энергетика и автоматика, 1961, №. 2,
 стр. 120—127. (в сотрудничестве с А. Г. Бутковский) (153)
7. Analysis and Synthesis of Time-optimal Control Systems. *Proceedings
 of the Second IFAC Congress*, Basle, 1963, pp. 347—351
 (In Collaboration with K. C. Hang) (161)
8. Analysis and Synthesis of Time Optimal Control for Linear Systems
 with Variable Coefficients. *Scientia Sinica*, Vol. 13, No. 6, pp. 993—
 1004, 1964 (In Collaboration with K. C. Han) (166)

第二部分 分布参数系统·火箭导弹控制

1. 带有常微分控制器的分布参数反馈系统. 中国科学, 1975 年, 第 2 期,
 pp. 141—166(与于景元合作) (180)
2. 点测量点控制的分布参数系统. 中国科学, 1979 年, 第 2 期, pp. 131—
 141(与于景元合作) (206)
 附: 钱学森对此项研究获国家自然科学奖的评语 (216)
3. 细长飞行器自动驾驶仪设计的分布参数系统理论. 宇航学报, 1980 年,
 第 2 期, pp. 1—20(与于景元、朱广田、毕大川合作) (217)
4. 在推力和阻力作用下火箭横向振动分析. 国防科技报告, GF-23778,
 1981 年 2 月, pp. 6—24 (237)
5. 具有结构阻尼的自由弹性梁的解的渐近性质. 中国科学, 27(8):
 758—765, 1984(与于景元、胡顺菊、肖永震、朱广田合作) (256)

PART II DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS · MISSILE AND SPACE-CRAFT CONTROL

1. On the Theory of Distributed Parameter Systems with Ordinary
 Feedback Control. *Scientia Sinica*, Vol. 18, No. 3, 1975, pp.
 281—310 (In Collaboration with Jing-yuan Yü) (266)
2. On the Theory of Distributed Parameter Systems with Ordinary
 Point-wise Feedback Control and Measurement. *Scientia Sinica*,
 Special Issue (Ⅱ) on Mathematics, Vol. 22, No. 2, pp. 177—189,
 1979 (In Collaboration with Jingyuan Yu) (296)
3. The Distributed Parameter System Theory for Autopilot Design
 for a Slender Vehicle. *Proceedings of IAF XXXII Congress*, Rome,
 Sep. 6—12, 1981. Published in *Acta Astronautica*, Vol. 9, 6—7, pp.

- 431—435, 1982 (In Collaboration with J. Y. Yu, G. T. Zhu and D. C. Bi) (309)
4. Asymptotic Property of the Solution of a Freely Elastic Beam with Structural Damping. *Scientia Sinica*, Series A, Vol. 27, No. 12, pp. 1307—1316, 1984 (In Collaboration with J. Y. Yu, S. J. Hu, Y. Z. Xiao and G. T. Zhu) (314)

第三部分 人口控制论

1. 人口发展过程的预测. 中国科学, 1980 年, 第 9 期, pp. 920—932 (与于景元、李广元合作) (326)
2. 人口发展的双线性最优控制. 自动化学报, 第 6 卷, 第 4 期, pp. 241—249, 1980 (339)
3. 关于人口系统稳定性理论的几个注记. 科学通报, 第 25 卷, 第 23 期, pp. 1061—1062, 1980 (与于景元合作) (348)
4. 人口动态过程的控制和大系统结构. 《系统工程论文集》, pp. 40—49, 科学出版社, 1980 (与王浣尘、于景元、李广元合作) (350)
5. 关于计算人口平均期望寿命的注记. 科学通报, 第 26 卷, 第 5 期, pp. 263—264, 1981 (360)
6. 人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率. 自动化学报, 第 7 卷, 第 1 期, pp. 1—12, 1981 (与于景元合作) (362)
7. 人口发展方程的解及其渐近性质. 科学通报, 第 22 期, pp. 1356—1359, 1982 年 (与于景元、王彦祖、赵忠信、刘嘉荃、冯德兴、朱广田、胡顺菊合作) (374)
8. 人口算子的谱特性与人口半群的渐近性质. 数学物理学报, 第 2 卷, 第 2 期, pp. 137—144, 1982 (与于景元、王彦祖、胡顺菊、赵忠信、刘嘉荃、冯德兴、朱广田合作) (378)
9. 非定常人口系统的动态特性和几个重要人口指数的计算公式. 中国科学(A 辑), 1983 年, 第 11 期, pp. 1043—1051, 1983 (与陈任昭合作) (386)
10. 200 年论战的尾声. 《人口控制论方略》一书的序, 人民教育出版社, 1985 (395)
11. 人口发展算子的谱性质及人口系统的能控性. 中国科学(A 辑), 1986 年, 第 2 期, pp. 113—123, 1986 (与于景元、刘长凯、张连平、朱广田合作) (397)
12. 人口控制论. 软科学研究, 1989 年, 第 1 期, pp. 1—7 (与于景元、孔德涌合作) (408)

13. 人口控制. 自动化学报, 第 15 卷, 第 5 期, pp. 385—391, 1989 (415)
14. 人口生育率双向极限. 中国科学(B 辑), 1991 年, 第 5 期, pp. 505—
511(与于景元合作) (422)
15. 附件: 美著名人口学家奇菲兹(Nathan Keyfitz, 哈佛大学教授, 社会学系主任)对《中国的人口控制——理论及其应用》(英文版, Praeger 出版, 1985 年。宋健、段纪宪、于景元合著)一书的评价译文 (429)

PART III POPULATION SYSTEM CONTROL

1. Theory on Prospect of Population Evolution Processes. *Scientia Sinica*, Vol. 24, No. 3, pp. 431—444, 1981 (In Collaboration with J. Y. Yu and G. Y. Li) (432)
2. A Remark on Life Expectancy of Population Systems. *Science Bulletin* (Kexue Tongbao), Vol. 26, No. 7, pp. 585—587, 1981 (446)
3. Remarks on Stability Theory of Population Systems. *Science Bulletin* (Kexue Tongbao), Vol. 26, No. 1, pp. 9—11, 1981 (In Collaboration with J. Y. Yu) (449)
4. On Stability Theory of Population Systems and Critical Fertility Rates. *Mathematical Modelling*, Vol. 2, pp. 109—121, 1981 (In Collaboration with J. Y. Yu) (452)
5. Dynamics of Population Control and Perspective Estimation. *Proceedings of IFAC, 8th Congress*, Aug. 24—28, Kyoto. XXI, pp. 13—17, 1981 (In Collaboration with H. C. Wang, J. Y. Yu, G. Y. Li) (465)
6. Some Developments in Mathematical Demography and Their Application to the People's Republic of China. *Theoretical Population Biology*. Vol. 22, No. 3, pp. 382—391, 1982 (470)
7. Spectral Properties of Population Operator and Asymtotic Behaviour of Population Semigroup. *Acta Mathematica Scientia*, Vol. 2, No. 2, pp. 139—148, 1982 (In Collaboration with J. Y. Yu, Y. Z. Wang, S. J. Hu, Z. X. Zhao, J. Q. Liu, D. X. Feng, G. T. Zhu) (480)
8. Dynamic Characteristics of Nonstationary Population Systems and Computational Formulas of Several Important Demographic Indices. *Scientia Sinica* (Series A), Vol. 26, No. 12, pp. 1314—1325, 1983 (In Collaboration with R. Z. Chen) (490)

9. Spectral Properties of Population Evolution and Controllability of Population System. *Scientia Sinica* (Series A), Vol. XXIX, No. 8, pp. 800—812, 1986 (In Collaboration with J. Y. Yu, C. K. Liu, L. P. Zhang, G. T. Zhu) (502)
10. Population Control. An article in *System & Control Encyclopedia*. pp. 3751—3755, Pergamon Press, 1987 (515)
11. Population System Control. *Mathl Comput. Modelling*, Vol. 11, pp. 11—16, 1988 (In Collaboration with D. Y. Kong, J. Y. Yu) (520)
12. Double-Edged Limit of Total Fertility Rates *Science in China* (Series B) Vol. 34, No. 11, pp. 1354—1361, 1991 (In Collaboration with J. Y. Yu) (526)
13. System Science & Policy-making. *Proceedings of International Conference on Control and Information*. The Chinese University Press, pp. 1—5. Hong Kong, 1995, June 5—9 (534)

第四部分 交叉学科研究

1. 关于我国人口发展问题的定量研究报告. 世界经济调研, 第 5 期 (总 77 期), 1980 年 1 月 31 日 (与于景元、李广元合作). 附: 伍绍祖、王震、钱学森、许涤新、陈慕华的信函 (五件) (540)
2. 模型与实体. 光明日报, 1980 年 7 月 11 日 (与华罗庚合作) (547)
3. 从现代科学看人口问题. 光明日报, 1980 年 10 月 3 日 (549)
4. 悲观·乐观和未来学. 未来学杂志, 1981 年, 第 1 期 (555)
5. 社会科学研究的定量方法. 中国社会科学, 1982, 第 6 期, pp. 97—105 (557)
6. 论科学技术的载体. 科学学, 1984 年, 第 3 期, pp. 6—11 (566)
7. 科技改革与中国的现代化. 中国建设, 1986 年, 第 12 期, 新华文摘, 1987 年, 第 2 期发摘要, pp. 197—199 (572)
8. 把基础性研究工作提高到新水平. 人民日报, 1989 年 2 月 18 日 (575)
9. 论科技情报工作的重要地位. 情报学报, 第 9 卷, 第四期, pp. 241—244, 1990 年 8 月 (578)
10. 加强基础性研究, 攀登科学技术高峰. 科技日报, 1992 年 8 月 14 日 (582)
11. 超越疑古, 走出迷茫. 河北师范大学学报, 第 19 卷, 第四期, pp. 1—8, 1996. 附件一: 与周谷城先生的通信; 附件二: 美国哈佛大学张光直

- 教授的信 (586)
12. 也论“谁来养活中国人”. 中国人口·资源与环境, 第7卷, 第四期, pp. 1—4, 1997年12月 (598)
13. 实施科教兴国战略, 创造跨世纪的辉煌. 中国软科学, 1998年第1期 (总85期), pp. 6—17 (602)

PART IV INTERDISCIPLINARY STUDIES

1. Population Development—Goals and Plans. An article in the Book: *China's Population*, pp. 25—31, New World Press, Beijing, 1981 (616)
 2. Reforms and Open Policy in China. *Science* (AAAS), Vol. 229, No. 4713, pp. 525—527, 9 Aug., 1985 (621)
 3. Science and Technology for the People—The Highest Priority. A Speech at a meeting of OECD diplomats in Beijing, Dec., 1989 ... (624)
 4. Теория систем управления на основе принципа поля оптимальности и ее применение к техническим и социальным проблемам. Приложение: Заключение специализированного учёного совета. Научный доклад - Диссертация, Москва, МГТУ, 1990 (632)
 5. China: A Land of Hope. *Beijing Review*, Aug. 22—28, 1994 ... (684)
 6. High Technology Programmes in China. An Article in the Book *New Generic Technologies in Developing Countries*, ed. M. R. Bhagavan (SIAD, Sweden), pp. 95—98. MacMillan Press LTD., 1997 (691)
 7. Science and Technology in China: the Engine of Rapid Economic Development *Technology in Society*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 281—294. Pergamon, 1997 (694)
 8. Dismissing Doubts and Clearing Away Confusions—Outline of Speech Delivered at the Seminar Initiating the Xia-Shang-Zhou Chronology Project, 16 May 1996. *Social Sciences in China*, Issue 3, Autumn, 1997, pp. 71—82 (708)
 9. No Impasse for China's Development. Forum Engelberg, 8th, Conference, 18—21. March, 1997, Switzerland (720)
- 著作目录(1959—1997) (736)
- 宋健简历 (744)

第一部分

系统控制论

綫性最速控制系統的分析与綜合理論*

宋 健 韓 京 清

(中国科学院数学研究所)

由于生产实践的客观需要,控制理論的研究近几年来获得了迅速的进展,它已成为微分方程理論中的一个重要的、新的方向。如果說古典微分方程理論的主要研究对象是了解物質运动的客观規律,那么控制理論的任务是研究如何去影响或制約这个运动規律,使之滿足或适应人們的需要。从这个观点看来,微分方程中的控制理論的任何新的研究結果都将直接有助于人們改造客观世界的斗争。

最优控制理論包括两个方面:最优控制的性質和最优控制系統的综合。在前一方面目前已得到了卓越的成就^[3,4],但在最优控制系統的综合理論研究方面尚需科学工作者做出更大的努力。

本文的目的,是研究解决綫性最速控制系統的综合問題。我們所用的研究方法不同于文献[3]的方法,而引用了等时区域的概念。本文所得到的結果部分地与上述文献中的結論重合,但关于綜合理論部分却不能为前者所代替。本文§2—4对一般变系数綫性系統的等时区域的几何性質做了詳尽的分析,而在§5内对常系数綫性系統的综合理論做了些研究。

§ 1. 問題的提出

設有一受控制系統,它的运动規律可由下面常系数綫性常微分方程組所描繪:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^i x^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^r b_{\beta}^i u^{\beta},$$

$i = 1, 2, \dots, n, r, 1 \leq r \leq n, \text{是常数.}$

或写成向量形式:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (1.1)$$

其中, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ 是相空間 R_n 中的点,称为系統的描繪点; $u = (u^1, u^2, \dots, u^r)$ 是 r 維欧氏空間 E_r 中的閉正方体 $U: |u^i| \leq 1, i = 1, \dots, r$ 的一点,称为系統的控制参数; A 是 $n \times n$ 矩陣; B 是 $n \times r$ 矩陣。

設在相空間 R_n 中有一任意固定的有界凸閉区域 Q , 現需找出 r 个 n 元的控制函数

$$u^i = u^i(x^1, x^2, \dots, x^n) = u^i(x), i = 1, 2, \dots, r.$$

若将它代入受控系統(1.1)后,使系統变为非受控系統,并且系統的描繪点自任何初始状态出发,均以最短的时间到达域 Q 。

* 1962年6月27日收到。

在 § 2—4 內對一般綫性系統

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u \quad (1.2)$$

的等時區域的性質做詳盡分析, 其中 $A(t) = (a_{ij}^i(t))$, $t_0 \leq t < +\infty$ 的元素為 $n-2$ 次可微函數; $B(t) = (b_i^j(t))$, $t_0 \leq t < +\infty$ 的元素為 $n-1$ 次可微函數。顯然, 對(1.2)所討論的等時區域的性質, 對系統(1.1)也是成立的。

設 $b_i(t)$ 是矩陣 $B(t)$ 的第 i 列向量, 令

$$b_i^{(1)}(t) = b_i(t), \quad b_i^{(j)}(t) = -A(t)b_i^{(j-1)}(t) + \frac{db_i^{(j-1)}(t)}{dt},$$

$$j = 2, 3, \dots, n.$$

若對每個 i , $1 \leq i \leq n$, 向量組

$$b_i^{(1)}(t), b_i^{(2)}(t), \dots, b_i^{(n)}(t) \quad (1.3)$$

對任何 t , $t_0 \leq t \leq +\infty$, 都綫性無關, 則稱系統(1.2)在 $t_0 \leq t < +\infty$ 上為非蛻化的。對系統(1.1)向量(1.3)為

$$b_i, -Ab_i, \dots, (-1)^{n-1}A^{n-1}b_i.$$

下面我們總假定系統(1.2)和(1.1)為非蛻化的。

控制 $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, 稱為可准控制, 如果 $u(t) \in U$, $t_1 \leq t \leq t_2$, 且 $u(t)$ 的每個分量在 $[t_1, t_2]$ 上為 L 可積函數。在 $[t_1, t_2]$ 上確定的可准控制的全体記為 $V(t_1, t_2)$ 。

設 $\Phi(t_0, t)$ 是滿足條件

$$\Phi(t_0, t_0) = E$$

的方程組

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

的標準基本解矩陣, 則

$$\Phi(t_1, t)\Phi(t_0, t_1) = \Phi(t_0, t),$$

$$\Phi^{-1}(t_0, t_1) = \Phi(t_1, t_0).$$

若給定了一可准控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$, 則(1.2)的滿足起始條件 $x(t_0) = x_0$ 的解為

$$x(t) = \Phi(t_0, t)(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau) =$$

$$= \Phi(t_0, t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (1.4)$$

若(1.2)為常係數方程組, 則 $\Phi(t_0, t) = e^{A(t-t_0)}$, 故

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (1.5)$$

我們稱 $x(t)$ 為控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 所對應的軌道, 把 x_0 稱為 $t = t_0$ 時的起始狀態 (或簡稱起點), $x(t_0 + T) = x_1$ 稱為控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 所對應的終點, 此時說, 控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 把 x_0 引至 x_1 。

定義 1. 設 $x_0, x_1 \in R_n$, 是任意給定的點, $T \geq 0$ 是任意數。系統(1.2)的 t_0 時以 x_0

为起点的 T 等时区域是指所有控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 所对应的 t_0 时以 x_0 为起点的轨道 $x(t)$ 的终点集合, 记之为 $G_{t_0}^+(x_0, T)$. 相仿的, $(t_0 + T)$ 时以 x_0 为终点的 T 等时区域是指所有控制 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 所对应的 $(t_0 + T)$ 时以 x_0 为终点的轨道的起点集合, 记之为 $G_{t_0}^-(x_0, T)$. 若终点不是一个点, 而是某一固定集 Q 时, 用 $G_{t_0}(Q, T)$ 表示以 Q 的点为终点的轨道的起点集合. 这时

$$G_{t_0}(Q, T) = \bigcup_{x_0 \in Q} G_{t_0}^-(x_0, T).$$

显然, 若 $x \in G_{t_0}^+(x_0, T)$ 或 $x \in G_{t_0}^-(x_0, T)$, 则有 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 满足

$$x = \Phi(t_0, t_0 + T)(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau); \quad (1.6)$$

或

$$x = \Phi(t_0 + T, t_0)(x_0 + \int_{t_0+T}^{t_0} \Phi^{-1}(t_0 + T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau). \quad (1.7)$$

若 $x \in G_{t_0}(Q, T)$, 则有 $z \in Q$ 和 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$, 满足

$$x = \Phi(t_0 + T, t_0)(z + \int_{t_0+T}^{t_0} \Phi^{-1}(t_0 + T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau). \quad (1.8)$$

下面除定理 4 外, 所考虑的起始时刻都是 t_0 , 故在等时区域的符号中我们将不写下标 t_0 . 用 $S^\pm(x_0, T)$, $S(Q, T)$ 和 S 分别表示 $G^\pm(x_0, T)$, $G(Q, T)$ 和 Q 的边界; 用 $\dot{G}^\pm(x_0, T)$, $\dot{G}(Q, T)$ 和 $\dot{Q}$ 分别表示它们的内部.

定义 2. 设 $T_0 > 0$. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 当 $T_1, T_2 \in [t_0, t_0 + T_0]$ 满足不等式

$$|T_1 - T_2| < \delta$$

时, 对任意 $x_1 \in G^\pm(x_0, T_1)$ 都有 $x_2 \in G^\pm(x_0, T_2)$, 反之, 对任意 $x_2 \in G^\pm(x_0, T_2)$ 都有 $x_1 \in G^\pm(x_0, T_1)$ 满足

$$\|x_1 - x_2\| < \varepsilon,$$

那么, 我们说等时区域 $G^\pm(x_0, T)$ 在 $[t_0, t_0 + T_0]$ 上对 T 连续.

同样我们可以定义等时区域 $G(Q, T)$ 的连续性.

设在 R_n 中凸闭区域 Q 是由不等式

$$g_l(x^1, x^2, \dots, x^n) \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots, p$$

所确定, 其中 $g_l(x)$ 是连续可微函数, 且 $\text{grad } g_l(x)$ 在 S 的一切点上都不为零. 显然, S 上每一点 $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ 有 $i, 1 \leq i \leq p$, 满足

$$g_i(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0,$$

$$g_l(x^1, x^2, \dots, x^n) \leq 0, \quad l \neq i.$$

下面用符号 $g(x) = 0$ 表示决定 S 的一切上述诸式, 用 $\text{grad } g(x)$, $x \in S$, 表示 S 的过 x 点的任意承托支面的与 Q 不在同一侧的法向量. 显然, 若 x 为 S 的光滑点, 则有 $i, 1 \leq i \leq p$, 使得 $\text{grad } g_i(x) = \text{grad } g(x)$, 若 x 为 S 上的不光滑点, 则 $\text{grad } g(x)$ 就认为是在此点几个 $\text{grad } g_i(x)$ 的锥性组合. 我们把向量 $\text{grad } g(x)$, $x \in S$, 称为过 x 的 S 的外法向量, 其负向量称为内法向量. 对一般的凸曲面所说的外法向量是指任意承托支面的与此凸曲面不在同一侧的法向量, 内法向量是指外法向量的负向量.

§ 2. 等時區域的性質

1° 等時區域 $G^\pm(x_0, T)$ 的性質.

i) $G^\pm(x_0, T)$ 是有界凸閉集.

由(1.6)及(1.7)知 $G^\pm(x_0, T)$ 的有界性是顯然的.

設 $x_1, x_2 \in G^+(x_0, T)$, 則有 $u_1(t), u_2(t) \in V(t_0, t_0 + T)$ 滿足

$$x_i = \Phi(t_0, t_0 + T)(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u_i(\tau) d\tau), \quad i = 1, 2.$$

因為對任 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, 都有

$$\lambda u_1(t) + (1 - \lambda) u_2(t) \in V(t_0, t_0 + T),$$

且

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 = \Phi(t_0, t_0 + T)(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) [\lambda u_1(\tau) + (1 - \lambda) u_2(\tau)] d\tau)$$

故

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in G^+(x_0, T),$$

因此, $G^+(x_0, T)$ 是凸集. 同樣可証 $G^-(x_0, T)$ 的凸性.

設序列 $\{x_n\}, x_n \in G^+(x_0, T), n = 1, 2, \dots$, 收斂於 x^* . 今証 $x^* \in G^+(x_0, T)$. 因 $x_n \in G^+(x_0, T), n = 1, 2, \dots$, 故有 $\{u_n(t)\}, u_n(t) \in V(t_0, t_0 + T), n = 1, 2, \dots$, 滿足

$$x_n = \Phi(t_0, t_0 + T)(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u_n(\tau) d\tau), \quad n = 1, 2, \dots,$$

現在把 $u_n(t)$ 的每個分量 $u_n^i(t), i = 1, 2, \dots, r$, 看作平方可積函數空間 $L_2(t_0, t_0 + T)$ 的元素. 因為 $|u_n^i(t)| \leq 1$, 故它在 $L_2(t_0, t_0 + T)$ 中的模 $\|u_n^i\| \leq \sqrt{T}, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, r$, 因而對每個 $i, \{u_n^i(t)\}$ 一致有界. 於是在序列 $\{u_n^i(t)\}$ 中必有一子序列弱收斂於 $u^{i*}(t) \in L_2(t_0, t_0 + T), i = 1, 2, \dots, r$, 且幾乎對所有 $t, t_0 \leq t \leq t_0 + T, |u^{i*}(t)| \leq 1$. 因為, 在零測度集上改變 $u^{i*}(t)$ 的值不會影響方程組(1.2)的解, 故可以認為 $|u^{i*}(t)| \leq 1$ 處處成立. 令

$$u^*(t) = (u^{1*}(t), u^{2*}(t), \dots, u^{r*}(t)),$$

則 $u^*(t) \in V(t_0, t_0 + T)$. 但由 $u^*(t)$ 的定義, 得

$$x^* = \Phi(t_0, t_0 + T)(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u^*(\tau) d\tau),$$

即

$$x^* \in G^+(x_0, T),$$

因此 $G^+(x_0, T)$ 是閉集. 同樣可証 $G^-(x_0, T)$ 的閉性.

顯然

$$S^\pm(x_0, T) \subset G^\pm(x_0, T).$$

ii) 當 $T > 0$ 時, 在 R_n 中 $\dot{G}_\pm(x_0, T)$ 是非空集. 因而是 n 維的.

把(1.6)式改寫為:

$$x - \Phi(t_0, t_0 + T)x_0 = \Phi(t_0, t_0 + T) \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

並用 $\psi^1(t), \psi^2(t), \dots, \psi^n(t)$ 表示矩陣 $\Phi^{-1}(t_0, t)$ 的行向量.

令

$$m = \max_i \left\{ \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} (|\langle \psi^i(t), b_1(t) \rangle| + 1) \right\};$$

$$u_i(t) = (\langle \psi^i(t), b_1(t) \rangle / m^2, 0, \dots, 0), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

显然, $u_i(t) \in V(t_0, t_0 + T), i = 1, 2, \dots, n$. 设

$$z_i = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) B(\tau) u_i(\tau) d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau) b_1(\tau) \frac{\langle \psi^i(\tau), b_1(\tau) \rangle}{m^2} d\tau. \quad (2.3)$$

$$x_i - \Phi(t_0, t_0 + T) x_0 = \Phi(t_0, t_0 + T) z_i, \quad (2.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, r,$$

这时

$$x_i \in G^+(x_0, T), i = 1, 2, \dots, r.$$

今证向量组(2.3)线性无关. 事实上, 向量组(2.3)所成的矩阵为函数组

$$\frac{\langle \psi^1(t), b_1(t) \rangle}{m}, \frac{\langle \psi^2(t), b_1(t) \rangle}{m}, \dots, \frac{\langle \psi^n(t), b_1(t) \rangle}{m} \quad (2.5)$$

的在区间 $[t_0, t_0 + T]$ 上的格拉姆矩阵

$$\left[\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\langle \psi^i(\tau), b_1(\tau) \rangle}{m} \cdot \frac{\langle \psi^j(\tau), b_1(\tau) \rangle}{m} d\tau \right].$$

假设向量组(2.3)线性相关, 则上述矩阵的行列式等于零, 因而函数组(2.5)在 $[t_0, t_0 + T]$ 上线性相关, 即有一组不全为零的常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^n c_i \langle \psi^i(t), b_1(t) \rangle \equiv 0$$

或写成向量形式

$$(c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1(t)) \equiv 0, \quad (2.6)$$

其中 $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. 因为

$$\frac{d\Phi^{-1}(t_0, t)}{dt} = -\Phi^{-1}(t_0, t) A(t),$$

故以次微分(2.6)得

$$\begin{aligned} & \left(c, -\Phi^{-1}(t_0, t) A(t) b_1(t) + \Phi^{-1}(t_0, t) \frac{db_1(t)}{dt} \right) = \\ & = (c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1^{(2)}(t)) \equiv 0, \\ & (c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1^{(3)}(t)) \equiv 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & (c, \Phi^{-1}(t_0, t) b_1^{(n)}(t)) \equiv 0. \end{aligned}$$

取 $t = t_0$ 得

$$\begin{aligned} & (c, b_1^{(1)}(t_0)) = 0, \\ & (c, b_1^{(2)}(t_0)) = 0, \\ & \dots\dots\dots, \\ & (c, b_1^{(n)}(t_0)) = 0. \end{aligned}$$

因 $c \neq 0$, 故向量組

$$b_1^{(1)}(t_0), b_1^{(2)}(t_0), \dots, b_1^{(n)}(t_0)$$

綫性相關, 這與系統(1.2)的非脫化性矛盾。因此, 向量組(2.3)綫性無關。由此知向量組(2.4)也綫性無關。

取

$$v_i(t) = -u_i(t), t \in [t_0, t_0 + T], i = 1, \dots, n,$$

則對應的向量組(2.3)為 $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$, 也是綫性無關。令

$$x'_i - \Phi(t_0, t_0 + T)x_0 = \Phi(t_0, t_0 + T)(-x_i), i = 1, 2, \dots, n,$$

則 $x'_i \in G^+(x_0, T)$ 。由此根據 $G^+(x_0, T)$ 的凸性得

$$\Phi(t_0, t_0 + T)x_0 \in \dot{G}^+(x_0, T).$$

同樣可証

$$\Phi(t_0 + T, t_0)x_0 \in \dot{G}^-(x_0, T).$$

推論 1. 若一控制 $\tilde{u}(t) \in V(t_0, t_0 + T)$, 其某一分量 $\tilde{u}^k(t)$ 在 $[t_0, t_0 + T]$ 的某一部分區間 $[t_1, t_2]$, $t_2 > t_1$, 上有一常數 ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, 使不等式

$$|\tilde{u}^k(t)| \leq 1 - \varepsilon, t \in [t_1, t_2]$$

成立, 則 $\tilde{u}(t)$ 所確定的點 $\tilde{x}$ 是 $G^+(x_0, T)$ 的內點。

証。取如下形式的控制簇 $u(t) \in V(t_0, t_0 + T)$:

$$u^i(t) = \tilde{u}^i(t), i \neq k,$$

$$u^k(t) = \begin{cases} \tilde{u}^k(t), & t \in [t_1, t_2]; \\ \tilde{u}^k(t) + v^k(t), & t \in [t_1, t_2], \end{cases}$$

其中 $v^k(t)$ 是在 $[t_1, t_2]$ 上可測的 $|v^k(t)| \leq \varepsilon$ 的函數, 這時

$$x = \Phi(t_0, t_0 + T)(x_0 + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau) =$$

$$= \tilde{x} + \Phi(t_1, t_0 + T) \int_{t_1}^{t_2} \Phi^{-1}(t_1, \tau)b_k(\tau)v^k(\tau)d\tau.$$

因為 $v^k(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, 在 $|v^k(t)| \leq \varepsilon$ 的限制下可以任意取, 由此由性質 ii) 的證明知 $\tilde{x} \in \dot{G}^+(x_0, T)$ 。同樣可証 $\tilde{x} \in \dot{G}^-(x_0, T)$ 。

iii) 等時區域 $G^+(x_0, T)$ 對時間 T 是連續的。

設 T_1, T_2 是兩個給定數, $x_1 \in G^+(x_0, T_1)$, 則有 $u_1(t) \in V(t_0, t_0 + T_1)$ 滿足 (1.6) 式。若 $T_2 \geq T_1$, 則取

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & t_0 \leq t \leq t_0 + T_1; \\ 0, & t_0 + T_1 \leq t \leq t_0 + T_2; \end{cases}$$

若 $T_1 \geq T_2$, 則取

$$u_2(t) = u_1(t), t_0 \leq t \leq t_0 + T_2.$$

用 x_2 表示 $u_2(t)$ 所對應的點, 則 $x_2 \in G^+(x_0, T_2)$, 這時

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Phi(t_0, t_0 + T_2) - \Phi(t_0, t_0 + T_1)\| [x_0 +$$

$$+ \int_{[t_0, t_0+T_1] \cap [t_0, t_0+T_2]} \Phi^{-1}(t_0, \tau)B(\tau)u_1(\tau)d\tau]\|.$$