高等学校教材

解析几何简明教程

吴光磊　田畴　编

高等教育出版社

高等学校教材

解析几何简明教程

吴光磊　田　畴　编

高等教育出版社

内容简介

本书是在吴光磊编"空间解析几何教程"和吴光磊、田畴编"平面解析几何补充教程"的基础上修订而成的。本教材的最大特点是简明和适于教学，内容包括：空间直角坐标、平面和直线，向量代数，二次曲面，正交变换和仿射变换，附录Ⅰ：二次曲线的一般理论，附录Ⅱ：射影几何初步。

本书可作为综合性大学和师范院校数学系学生的教材，也可供相关专业选用。

图书在版编目(CIP)数据

解析几何简明教程/吴光磊，田畴编. —北京：高等教育出版社，2003.9

ISBN 7-04-011879-3

Ⅰ.解… Ⅱ.①吴… ②田… Ⅲ.解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013756 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	北京市朝阳区北苑印刷厂

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2003 年 6 月第 1 版
印　　张	5.875	印　　次	2003 年 9 月第 2 次印刷
字　　数	140 000	定　　价	8.60 元

前　言

吴光磊编“空间解析几何简明教程”和吴光磊、田畴编“平面解析几何补充教程”是在北京大学数学系按照1965年高等学校理科数学、力学、天文学编审委员会扩大会议拟定的“高等学校数学专业解析几何简明教程参考提纲(草案)”编写的，原拟作为综合大学和师范学院数学专业的教材。不幸的是，这两本书于1966年5月和6月出版后，立即遭遇“文化大革命”，因而未能起到预期的作用，甚至使之鲜为人知。直到1977年恢复高考后，本人于中国科学技术大学数学系为1977级开设解析几何课程时才得以选用这两本书作为教材。此后，中国科学技术大学数学系一直沿用这一教材。本教材最大特点是简明和适于教学。凡讲过这本书的老师都认为这是一部好教材，当然，在使用过程中也发现一些值得改进之处，修订本书的目的是为使之得到完善和补充，更适应当前的教学要求，发挥这一教材应有的作用。

修订主要有四个方面。修订之一是关于向量的内积和外积的性质的证明，原书坚持先引进坐标表示的讲法固然很有特点，但讲起来比较别扭，因为它不符合一般的认识规律，即使在吴先生过去的教学实践中也从来没有这样讲过。修订之二是关于平行坐标系。以直角坐标系为主是原教材的基本思想之一。无疑这是正确的，因为理解透了直角坐标系后再理解其它坐标系就容易得多。但原书对平行坐标系讲得实在太少，只涉及定义。现在稍微增加了一点内容，特别是引进了对偶坐标系的概念。修订之三是将平面解析几何部分压缩成一个附录“二次曲线的一般理论”。内容包括原书中的“坐标变换”一节和“二次曲线的一般理论”一章。

坐标变换是解析几何中的核心思想之一，而中学数学教学中则完全忽略了坐标变换，空间解析几何中又不可能对坐标变换进行扎实的训练。通过这一部分的讲授，除了关于二次曲线的知识外，更重要的是掌握坐标变换这一工具和理解不变量的思想。这一部分内容可以放在空间部分之前讲也可以放在二次曲面之前讲。修订之四是补充了射影几何。射影几何历来是数学系解析几何教学中的一个难题。讲不讲？如何讲？这些都是问题。一年级的学生理解用公理系统讲授的射影几何实在太困难，而把射影几何讲成代数又失去了讲授射影几何的意义。在解析几何课程中不包括射影几何也许是一个不得已的正确选择，虽然有一点遗憾。修订本中加上的附录“射影几何初步”采用了几何的讲法。加上这一个附录并不是主张在课程中讲授这一内容。这一部分可以作为好学生的阅读材料，也可以作为高年级学生的选修课或讲座的材料。学生有了一定的抽象能力之后理解起来就不困难了。在编写这一附录时主要参考了吴光磊先生 1962 年在北大数学系讨论班上所作的讲演。因此，这一部分仍与全书保持了一致的风格，特别是它的简明性。总之，修订后的教材仍然是一本简明教程。

此次编写工作得到了中国科技大学教务处的支持。

田　畴

2001 年 3 月于中国科学技术大学数学系

引 言

事物的存在和发展都有形式和数量这两个方面.这就是数学研究的对象:形和数.数的基本特征是可以进行运算.最简单的是代数运算,如四则运算、开方等,它们有简单而明确的法则,如分配律、移项变号等.用这些法则就能够把一部分概念推理变成符号演算,把一部分心算变成笔算.一些算术难题在代数中就可以列成方程,给出一般性的简易解法.这说明代数运算是非常有力而又简便的方法.

解析几何的特点就是用代数方法来确定一些几何图形,解决一些几何问题.为此,很自然的想法是首先在几何与代数之间架上桥梁,把它们沟通起来;由此几何问题就可以转化成代数问题,这就是坐标法的基本思想.

另一方面,不通过坐标,也可以在几何中建立向量运算,直接把代数运算引到几何中来.向量运算常常能够更简捷地解决一些几何问题,这就是向量代数的作用.

本书的内容概括地讲就是:用代数方法讨论一些简单的图形和变形的性质.所谓代数方法就是坐标法和向量运算,简单的图形和变形是指直线、平面、二次曲面和正交变换以及仿射变换.这些内容在代数、分析、力学、物理和一些工程技术中都是很有用的,它们所反映的事物在生活和生产实践中也是常见的,也是学习其他课程和解决某些实际问题的基础.

责任编辑　文小西
封面设计　李卫青
责任绘图　杜晓丹
版式设计　王艳红
责任校对　杨雪莲
责任印制　杨　明

郑重声明

目　　录

第一章 空间直角坐标、平面和直线

解析几何的基本方法是坐标法. 坐标法中的主要问题是用数表示点,用方程表示图形. 空间中最简单的图形是点、线、面,它们的位置通常是用距离和方向确定的. 因此,在空间解析几何开头这一章里,我们首先要建立点的坐标,随后就导出平面和直线的方程,并讨论计算有关的距离和方向等问题.

距离是几何中最原始的数量. 测定距离要用一个长度单位. 在本书中,我们假定:在空间中已经给定了一个长度单位,所有的距离都是对于这个给定的单位来讲的.

§1 空间直角坐标

1. 点的坐标

问题是要在空间中用数来确定点的位置. 我们知道,在平面上,一个点的位置可以由该点到两条互相垂直的直线的距离来确定. 同样地,在空间中,一个点的位置可以由该点到三个互相垂直的平面的距离来确定.

在空间中,任取一个点 O 并从点 O 画出三条互相垂直的轴(取定方向的直线),把这三条轴排定一个次序,依次记作 OX, OY, OZ. 这样就构成一个**(直角)坐标系**. 记做$[O;X,Y,Z]$. 点 O 叫做**原点**. 三条轴 OX, OY, OZ 都叫做**坐标轴**,并依次叫做 **X 轴**、**Y 轴**和 **Z 轴**. 由每两条坐标轴所决定的平面都叫做**坐标平面**;按照坐标平面所包含的坐标轴,分别叫做 **YZ 平面**、**ZX 平面**和 **XY 平面**,它们

依次垂直于 X 轴、Y 轴和 Z 轴.

一个坐标平面把空间分割成两部分,和它垂直的那条坐标轴所指向的那一部分叫做这个坐标平面的**正面**,另一部分叫做它的**反面**. **我们规定**:从一个坐标平面到它正面一点的距离是正的,到反面一点的距离是负的.

现在来看空间中一个点 P 的位置. 点 P 与坐标平面 YZ,ZX,XY 的距离(有正负)依次是三个实数 x,y,z,它们依次对应于三条坐标轴,因而也随着排定了次序. 像这样排定次序的三个数叫做一个有序三元数组,记做 (x,y,z). 给定了 (x,y,z),点 P 的位置就定住了. 因此,(x,y,z) 叫做点 P 对于坐标系 $[O;X,Y,Z]$ 的**坐标**. 显然,一个点的坐标也可以依次看做从原点到它在各坐标轴上的垂足的距离.

点 P 的第三个坐标 z 就是从 P 在 XY 平面上垂足 P' 到 P 的距离. 因 PP' 平行于 Z 轴,故 P 的第二个坐标 y 就是 P' 在 X 轴上的垂足 P_1 到 P' 的距离. 因 P_1 也是 P 在 X 轴上的垂足,故 P 的第一个坐标 x 就是从 O 到 P_1 的距离. 由此可见,P 的坐标可以表成一条折线 $OP_1P'P$,叫做 P 的**坐标折线**. 要确定点 P 的坐标,也就是要从 P 开始画出它的坐标折线来. 要从坐标 (x,y,z) 定出点来,也就是要从原点开始画出坐标折线来. 三个坐标依次表示折线各边的方向和长度.

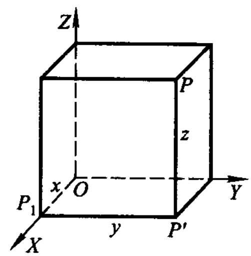

图 1.1

这样,取定了一个坐标系以后,一个点惟一地确定了一个有序三元数组;反过来,一个有序三元数组也惟一地确定一个点. 这就是说,一个坐标系在点与有序三元数组之间建立了一个一一的对应关系. 坐标是 (x,y,z) 的点 P 常简记做 $P(x,y,z)$.

显然,在一个坐标平面上的点有一个坐标是 0,在一根坐标轴上的点有两个坐标是 0,原点的坐标全是 0. 例如,对于 ZX 平面上

的点，第二个坐标是 0；对于第二个坐标轴上的点，第一和第三个坐标都是 0；等等.

从坐标折线用勾股定理可以看出，点 $P(x,y,z)$ 与原点的距离是

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

最后，我们还要说明空间直角坐标系中三个坐标轴的位置关系. 在空间中的所有直角坐标系中，若取定一个，其余的是否都可以经过空间的运动与它重合？总可以经过空间中的运动使它们的 x 轴和 y 轴与取定的坐标系的 x 轴和 y 轴分别重合，这时 z 轴的方向则可能与取定的坐标系的 z 轴相同或相反，这就说明，空间中的所有直角坐标系分为两类，这两类之中的坐标系不能经过空间中的运动重合，这是一个本质的不同，如何刻画这一不同性质？把右手按照 x 轴到 y 轴的转动方向握起来，如果拇指伸开就指向 z 轴的方向，则称之为**右手系**，否则称为**左手系**. 在本书中，凡涉及坐标系，均假定是右手系.

2. 坐标系的平移

坐标总是对于坐标系来讲的. 当坐标系变动的时候，一个定点的坐标一般是要改变的. 现在来看一看：当坐标系 $[O;X,Y,Z]$ 各坐标轴的方向都不变而原点 O 变成 P_0 的时候，一个点 P 的坐标是怎样改变的. 这时，$[O;X,Y,Z]$ 变成了 $[P_0;X',Y',Z']$，这叫做坐标系的**平移**. 因坐标轴的方向不变，故各坐标平面经过一个平行移动. 设 P_0 和 P 对于 $[O;X,Y,Z]$ 的坐标各为 (x_0,y_0,z_0) 和 (x,y,z)，P 对于 $[P_0;X',Y',Z']$ 的坐标为 (x',y',z')，现在的问题是要找出这些坐标之间的联系.

一个点的坐标就是从该点到坐标平面的距离（带正负号）. 从一个点到一个水平的平面的距离就是从平面算起的高度. 显然，当这个平面上下移动一段距离（向上为正、向下为负）时，高度的变化就是减去这段距离. 水位标杆出水的高度的变化就是这种情况.

由此可见，当一个坐标平面平行移动时，对应坐标的变化就是减去了移动的距离.

现在，坐标平面平行移动的距离各为 x_0, y_0, z_0，所以

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0, \\ z' = z - z_0. \end{cases}$$

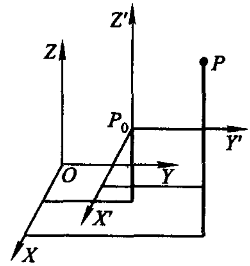

图 1.2

这就是当坐标系平移时点的坐标的**变化规律**，简单地说就是减去新原点的坐标. 由此可见，两个点的坐标差当坐标系平移时保持不变.

现在看 P_0 与 P 两点间的距离 $|P_0P|$. 从坐标系 $[P_0;X',Y',Z']$ 中看，这就是点 P 与原点 P_0 的距离，而 P 在这个坐标中的坐标中 (x',y',z')，所以

$$|P_0P| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

转换到坐标系 $[O;X,Y,Z]$ 中去，就得到

$$|P_0P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

这就是用坐标计算距离的公式.

例 1 在 X 轴上找出一点 P，使它与点 $P_0(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解 要找的点 P 在 X 轴上，设它的坐标是 $(x,0,0)$. 问题就是把 x 求出来. 按给定的条件，$|P_0P| = \sqrt{30}$，即

$$\sqrt{(x-4)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30},$$

$$(x-4)^2 = 25,$$

$$x = 9, -1.$$

所以，要找的点是 $(9,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

例 2 对于固定的坐标系，当线段平行移动时，端点的坐标差保持不变.

证 先让坐标系与线段一块儿平行移动，这时，端点的坐标显然不变，因而端点的坐标差也不变. 然后再把坐标系平移回到原位，这时端点的坐标差仍不变. 总的结果就是，坐标系的位置没有动，只有线段平行移动了，而端点的坐标差不变.

§2 怎样表示方向

1. 方向数

一个点的位置通常是用方向和距离确定的. 要问目标在哪儿，就是要明确它的方向和距离. 从一个点顺着一个方向看出去，所能看到的点形成一条射线. 因此，通常都用射线来表示方向. 当射线平行移动的时候，它的方向保持不变. 用射线表示方向时，射线的起点可以任意取.

在一个坐标系 $[O;X,Y,Z]$ 中，有一个现成的原点 O，因此常用从原点出发的射线表示方向. 于是，原点以外的任意一点 P 都表示一个方向，就是从 O 到 P 的方向. 这时，点 P 的坐标 (x,y,z) 就叫作这个方向的一组**方向数**. 射线 OP 上其他的点也都表示这同一个方向，它们的坐标都是这同一个方向的方向数. 当 P 在射线 OP 上变动的时候，方向数的变化是同时乘上一个正数. 当然，一组方向数不能全是 0. 方向数为 (x,y,z) 的方向，常简称为方向 (x,y,z).

现在来求从一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的方向的方向数. 问题在于 P_1 不必是原点. 经过线段 P_1P_2 的平行移动把 P_1 搬到原点. 这时假设 P_2 被搬到 P_2'，那末 P_2' 的坐标 (x_2',y_2',z_2') 就是所求的一组方向数. 因为线段平行移动时端点坐标的差保持不变，所以

$$x_2' = x_2' - 0 = x_2 - x_1,$$
$$y_2' = y_2' - 0 = y_2 - y_1,$$

$$z_2' = z_2' - 0 = z_2 - z_1.$$

于是，$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$是从点$(x_1, y_1, z_1)$到点$(x_2, y_2, z_2)$的方向的一组方向数.

2. 方向余弦

射线 OP 与坐标轴 OX, OY, OZ 依次形成三个角 α, β, γ. 这三个角确定了从 O 到 P 的方向，叫做这个方向的**方向角**. 由点 $P(x, y, z)$在各坐标轴上的垂足可以看出：

$$x = |OP| \cos \alpha,$$
$$y = |OP| \cos \beta,$$
$$z = |OP| \cos \gamma.$$

这就是方向数与方向角之间的关系.

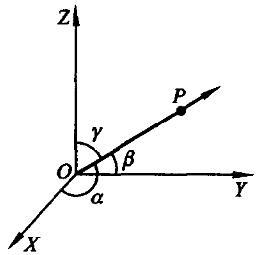

图 1.3

方向角的余弦叫做**方向余弦**. 显然，方向余弦也是一组方向数，这就是$|OP| = 1$时的方向数. 所以，方向余弦就是用与原点距离为 1 的点表示的方向数. 因此，一个方向的方向余弦是惟一确定的，并且方向余弦的平方和总是 1：

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

这是一组方向余弦或方向角所必须满足的条件.

例如：

$$0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

这就是说，$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$表示一个与原点距离为 1 的点，也就是说，它们是某一个方向的方向余弦；易见，这个方向的方向角是

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

又如：

$$\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{6}=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\neq 1,$$

这说明$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$不是任何方向的方向余弦；也就是说，没有一条射线依次与坐标轴的夹角会是$\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{6}$.

与原点距离为 1 的点形成一个球面. 所以方向余弦也可以说是用一个单位球面上的点所表示的方向数. 在天文上就是这样，用一个所谓天球上的点表示星体的方位.

从方向数很容易定出方向余弦来. 例如对于点 $P(x,y,z)$ 所表示的方向，方向数为 (x,y,z)，方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OP|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|OP|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|OP|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

当然，这也就是把方向数的平方和化成 1.

3. 两方向间的角度

设给定两个方向的方向余弦各为 (l_1,m_1,n_1) 与 (l_2,m_2,n_2)，要求出它们之间的角度 θ. 把这两组方向余弦看作与原点距离为 1 的两个点 E_1 与 E_2 的坐标，那末 θ 就是射线 OE_1 与 OE_2 的夹角. 由余弦定律，

$$|E_1E_2|^2=1+1-2\cos\theta.$$

由两点间距离的公式，

$$|E_1E_2|^2=(l_1-l_2)^2+(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2=1+1-2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2).$$

于是

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$