

同调论

(上册——多面体的同调论)

[英] P. J. 希尔顿 S. 瓦理著 江泽涵等译

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书从代数拓扑学的最初步的知識讲起,一直到同調論的許多近代成果,使讀者能进而接触当代文献。原著共分两篇,中譯本分作上下册出版。上册“多面体的同調論”内容是单纯复形的同調群、相对同調群、上同調环、基本群以及它們的性质、計算。材料虽是經典的,处理的方式却是近代的。这一册是同調論的基础部分。著者只假定讀者具有分析拓扑与抽象代数的最基本知識,而且这些基本知識都已提綱挈領地写在“多面体的同調論的背景”里。下册“拓扑空間的同調論”稍为专门一些,讲奇异同調論、阻碍論、譜同調論及群的同調論。每章都附有精选的习题。如果讀者具有同調群的一些初步知識,閱讀本书困难更少,并能更深入。

本书可供綜合性大学数学系师生参考。

HOMOLOGY THEORY

P. J. Hilton, S. Wylie

Cambridge

University Press · 1960

同 調 論(上册——多面体的同調論)

江澤涵 丁石孙 程庆民 姜伯駒 譯 江澤涵 校

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32 印張 10 16/32 排版字数 250,000

1963年9月第1版 1963年9月第1次印刷 印数 1-3,000

統一书号 13119·530 定价(十二) 1.45 元

引 言

我們編写本书的目的，是要提供在目前的状态中的代数拓扑的一个引論。本书并不要求讀者有代数拓扑的任何知識；甚至于替无分析拓扑与抽象代数的知識的讀者着想，我們在多面体的同調論的背景中罗列了本书将引用而不証明的事实。我們考慮：如果要使本书有用处，在本书中必須如此地陈述代数拓扑的基本概念，使得对于所談的技巧与問題还无經驗的数学家也能領会；这种考慮貫串着全书中的处理方式。处理方式是初等的，但是在選擇材料方面，比起初等教科书中通常所作的，我們更怀雄心。我們认为現在已出版的高深的教科书內容是丰富的，同时初等的入門的教科书也有不少合适的，但是这两类的书并未很有成效地銜接起来。再者，高深的教科书又可以粗略分为經典的与現代的两类，而且在代数拓扑发展过程中重点迅速轉变，以致不易认出用現代語言改写后的經典論証。我們相信，學生們要想从可利用的文献中得到这种銜接的环节，可能会遇到困难；我們試圖提供这种环节。

虽然本书开始部分是很初等的，但是，通过刪去一些課題，特别是那些在經典著作中得到标准处理的課題，我們能在最后几章中达到現时研究的最前綫的一些主题。本书分为两篇。第一篇，讲“多面体的同調論”^①，还包含一章讲基本群与复迭空間，一章介紹“同調代数”。除去后一章中的一些材料外，引进的概念都是經典

^① 原书第一篇“多面体的同調論”，中譯本作为上册出版，原书第二篇“拓扑空間的同調論”，作为下册出版。——譯者注

的,虽然我們企图采用現代的表达格式. 除去一个例外(关于拓扑积的同調群的 Künneth 公式的証明), 第一篇是完全自足的. 任意系数同調群与上同調(cohomology)^① 环是对于一对单纯复形定义的, 而且对于有限复形証明了是拓扑不变量——实际上是同倫不变量. 关于 Eilenberg 与 Steenrod 的公理都驗証了; 我們总是揭露所引进的概念与变换的自然性(它的专用意义), 在这意义下我們采用了他們編的教科书中范疇与函子的(Eilenberg-MacLane)理論所表达的观点. 在第一篇中我們并不真正定义范疇与函子的概念(虽然有几次援引他們的书); 但我們重視从函子角度来处理問題的特有概念(例如协变性, 反变性, 典型的同构), 我們希望这样, 使讀者在下一步閱讀代数拓扑文献时将更有准备.

是否由于企图現代化, 特别是, 企图接近 Eilenberg-Steenrod 处理方式, 所以把本书写得非必要地更加难懂了呢? 我們趁此机会郑重申明, 不是的, 我們相反认为, 同調性质的系統陈述使讀者更容易抓住同調論的格局. 这是下面的一般原則的一个特殊情形: 如果数学的任一分支中系統地引进了代数手法, 这分支就得到了提高. 这当然不是說, 代数拓扑的几何內容應該取消; 事实上, 我們煞費苦心地, 在适当的地方, 給出代数概念的几何意义.

第二篇是介紹应用同調論来研究一般拓扑空間. 为着这目的, 特别是为着第 7 章, 讀者需要同倫論的某些事实; 这些事实在下册拓扑空間的同調論的背景中作了說明. 第 7 章应用第一篇中所发展的单纯上同調論来研究从多面体到任意空間的映射, 其目的是作为“阻碍理論”的一个引論. 以后两章专論奇异同調論(第 8 章的一个附录中有 Čech 上同調的簡短描述). 我們詳尽地阐述了奇异理論; 驗証了公理, 而且建立了 (i) 奇异单纯同調与奇异方形同調之間的典型同构, (ii) 多面体的奇异理論与第一篇中的单纯

① 本书中改称“contrahomology”, 理由見后面.

理論之間的典型同构，并且証明了第 5 章中所用的鏈复形确实給出拓扑积的奇异同調群，这样就填补了第一篇中出現的唯一的漏洞。讲奇异上同調环的第 9 章中，有一节讲(从 S^{2n-1} 到 S^n 的映射的) Hopf 不变量，有一个附录终于明确地定义了自然性的概念。自然性在我們論証的許多处是有效的工具，特別是在第 8 与第 9 章中；既然如此，显然必須在某一阶段給出它的定义。这个定义所以延迟到这么晚才給出，是因为我們相信，只有当讀者已經掌握了一些特例之后，才能更容易地領会它的一般意义。

有些人认为，在多面体的范疇內單純同調論与奇异同調論是相重合的，因而不必要陈述單純同調論。他們尖銳地爭論說，同調論中只有奇异理論(适宜于同倫論)与 Čech 理論(适宜于流形与代数几何的研究)这两种具有重要性，而單純理論，在一个意义下，是这两个理論的交叉点。而我們却把本书相当大的部分用来专讲多面体的單純理論；我們的理由是，首先，我們已經明确本书是一个引論，而且我們认为單純理論是同調論的最好引論；从概念方面說，單純理論最容易使讀者領会，因为它有令人满意的几何直观，而且对于有限复形，它所涉及的群都只具有有限个生成元。再者，在发展單純理論的过程中，可以使讀者先对于淺明的場合熟悉各种同調論所共有的基本概念(例如鏈复形与鏈映射)，而且見到适用于更有威力的同調論的技巧的例子(例如 Eilenberg-MacLane 零調模型的技巧是零調承载子这較简单概念的推广)。最后，用單純复形作計算是較容易的；实际上我們在第一篇中就注意到把單純复形作一些改变，使得計算能更容易更快(假剖分与块形剖分)。

末一章論述同調論的两个抽象发展，即譜同調論与群的同調論。近年来这两个課題已发展到十分显要的地位，这两个理論的基本事实的知識似已成为代数拓扑学者的必要武器的一部分。本章也指出了这些理論在拓扑与代数上的一些应用。

每章末都附有一批习题。前几章的只是使讀者有机会练习与获得自信心；后面几章的則比較难，但是更有趣。

我們作了一些符号上的革新，其中有两項至少需要作一些辯护。按照傳統用法，在術語鏈、閉鏈、邊緣、同調之前加上一個字“協(co-)”^①，就是原術語的對偶概念，而在本書中則把“協(co-)”全改為“反(contra-)”。這是採用了 M. M. Постников 与 B. Г. Болтянский 的三個建議的第三個。用“反”比用“協”好，因為“反”類的幾何物按照反變量變換。舉一個例子。如果 C 是一個鏈複形而且 $\text{Hom}(C, G)$ 是相伴的反鏈複形(其值在 G 中)，則一個鏈映射 $\varphi: C \rightarrow D$ 誘導一個反鏈映射 $\varphi^*: \text{Hom}(D, G) \rightarrow \text{Hom}(C, G)$ ；於是 φ^* 作用的方向與 φ 的相反。所以，從這觀點，新的術語是比較更合乎邏輯的。同樣地，把鏈、閉鏈、……，改成協鏈、協閉鏈、……，才合乎邏輯，因為這些幾何物按照協變量變換(對於拓撲空間的映射而言)。這樣的改變是 Постников-Болтянский 建議的第二個，但是對於這一項革新來說，可引用一句成語：時機分明尚未成熟！所以我們所採用的術語不過是習慣用的術語與邏輯的無矛盾性所要求的術語二者之間的一種妥協。如果真的能夠象所建議的那樣來用協同調與反同調這兩個術語，則將能把以協同調與反同調為兩個主要表現的(微分分次群的)理論叫作同調論。雖然我們不願意象 Постников-Болтянский 建議的那樣來用協同調這個術語，但我們有時候(例如本書的名稱以及第 2 章與第 8 章的名稱)在剛才所說的意義下^②用同調論這個術語。

① 在而且只在引言的本段與下一段中，我們都把 co- 与 contra- 分別譯為“協”與“反”，以便說明本書著者改 co- 為 contra- 的正確論點。在其他處，除去 covariant 与 contravariant 仍舊譯為協變與反變等之外，我們把 co- 与 contra- 都譯為“上”；因為譯為“上”雖不見得滿意，但無與英文中意義混淆的缺點。——譯者注

② П-В 的建議的第一個是，替自由鏈複形保留“同調”這個術語；不同於這裡的用法。

我們的第二个重大革新是把空間与“协”类几何物的变换写在右边, 而把“反”类几何物的变换写在左边(更明确地说, 在拓扑空間的一个范畴的、在一个协变(反变)函子下的象范畴中, 映射写在右(左)边). 如果我們必須常常处理混合函子, 这种办法則不方便, 但是本书中并非如此, 书中出現的函子大多数只是协变的或反变的; 在处理混合几何物时 (例如 $\text{Hom}(A, B)$ 作为 A 与 B 的函子), 我們不給出固定的写法. 另一方面, 这办法表现出显著的优点. 例如对于空間, 如果 f 映射 X 到 Y , 而且 g 映射 Y 到 Z , 則映射 f 继以映射 g 就是 fg , 而非 gf . 其次, 回到鏈映射 φ 与它的相伴反鏈映射 φ^* , $(\varphi\psi)^* = \varphi^*\psi^*$ 这式子是方便的. 再者, 对于 Kronecker 积, 有 $(c\varphi, d) = (c, \varphi^*d)$, $c \in C$, $d \in \text{Hom}(D, G)$.

在写出几何物与映射的序列时, 我們让反变函子倒轉箭头的指向. 例如, 我們写

$$C \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{\psi} E$$

誘导出

$$\text{Hom}(C, G) \xleftarrow{\varphi^*} \text{Hom}(D, G) \xleftarrow{\psi^*} \text{Hom}(E, G).$$

从第 3 章以后, 我們依照 E. C. Zeeman 的办法, 用 $C \frown G$ 替代 $\text{Hom}(C, G)$. 我們采用这个符号的理由是, 它更好地揭露出張量积 $\otimes G$ 与 $\frown G$ 之間的对偶关系. 为着使符号尽可能一致化, 我們用 $A * B$ 来表示两个 Abel 群的挠积, 而且, 还是为着強調对偶, 用 $A \dagger B$ 替代 $\text{Ext}(A, B)$.

我們时时注意避免复杂符号的重复使用, 甚至于在邏輯明确性的要求重复使用的情形下, 也试图努力. 例如, 用 α 定向的单纯偶 K , K_0 的以 G 的元素为系数的 p 維鏈群有一个笨拙的符号 $C_p^\alpha(K, K_0; G)$. 我們的一般原則是, 在定义中我們写出完全的符号, 而这同一个概念后来出現时, 則只保留这符号的、从上下文还

未能明显地决定的那些部分，于是前面所提的符号在后来出现时，可能很好地用 C_p 来替代。现在在本引言中我们只说一说这个原则，而在本书的正文中，对于每一个特殊的缩写，我们都要使读者有所准备。

读者将会习惯于符号“=”的文法上的适应性。同样地，“ $f:A \rightarrow B$ ”这符号通常应该读作“ f ，从 A 到 B 的一个变换”，但有时必须有不同的读法，特别是，读作“ f 是从 A 到 B 的一个变换”。符号“ $a \in A$ ”有相似的文法上的不同解释。

我们采用了 Halmos 的记号，但稍作改变，用 **】** 标出一个证明的完毕；J. L. Kelley 著的一般拓扑学一书中用这种记号的好处给我们很深刻的印象。紧跟在一个定理（或命题等）的陈述后而出现记号 **】**，或者表示证明紧靠在陈述前面，或者表示证明留给读者。我们还采用下面两种办法来供阅读时参考：(i) 在一些节或节的一些部分前画一个星号；(ii) 一些材料用小号字排印。如果某一部分带上星号，读者可以断定它的内容是比较细致与深奥的地方，第一次读本书时不妨把它删去。另一方面，用小号字排印，只是表示那材料在课题的逻辑发展中不是主要的；于是说明性的附记与例子就常常用小号字排印。

我们用三个数 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ 作为我们的记数体系，其中 α 指第 α 章^①， β 指此章的第 β 节， γ 指此节的第 γ 项。即使是在第 α 章中，也不把 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ 缩写为 $\beta \cdot \gamma$ ，因而引用 5·7 时所引用的是一节，而非一项。一节中的项，不管它们是定理、命题、引理、推论、定义、例子，或者只是另行写出来的公式，都一律在本节中顺序记数，但有一个主要的例外：如果对于同调有一个陈述 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ，则我们依照 Eilenberg 与 Steenrod 的办法，在这三个数后加上字母 c ，用来表

① 我们用 $\alpha = \text{I}$ 或 $\alpha = \text{II}$ ，分别表示多面体的同调论或拓扑空间的同调论的背景。

示对于上同調的相应陈述。5·3 中出現另一例外,在那里有說明。

我們从許多人处得到种种帮助,对于他們中的大多数我們只能在这里一概地表示感謝。我們数学的朋友通过談話与討論慷慨地幫助了我們,而在正文中只对于我們自觉地采用了的极少数想法申明了它們的来源;必定还有更多的想法我們采用了,但我們在思想上以为是我們自己的。E. C. Zeeman 博士讀了本书的原始資料的稿子,他的富有想象力的与中肯的批評促使我們作了許多修改,修改的方面难以計数;特別有許多很好的例子是他給出的。E. C. Thompson 先生讀了本书的較成熟的样稿,在消灭錯誤及晦涩方面給了我們极大的帮助。我們衷心地表示感謝。

P. J. H.

S. W.

1960 年 2 月

目 录

引言

多面体的同調論的背景	1
I.1 分析拓扑	1
I.2 代数	7
I.3 Zorn 引理	12
1 多面体的拓扑学	14
1.1 直的单形	14
1.2 几何的单純复形	18
1.3 多面体	21
1.4 正則重分	23
1.5 錐形作法	26
1.6 同倫	31
1.7 单純映射	37
1.8 单純逼近定理	41
1.9 抽象的单純复形	45
1.10 无穷复形	49
1.11 假剖分	54
习 題	56
2 单純复形的同調論	59
2.1 单形的定向	59
2.2 鏈, 閉鏈和边緣鏈	62
2.3 同調群	65
2.4 $H_0(K)$ 和連通性	69
2.5 例子和撓群	71
2.6 上同調和 Kronecker 积	74

2.7	上同調的例子	78
2.8	相对的同調和上同調	82
2.9	正合序列	89
2.10	一些复形的同調群	93
2.11	无穷复形中的同調和上同調	97
2.12	抽象的胞腔复形	98
	习 題	104
3	鏈复形	107
3.1	鏈复形和上鏈复形	107
3.2	鏈复形和鏈映射的例子	113
3.3	鏈同倫和上鏈同倫	119
3.4	零調承載子	122
3.5	單純复形中的鏈等价	128
3.6	多面体的連續映射和主要定理	132
3.7	多面体的在一点处的局部同調群	142
3.8	单形块	146
3.9	实射影空間的同調群	153
3.10	关于鏈等价的附录	156
	习 題	159
4	多面体的上同調环	162
4.1	复形的环的定义	162
4.2	相对化, 誘导的同态与拓扑不变性	167
4.3	計算, 例子与应用	172
4.4	卡积	177
	习 題	181
5	Abel 群与同調代數	183
5.1	鏈复形的标准基	183
5.2	帶有一般系数的同調群以及上同調群	194
5.3	自由群与可除群	207
5.4	无穷复形中的同調与上同調	212
5.5	乘积 $\otimes$, $*$, $\cap$, $\dagger$	227
5.6	正合序列	236

[x] 目 录

5.7 鏈复形的張量积	243
5.8 附录 1: Hopf 迹定理的应用	253
5.9 附录 2: 群 $\text{Ext}(A, B)$	255
5.10 附录 3: 透鏡空間	259
习 題	263
6 基本群和复迭空間	266
6.1 基本群的定义	266
6.2 基点的作用	271
6.3 多面体的基本群的計算	275
6.4 进一步的定理和計算	282
6.5 复迭空間	287
6.6 复迭空間的存在与唯一性定理	294
6.7 万有复迭空間	304
6.8 多面体的复迭空間	306
6.9 附录: 拓扑群的基本群和复迭群	309
习 題	313
参考文献	315
中英名詞匯引	317

多面体的同調論的背景

1.1 分析拓扑

拓扑空間是一个集合 X , 其中某些子集被特別选定了, 叫做开集; 开集的集合滿足公理:

- (O 1) 任意多个开集的并集是开集;
- (O 2) 任意有限多个开集的交集是开集;
- (O 3) 全空間及空集都是开集.

給集合 X 指定拓扑就是規定开集. 如果 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 是集合 X 上的两个拓扑, 我們說 $\mathcal{U}$ 比 $\mathcal{V}$ 細致 ($\mathcal{V}$ 比 $\mathcal{U}$ 粗糙), 如果拓扑 $\mathcal{V}$ 的每一个开集都是拓扑 $\mathcal{U}$ 的开集. 我們說 X 的一族开集构成 X 的一个 (开集的) 基, 如果 X 的每个开集都是这基里的集合的一个并集.

拓扑空間 X 的閉子集是开集的余集; 于是可以用規定閉集的办法来指定拓扑, 而閉集必須滿足公理:

- (C 1) 任意有限多个閉集的并集是閉集;
- (C 2) 任意多个閉集的交集是閉集;
- (C 3) 全空間及空集都是閉集.

如果 X_0 是拓扑空間 X 的子集, X_0 中的誘导拓扑是这样規定的: 它的开集是 X 的开集与 X_0 的交. 子集总假定是帶着誘导拓扑的. 很明显, 如果 $X_1 \subseteq X_0 \subseteq X$, 那么 X_0 和 X 在 X_1 中誘导同一个拓扑; X 的开 (閉) 子集的开 (閉) 子集是 X 的开 (閉) 子集.

X_0 的内部是 X_0 所包含的所有 X 的开集的并集.

I.1.1 命题 X_0 的内部是 X_0 所包含的最大开集.

X_0 的闭包是所有包含 X_0 的闭集的交集.

I.1.2 命题 X_0 的闭包是包含 X_0 的最小闭集.

若 $x \in X$, x 在 X 中的邻域是包含 x 在其内部的 X 的子集.

I.1.3 命题 X_0 的闭包是那样的点 $x \in X$ 的集合, x 的每个邻域都与 X_0 相交.

X_0 在 X 中的边界是 X_0 的闭包与它的余集的闭包的交. X_0 在 X 中是稠密的, 如果它的闭包是 X . X 的点的序列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 收敛到 $x \in X$, 如果 x 的每个邻域包含这序列的除有限个外的所有点.

X 的一族子集 $\{X_i\}$ 是 X 的一个复盖, 如果它们的并集是 X . 复盖是开的(闭的), 如果每个 X_i 是开的(闭的). 复盖是有限的(可数的), 如果这复盖里有有限多个(可数多个)集合. 复盖 $\{Y_j\}$ 是复盖 $\{X_i\}$ 的子复盖(加细), 如果每个 Y_j 是(包含于)一个 X_i .

从空间 X 到空间 Y 的映射 $f: X \rightarrow Y$ 是从 X 到 Y 的连续函数^①; f 的连续性用下面的性质来刻画: 若 U 是 Y 的任一开集, 则 $f^{-1}(U)$ —— X 中被 f 映入 U 的点的集合 —— 在 X 中是开的. 等价的说法: f 连续的条件是当 F 闭时 $f^{-1}(F)$ 闭. 若 $X_0 \subseteq X$, 则 $X_0 f$ 是点 xf , $x \in X_0$ 的集合, 叫做 X_0 的 f -象. 若 $Y_0 \subseteq Y$, $f^{-1}(Y_0)$ 叫做 Y_0 的 f -逆象. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 决定函数 $f_0: X_0 \rightarrow Y$, $f': X \rightarrow Xf$, 它们由 $xf_0 = xf$, $x \in X_0$; $xf' = xf$, $x \in X$ 给定. 我们可以把 f_0 写做 $f|X_0$, 并且说 f_0 是 f 在 X_0 上的限制, f 是 f_0 到 X 上的扩张.

I.1.4 命题 函数 f_0, f' 是连续的.

① 函数总理解为单值的.

I.1.5 命题 若 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 是映射, 则 $fg: X \rightarrow Z$ 是映射.

設 $\{A_i\}$ 是 X 的由閉集組成的有限复盖, 又設 $f_i: A_i \rightarrow Y$ 是映射, 滿足 $f_i|A_i \cap A_j = f_j|A_i \cap A_j$. 那么我們可以用 $f|A_i = f_i$ 定义出唯一的函数 $f: X \rightarrow Y$.

I.1.6 命题 函数 $f: X \rightarrow Y$ 是連續的.

(因为若 $F \subseteq Y$ 是閉集, 則 $f^{-1}F = \bigcup f_i^{-1}(F)$; 但 $f_i^{-1}(F)$ 在 A_i 因而也在 X 里是閉的, 所以根据(O1), $f^{-1}(F)$ 在 X 里是閉的, 因此 f 連續.) 对于由开集組成的任意复盖, 有相似的结果.

若 $X_0 \subseteq X$, 設 $i: X_0 \rightarrow X$ 由 $xi = x, x \in X_0$ 給定. 那么 i 显然是連續的, 我們把它叫做包含映射或內射. 如果存在映射 $p: X \rightarrow X_0$ 使 $ip = 1$, 这里 1 是 X_0 的恒同映射, 那么 X_0 是 X 的收縮核而 p 是保核收縮.

映射 $f: X \rightarrow Y$ 是 X 到 Y 上的同胚(簡称同胚), 如果有映射 $g: Y \rightarrow X$ (叫做 f 的逆) 使 $fg = 1: X \rightarrow X$ 且 $gf = 1: Y \rightarrow Y$. 我們写 $f: X \cong Y$, 并且說 X 与 Y 是同胚的, 即有同一拓扑型.

I.1.7 命题 $X \cong Y$ 是一个等价关系.

映射 $f: X \rightarrow Y$ 是 X 到 Y 中的同胚, 如果誘导映射 $f': X \rightarrow Xf$ 是同胚. 显然 $i: X_0 \rightarrow X$ 是 X_0 到 X 中的同胚; 若 $f: X \rightarrow Y$ 是 X 到 Y 中的同胚, 那么把 x 与 xf 等同起来, X 就可嵌入 Y 中. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是局部同胚的, 如果每一点 $x \in X$ 有一邻域 U , 使得 f 把 U 同胚地映成 xf 的一邻域.

設 $f: X \rightarrow Y$ 是从空間 X 到集合 Y 上的函数; 那么 f 所决定的 Y 上的迭合拓扑是这样的拓扑, 其中 $Y_0 \subseteq Y$ 是閉集当且仅当 $f^{-1}(Y_0)$ 是閉的. 如果 Y 給了迭合拓扑, f 叫做迭合映射或投射.

I.1.8 命题 迭合拓扑是 f 的連續性所容許的最細致的拓扑.

(注意,不必說,这命題肯定了迭合拓扑是一个拓扑.)

設 R 是 X 的点之間的一个等价关系 (于是 xRx ; xRx' 蘊涵 $x'Rx$; xRx' 和 $x'Rx''$ 合起来蘊涵 xRx''). 設 Y 是 R -等价类的集合, 設 $k: X \rightarrow Y$ 把每一点变成它的等价类. 如果在 Y 上給了 k 所决定的迭合拓扑, 我們將記 $Y = X/R$, 并說 Y 是 X 的对于关系 R 的商空間 (帶有商拓扑).

給定两个空間 X 和 Y , 它們的拓扑积 $X \times Y$ 是偶 (x, y) , $x \in X, y \in Y$ 的集合, 其拓扑的一个开集的基由形如 $U \times V$ 的集合組成, 这里 U 是 X 的开集, 而 V 是 Y 的开集. 映射 $(x, y) \rightarrow x$, $(x, y) \rightarrow y$ 把 $X \times Y$ 投射成 X, Y . 若 $x_* \in X, y_* \in Y$, 映射 $x \rightarrow (x, y_*)$, $y \rightarrow (x_*, y)$ 把 X, Y 嵌入 $X \times Y$; 我們把这些映射叫做 (說得馬虎一点) 內射.

$X \times Y$ 的子空間 $(X \times y_*) \cup (x_* \times Y)$ 叫做 X 和 Y 的蒂联, 并記作 $X \vee Y$, 如果沒有必要注明点 x_*, y_* 的話. 于是 $X \times y_*, x_* \times Y$ 是 $X \vee Y$ 的子空間^①, 它們的并是 $X \vee Y$ 而交是一个点 (x_*, y_*) . 这样, 用前面定义的內射, 我們可以把 $X \vee Y$ 想象成“ X 与 Y 的有一个公共点的并集”.

拓扑积的概念明显地可以推广到空間的有限集合 (也可推广到无穷集合, 但是我們只关心有限乘积).

集合 X 中的度量是定义在 X 的 (有序的) 点偶上的实值函数 ρ , 滿足

(M 1) 对 $x, y \in X, \rho(x, y) \geq 0$;

(M 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(M 3) $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(M 4) (三角形不等式) 对 $x, y, z \in X, \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

① 它們是閉子空間, 如果点 x_*, y_* 是閉集.

(有度量 ρ 的) 集合 X 里, 以 x 为心的 ε -球体是满足 $\rho(x, y) < \varepsilon$ 的点 y 的集合 $V(x, \varepsilon)$. 集合 X 中的度量拓扑中的开集是形如 $V(x, \varepsilon)$ 的集合的并集.

I.1.9 命题 度量拓扑是一个拓扑.

X 是度量空间, 如果它的拓扑是由一个度量 ρ 决定的. 度量空间 X 的子集 X_0 的直径是 $\text{l. u. b. } \rho(x, y)$.

拓扑空间 X 是可度量化, 如果集合 X 能有一个度量, 使那度量拓扑与原拓扑相同.

I.1.10 命题 从度量空间 X 到度量空间 Y 的函数 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的当且仅当, 对任意 $x \in X$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(x, \varepsilon) = \delta > 0$ 使得 $V(x, \delta)f \subseteq V(xf, \varepsilon)$.

映射 f 是一致连续的, 如果 δ 可以选得与 x 无关.

空间 X 是

Hausdorff 的, 如果 X 的任意两个相异的点具有不相交的邻域;

紧致的, 如果 X 的每个开复盖有有限的子复盖;

列紧的, 如果 X 的点的每个序列有收敛的子序列;

局部紧致的, 如果 X 的每一点有一紧致的邻域;

连通的, 如果 X 不是两个不相交的非空闭集的并;

可离的, 如果 X 具有可数的稠密子集.

I.1.11 命题 度量空间是紧致的, 当且仅当它是列紧的.

I.1.12 命题 紧致的度量空间是可离的.

I.1.13 命题 紧致度量空间到度量空间的 (连续) 映射是一致连续的.

I.1.14 命题 在 Hausdorff 空间中, 收敛序列的极限是唯一的.

I.1.15 命题 Hausdorff 空间的紧致子集是闭的.

I.1.16 命题 如果 X 是局部紧致并且 Hausdorff 的, 那么每