ZHIXIAN
PINGMIAN
DUOMIANJAO

直线·平面·多面角

孟广烈　胡杞

内蒙古人民出版社

初等数学疑难问题讲解

直线·平面·多面角

孟广烈　　胡　杞

内蒙古人民出版社

1983·呼和浩特

初等数学疑难问题讲解

直线·平面·多面角

孟广烈　胡　杞

*

内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　内蒙古新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：6.625　字数：136千
1984年3月第一版　1984年4月第1次印刷
印数：1—38,000册
统一书号：7089·346　每册：0.65元

出 版 说 明

《初等数学疑难问题讲解》丛书，是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为《曲线的切线和切线方程》、《空间直线·平面·多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题思路与解题技巧》、《容易错的概念，容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基础知识和基本训练方面的疑难问题讲解的比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路、抓住了解题的关键，对综合题采用了不同知识的多种解法，同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

因此，这套丛书，可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外辅助读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八三年九月一日

前　　言

立体几何是平面几何向空间的自然引申和发展。然而，学习立体几何却往往比人们预想的要困难些。究其原因，主要是初学者尚未形成空间图形的观念，空间想像力不强，同时缺少比较严谨的逻辑推理的习惯。针对这种情况，我们选择了立体几何起始部分的直线、平面和多面角，作为这本书的编写内容。这些内容既是学习立体几何的难点，也是学好立体几何的关键。

本书的第一部分是阐述了立体几何学的特点，指出学好立体几何的基本途径，使读者能从总体上对这门学科的内容、方法有个大致的了解；第二部分比较深入地分析了立体几何的基本概念——平面，有关平面的公理及其推论是全书推理的基础；第三部分介绍空间作图和直观图的画法，通过画立体几何图形，识别空间图形中各元素间的位置关系，是培养逻辑思维和发展空间想象力的重要途径，这部分内容虽很重要，然而又是一般教科书难于详述的，本书对这些内容做了较多的叙述；第四部分是证明与计算问题，主要概括了直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系的基础知识，通过实例较为详细的分类归纳了在立体几何中证明“平行”、“垂直”和求距离、角及射影量等的主要方法，侧重思路的分析，帮助读者巩固所学的概念；第五部分是多面角（主要是三面角）的基础知识和有关的证明与计算问题，这

些内容对进一步学好多面体有一定意义。

在编写方法上，本书不是按一般教科书上知识的逻辑顺序，而是按知识间的联系分类编写的。为了节省篇幅，凡中学课本里已经有的定理，本书只摘录引用，一般不再证明。有些内容也做了必要的补充和扩展。因此对于初学者，应配合中学课本阅读本书。

书中例题多为基本的和有一定典型性的。每部分配备一定数量的习题供读者练习。习题均有解答或提示。

由于我们的学识水平有限，书中肯定会有缺点、错误，欢迎同志们批评指正。

作　者

一九八三年六月于北京

目 录

一、从平面到空间

人类生活在空间里，从人们居住的房屋到使用的各种工具，无一不是立体的东西，它们都占有一定的空间。按理说，人们空间观念的形成应该是轻而易举的，然而事实并非如此。当我们的视野从平面扩展到空间，也就是从以平面图形为研究对象的平面几何，推广到以空间图形为研究对象的立体几何时，这在数学上尽管是极其自然的发展，而不少人却感到象是在跨越一道鸿沟，相当费劲。这是为什么呢？要说明这个问题，就要具体分析一下从平面几何发展到立体几何后，出现了一些什么新特点。

首先，平面几何里的图形都是真实的形状，它们或与原形全等，或与原形相似。而在立体几何里，为了把空间物体的形象画在平面上，并使图形具有一定的立体感，就不可避免地出现图形的“失真”现象。图 1-1 是个正方体的直观图。请看，有些棱在图中变短了，有些直角画成了锐角或钝角，有些正方形变成了平行四边形……，这就给画图和看图带来了困难。观察图1-2 中的两个图，如果它们是平面图形，则表示一个大三角形被虚线或实线分割成了三个小三角

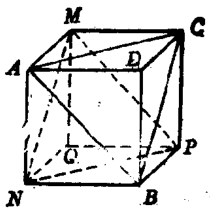


图1-1

形；如果它们是空间图形，则可以分别表示正方体被平面截下的两角，即图 1-1 中的相应的四面体 $MNPQ$ 和四面体 $ABCD$。图中的虚线表示被形体遮住看不见的线，并不是平面几何中的辅助线。就连立体图中的一个点，如果不结合实际情况进行正确的想象，也很难确定它究竟表示空间的一个点，还是表示和我们视线方向一致的一条空间直线（图1-3）。

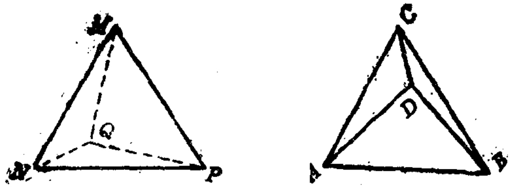


图1-2

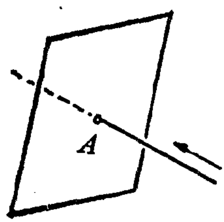


图1-3

既然立体几何中的图形常常不能反映形体的真实结构和全部特点，就是所谓“失真”现象，它就不能象平面几何中的图形那样，对我们解题发挥显著的直观的启发作用。在解决立体几何的问题时，有时要借助于模型，然而又不能处处依靠模型。在更多的情况下，要靠自己在头脑中“想象”。显然，想象空间的东西要比想象平面上的东西复杂的多。

这样看来，无论是画图上的困难，还是认图上的困难，

以及由于缺乏有力的直观启发而给解题带来的困难，都在于空间想象力不强．而人们的空间观念，既不是“与生俱来”，也不会“自然形成”，这正是初学立体几何的人常常感到困难的根本原因．

其次，几何的研究领域由平面发展到空间，既是顺理成章，也是一种飞跃，因而必然会给几何图形的性质上带来某些质的变化．大家知道，在平面几何里两条不重合的直线，它们不是相交就是平行，此外再没有其它位置关系了．而空间两条不重合的直线，却存在既不相交也不平行的情况，这是一种新的位置关系——异面直线，象图1-1中的 AM 与 BN，AD 与 BC 等等，都是异面直线；再如，在平面几何里，过已知直线 l 上（或已知直线外）的一点 P（或P'），只存在唯一的直线和已知直线垂直．而在空间，则存在无数条直线和已知直线垂直，如图1-4中的$h_1, h_2, h_3, \cdots, h_n$（或$h_1', h_2', h_3', \cdots\cdots, h_n'$）．而且，空间两条互相垂直的直线也未必是相交的，尽管这里仍然使用着“垂直”这个词，但它比平

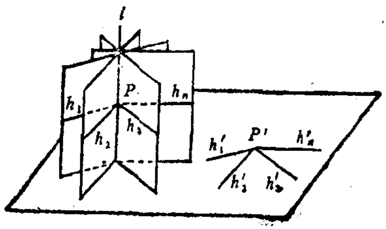


图1-4

面几何里所赋予的涵义更丰富了，象这类例子我们可以举出很多．这些都难免使初学者感到陌生甚至困惑．当然，平面几

何里有一些几何性质在立体几何里也是成立的，这往往又会使人感到熟悉和“显然”．例如“平行于同一条直线的两条直线必平行”这个平面几何里的定理，在立体几何里也是成立的．但是，要让它在立体几何中真正有个立足之地，还必须进行严格的证明*．事实上，许多错误常常发生在未加深思熟虑的“推广”上，例如把“垂直于同一条直线的两条直线必平行”这个平面几何里的定理，随便引申到立体几何，那就大错特错了．请看图 1-1 中的 AN 和 CD，它们都垂直于AD，但它们并不平行．要注意，科学是不能容忍任何无理的强加和各种冒失行为的．

不难看出，无论是初次接触空间图形的新性质而感到的陌生，还是由于习惯性地套用平面几何的旧定理而铸成的错误，都会给初学者的学习增加一定的困难。

此外，初学立体几何的人．还会感到在推理论证上的某种不习惯．例如刚刚开头，就是一连串的反证法，还要证明“存在性”、“唯一性”等等，常常弄得人们不知所云．其实，这并不是立体几何的过失．反证法在任何数学分支都要用到，存在性和唯一性的证明也不是立体几何所特有，只是在初中时对这些内容接触较少或者有意回避罢了．真正的问题还是前面已经指出的，立体几何不能象平面几何那样，可以从图形的直观中获得明显的启发，因而，立体几何必然在

---

* 有些平面几何的定理在推证中并不要求涉及的图形必须在同一平面内，这样的定理可以在立体几何中直接引用。如三角形全等的判定定理，是用叠合法证明的，对于不在同一平面内的两个三角形可以用同法证明，所以它完全适用于空间。

逻辑方法的运用上比平面几何更加困难，甚至有时提出更加严格的要求，这就难免使初学者感到困惑和不习惯了。

通过以上分析，使我们知道，学习立体几何的基本困难在于空间观念的不易形成。因此在开始学习时，要多观察实物和模型，尽量找到每个概念、定理在现实世界中的原型，使理论和实际彼此对照，相互印证，以便在头脑中留下鲜明的形象。如果你能自己动手制作模型，那对深刻理解几何形象的相互位置及其几何结构的特点会有很大的好处。当然，随着学习的进展，要逐步减少对实物和模型的依赖，凭借自己的头脑去对空间几何图形进行正确的想象，并能较准确地画出它们的立体图形来。

一定要重视画图的训练。能否正确的画图是检验一个人空间观念是否形成的一把尺子。但是，由于立体图有“失真”现象，因此在解题时不能仅凭图形给人的直观印象就下结论，必须以理论分析为依据，把想像、画图与逻辑的论证有机地结合起来。这样可以促进创造性的想象力的发展，使人能够构思出各种新的空间形象来。

学习立体几何时，还要注意平面几何与立体几何的区别和联系。不要把自己的思想总是束缚在一个平面上，而要使自己的思想在整个空间飞翔。当你把平面几何的定理引申到空间时，要十分谨慎，切忌无根据地滥用；当然，平面几何与立体几何有着不可分割的联系。平面几何的基础没有打好，是难于学好立体几何的。特别是，许多立体几何的问题常常转化成平面几何的问题加以解决。例如，已知正三角形ABC的边长为a，它所在的平面外有一点P，且P点到A，B，C各点的距离都等于b，求P到平面ABC的距离。我们可以

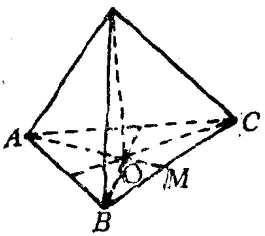


图1-5

这样来分析：如图1-5，要求P到平面ABC的距离PO，首先归结为在平面PAO内求直角三角形PAO的直角边PO的长。而要求PO的长，就需求出AO的长，因而问题又归结为在平面ABC内求$\triangle ABC$的高线（也是中线）AM的长$\left(因 AO=\frac{2}{3}AM\right)$。现已知正三角形$ABC$的边长，显然$AM$的长可求。

从以上分析可以看出，这个立体几何的问题，是通过两次归结为平面几何问题加以解决的，因此，如何把一些立体几何的问题逐步转化为平面几何问题，这也是学习立体几何时应该注意掌握的。

习　题　一

1. 说出下列命题在空间是否成立：

（1）两直线不相交就平行；

（2）如果$a\perp b$，$b\perp c$，则$a\parallel c$；

（3）如果$a\parallel l$，$b\parallel l$，$c\parallel l$，则$a\parallel b\parallel c$；

（4）一直线和两条平行线中的一条相交，必和另一条相交；

（5）过已知直线外的定点向已知直线引和它相交的垂线，这样的垂线有且只有一条；

（6）和已知直线的距离等于定长并且和已知直线平行

的直线，有且只有两条；

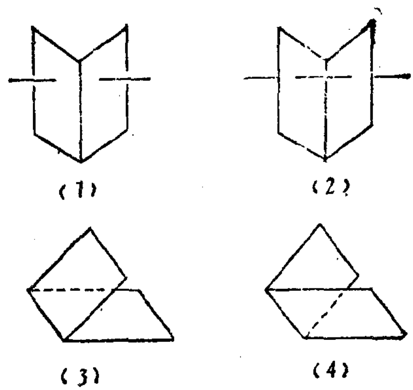
（7）两直线都平行于同一个平面，这两直线平行；

（8）两平面都平行于一直线，这两平面平行；

（9）两平面都垂直于第三平面，这两平面平行；

（10）两平面都平行于第三平面，这两平面平行.

2.观察下面的图形，想象图（1）和图（2）的位置有什么不同。图（3）和图（4）呢？



（第2题）

二、一个新元素——平面

在平面几何里，所有图形都限定在同一平面内，它是以研究图形的性质为中心，而对图形所在的平面几乎不做什么研究。在这种情况下，平面就显得无足轻重了。然而，当人们放眼于空间时，平面就作为一个新元素加入到点和直线的行列，构成了立体几何的基本元素。也就是说，所有的空间图形都看成是点、直线、平面或其部分的组合。由此看来，深入地了解平面就成为很必要的了。

什么是平面？人们可以有种种说法，如说它象平静的水面，平展的玻璃面，等等。这些当然都不是平面的定义，只是对平面的基本特征“平”的描述。如果一定要追问什么叫“平”，人们就很难作答了。事实上，数学总要从某些不加定义的原始概念开始，而不能对每个概念都无休止地追根问底。这里所说的“平面”，就是一个不加定义的原始概念。

平面虽不加定义，但它的基本特征是由一组公理来确定的。在中学课本里，通常提出下面的三条公理：

公理1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

这时我们说直线在平面内或平面过直线。

公理2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。

这条直线叫做这两个平面的交线。如果给出了两个相交

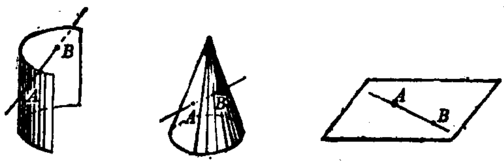
平面，就意味着给出了它们的交线；给出了两个平面的一个公共点，就等于给出过这公共点的一条直线．

公理3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面．

“有且只有一个平面”，也说“确定一个平面”．

这三条公理明确规定了平面的固有属性，使得平面与其它曲面明显地区别开来．

公理1是利用直线来刻划平面的“平”．如果一条直线上的两点在一个曲面内，那么这条直线上所有的点不一定全在这个曲面内（图2-1（1），（2）），而只有平面才能使这条直线上所有的点在此平面内（图2-1（3））．因此公理1可以作为判断平面的方法．



（1）　　（2）　　（3）

图2-1

公理2也是揭示了平面与其它曲面的区别．只有两个面都是平面，它们的相交处才一定是直线，而两个面中只要有一个不是平面．它们的相交处就不一定是直线．如图2-2，平面M与球面有公共点A，其相交处就不是直线而是圆．另外，公理2还说明平面是无界的，它是向四周无限伸展着的．设想平面若是有界的，则两平面就不会相交于过公共点的一条直线，至多只能交于一条线段．根据平面的无界性，