# 边界元素法基础

（日） 神谷紀生 著

东北工学院出版社

# 边界元素法基础

〔日〕神谷紀生　著

杨恩德　苏禾　孙宪治　译



东北工学院出版社

一九八七年·沈阳

## 内 容 简 介

本书是根据原著的最新版本译出的，是一本通俗入门的教科书。全书共分11章，内容包括：数理解析与数值解法；边界元素法解析与有限元素法的比较；基本数学知识；弹性力学的基本知识；二维弹性力学问题；单位集中力作用下的无限平板；边界元素法基本方程的导出；边界积分方程的离散公式化；方法的扩展与一般化；边界元素法的程序；边界元素法的应用。本书适用于理工科大学生、研究生、广大工程技术人员。


边界元素法基础

〔日〕神谷紀生 著

扬恩德 苏 禾 孙宪治 译

东北工学院出版社出版 辽宁省新华书店发行

（沈阳·南湖） 沈阳新华印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：6 1/16 字数：155千字

1987年9月第1版 1987年9月第1次印刷

1～1 500册

责任编辑：刘长仁 封面设计：王红玫

统一书号：13476·9 定价：1.46 元

ISBN 7-81006-045-7

TB·2

# 新书推荐

神谷纪生教授是我的朋友，也是科研上的同事。我有幸为读者介绍他的新著，感到十分光荣。这本书写的是边界元素法基础的重要内容，对于渴望学习及应用此方法的日本工程技术人员来说，最为适用不过。书中首先介绍了差分法、有限元素法和边界元素法三个主要解析方法的特征。其次，重点地阐述了边界元素法应用扩展的方便性。在读者充分理解边界元素法理论之后，作者为了从简单的线弹性问题进一步说明更为复杂的问题，还引用了相应的理论。

我认为本书将大大有助于工程技术人员的边界元素法学习。因此，谨向渴望了解边界元素法主要特征及其优越性的读者推荐此书。

卡洛斯·布雷比尔
(Dr. Carlos Brebbia)

# 序　言

数值解析技术或电子计算机应用技术，对于各个领域的科学技术人员来说，已经成为必不可缺的重要技术。为了定量地弄清自然现象与人为现象，除实验研究外，数值模拟，特别是数字模拟是一种有效手段。上述手段所需的电子计算机，它具有适应这一要求的能力，也可以说已经为我们创造了这一条件。因此，下面所讲的数值解析技术，是以高速、大容量电子计算机的应用为前提的。

目前，在数值解析法中，最通用的有效方法是有限元素法(Finite Element Method FEM)。从结构分析的矩阵法起步的这一方法，在最近数十年间，经过全世界范围的积极研究、开发、应用和试错的结果，不仅是结构分析，而是在极其广泛的领域得到普及。它作为一种有效方法，已经确立了无与伦比的地位。在我国，一提到应用电子计算机的大规模运算，我们说它几乎全部以某种形式与有限元素法的软件有关也不为夸张。有限元素法即使是作为黑箱利用，一般在输入数据的准备上都很费事。研究对象的整个领域的元素划分便很麻烦。此外，还试行了各种办法，但通常是高性能电子计算机的应用已不可避免。因此，一般来说计算费用还很昂贵。

边界元素法 (Boundary Element Method BEM) 是最近迅速成长起来的方法，也是有可能解决有限元素法上述缺点的数值解析法。人们说边界元素法是既古老而又新颖的方法，这意味着形成边界元素法基础的研究方法是早就知道的，而是

在这一基础上，采用了与有限元素法相同的元素划分，它是适于电子计算机处理的新方法，也是对历来的方法有了新的认识的方法。边界元素法只对边界的元素划分进行处理，因此，如果对象为二维领域时，只考虑包围它的曲线；如对象为三维领域，便只考虑包围它的曲面。因而与有限元素法相比，研究的空间维数降低了一维，这便关系到输入数据量大幅度减少的问题。

形成边界元素法基础的研究方法，是从用微分方程表示的边界值问题转变为边界上的积分方程开始的。因而在尚无边界元素法这一通称以前，曾称其为积分方程法（Integral Equation Method），或在处理边界上的积分方程的意义上，称其为边界积分方程（Boundary Integral Equation Method）。这些用Green函数解微分方程的方法，作为一个标准手段，从很早以前便为人们所熟知了，并与名叫势论的方法密切相关。在积分方程法中，也有各种各样的方法，分别有各自的优点与缺点。在本书中称为直接法的方法，是将边界积分方程根据边界条件上出现的函数进行公式化。因而函数所具有的意义是清楚的，同时处理是直线的，很容易理解。为了弹性体的应力解析，1967年，根据上述直接法进行了公式化。以后，在以英国和法国为中心的欧洲各国及美国，曾大力地改进了此方法，并扩大了应用范围。今天，对弹性体既已完成了可与有限元素法相媲美的程序，也在非弹性解析上进行了应用，大致达到了实用化阶段。关于应力解析以外的领域也是同样情况。

边界元素法这一通称强调的是解边界积分方程，对于有限元素法中的有限元素（领域内的元素），是将边界划分为具有有限大小的元素（称其为边界元素）处理。这种命名法与有限元素法相同。

本书是为初学者使用边界元素法进行应力解析的目的编写的。开头是与有限元素法边比较边说明边界元素法作为黑箱的

使用过程和输入数据。最好是读者具有一般的有限元素法知识，但一无所知也无妨。其次，因为应力解析是目的，所以需要弹性力学的初步知识。另外，由于要使用计算机来处理大量的数值数据，故亦需要矩阵计算的知识。因此，本书的前半部分是为了学好这些预备知识编排的。用浅显易懂的方法，求出了为导出边界元素法基本公式需要的单位力解。在上述准备之后，导出了边界元素法的基本公式，为应用电子计算机将基本公式要进行离散化和矩阵表示，并进一步表示出在基本公式中出现的积分计算法与结果。上述处理全部是以二维弹性体作为对象来说明的。通过学习以上内容，便可基本上理解边界元素法解析。在这以后，为了从简单的方法向更为一般化和高精度化深入，在几个方法之中，概略地说明了基本方法。在第10章中，编写了简单的电子计算机程序，并指出其使用法。在第11章中，进一步列举了迄今的边界元素法的应用例。

因本书是入门书，故在文字表达及叙述上力求浅显易懂。因此，讲解不够严密或冗长之处在所难免，预先表示歉意并深望指正。如果读者通过本书已经理解边界元素的梗概，并能进一步学习较深的书，掌握更深的内容时，我深信是能够将其有效地应用于各领域的工作中的。本书如能为此有所补益，则甚感荣幸。

本书在编写期间，曾参考了国内外的各种教科书和论文。已将这些文献汇总于卷末。其中，参考下述两书之处很多：

C.A. 布雷比尔　　边界元素法入门　培风馆

三 好 俊 郎　　有限元素法入门　培风馆

在此深表谢意。另外，本书所列的电子计算机程序是作者研究室的佐胁丰助教协助完成的，谨向他表示感谢。

顺便对早期发现边界元素法价值，并从事有关出版普及工

作以及慨然为作者出版本书的培风馆表示敬意。另向直接负责本书出版的渡边邦彦与儿玉晴男两位先生致谢。

神谷紀生

1982.5

## 中国語版《境界要素法の基礎》の出版によせて

数値解析法が実験および理論的アプローチとならぶ重要な道具とみなされるようになってきた現在，有限要素法、差分法とともに主要な手法として境界要素法（边元法）を理解することは，技術者にとって必要な条件になろうとしている。中国の多くの技術者，大学生がこの方法を学ぶために，私の著書が翻訳・出版され，利用されることは，著者としての責任を感じるとともにたいへん光栄に思います。

学術の交流を通じて中国と日本のより深い友好が促進されることを願っております。杨恩德先生および蘇禾先生、孫憲治先生の翻訳のお仕事に敬意を表します。

1986年5月

著　者

三重大学教授　神谷紀生

# 目　录

# 第 1 章　数理解析与数值解法

## 1.1　前　言

为了定量地解析物体上产生的应力、变形、热传导、流体的流动以及其他各种现象，通常以数理模型来表示。如弹性体那样的固体平衡方程、有关热传导的 Fourier 热传导方程、流体的Laplace方程、 Navier—stokes 方程等即如此，上述方程被称为现象的控制方程，多用偏微分方程表示。这些控制方程虽是从物体内局部条件导出，但因为研究的位置是任意的，所以在物体内的整个领域都成立。为了唯一地确定固体内的应力和流体的变动，只用这一控制方程是不够的。固体既受外力作用，当然要用某些方法支承，此外，如果是液体时，或注入某些容器中，或沿着流道流动，因此，必须规定这些条件，这样的周围条件叫作边界条件。而前者是研究对象内部的关系式，也就是研究领域成立的关系式。这样，就可以根据领域内关系式与边界条件的组合来研究一个问题，对此，通常称为边界值问题。得到的解答叫作边界值问题的解。具体地说，就是确定弹性体的应力和流体的流动。

当然，在一般情况下，现象是与时间同时变化的，这样的问题称为动态问题。为了弄清与时间一起变化的现象，除边界条件外，还需要该现象指定在开始时间的条件，称上述条件为初始条件，将伴有初始条件的问题称为初始值问题。因此，严格地说一般的现象都是初始值及边界值问题。下面虽对初始值问题不做说明，但如能理解边界值问题的解析法，在初始值问题上的应用也不困难。本书主要是研究如何利用计算机的边界值

问题解法。然而，因为不可能涉及到边界值的全部问题，所以只限于弹性体的应力、变形解析的探讨。

## 1.2 数值解析法

边界值问题的解析解，只限于在控制方程极其简单的情况下才能得出，例如在线性微分方程，而且边界形状为特殊的情况。另外，自很早以前就一直在研究的各种数值解法，也不过只能有效地适用于各自的特殊问题。作为具有一般性的数值解法，大家熟知的是有限元素法与差分法（定差法）。为了了解它与边界元素法解法的不同，先概略地复习一下有限元素法与差分法。以图1.1所示的二维领域边界值问题为例。

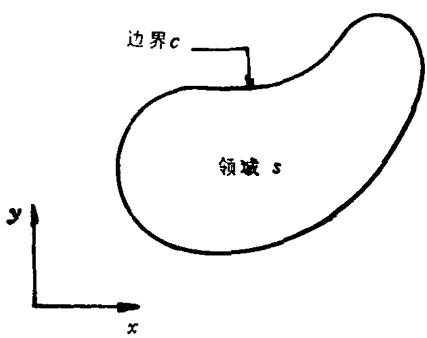


图1.1 二维边界值问题

### 1.2.1 差分法

差分法[27]是历史最久、而且观点比较简单的方法。在差分法中，如图1.2所示，将考虑的领域在$x$，$y$轴方向都由适当间隔的格子分开（图中$d$）。如控制方程中出现的函数$u(x,y)$是连续可微分的，在$u(x,y)$格子点$(i,j)$的微系数可使用周围格子点的函数值，可按下列近似表示：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \fallingdotseq \frac{1}{2d}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}),$$

---

* 文中的[ ]号表示本书的参考文献号，请参看卷末的参考文献一览，下同。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \doteqdot \frac{1}{2d}\ (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \doteqdot \frac{1}{d^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

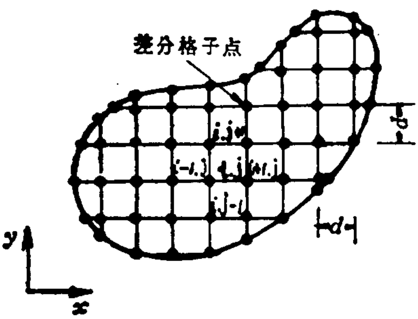


图1.2　差分法

与左边的微系数相对应，称右边的表达式为差分。因此，原来的控制微分方程是用差分近似表示的关系式，即表示为差分方程。差分方程是用研究的格子点 $(i,j)$ 的函数值与周围格子点的函数值来表示的。对于领域内的所有格子点来说都成立。而后再考虑边界上格子点所给与的边界条件，因为在格子点上可得到有关未知函数联立一次方程，所以，就等于解这些方程。可以说差分法是将控制微分方程引入数学上的近似（差分近似）而得到的解方程方法。

在差分法中，在领域内根据位置来改变格子间隔是很费事的，并在接近边界的使用上，有某些不方便之处。例如，图1.3所示，如果是曲线边界，边界未必与格子点一致，因此，便需要接近边界考虑不等间隔的格子，或考虑近似的边界形状。另外，很难用差分表示复杂的边界条件，不容易处理三维问题也是古典差分法的缺点。

### 1.2.2 有限元素法[16~19]

有限元素法，如图1.4所示，将领域 $S$ 分割成有限个的部分领域（图中是用三角形。这个三角形叫作元素、领域元素或有限元素），在代表这些部分领域值的点（节点，多取元素的顶点）中，导出有关未知函数的联立一次方程，并解析这个方程。其根本原理是，与差分法的差分近似完全不同，在弹性体

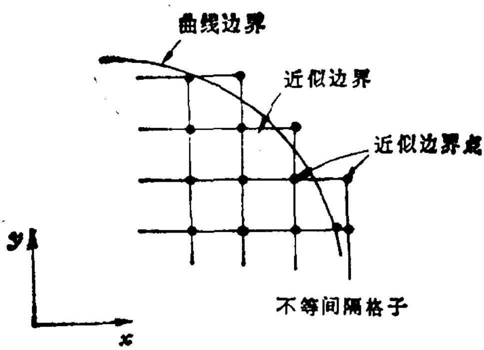


图1.3 曲线边界用差分格子近似表示

是用最小势能原理、虚功原理等，或在更为一般的意义上为变分原理。因为能量积分是在整个领域进行的，所以需要考虑对象物体或问题的整个领域。将领域划分为部分领域，将有关每个部分领域的关系加起来作为整个领域。在每个部分领域函数值的变动，除满足最小限条件外可自由变化。我们知道这一部分领域划分的越小，便越接近原来问题的正确解答。

因为差分法与有限元素法都是以处理整个领域为对象，故有时也称为领域型解法。[1]

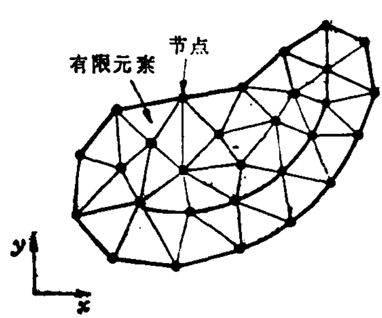


图1.4 有限元素法

### 1.2.3 边界元素法

边界元素法如图1.5所示，将边界划分为具有有限大小的部分边界（称边界元素），与有限元素法同样，在这些代表点中，构成与函数值有关的联立一次方程，边界元素法便是解这个方程的方法。如前所述，在有限