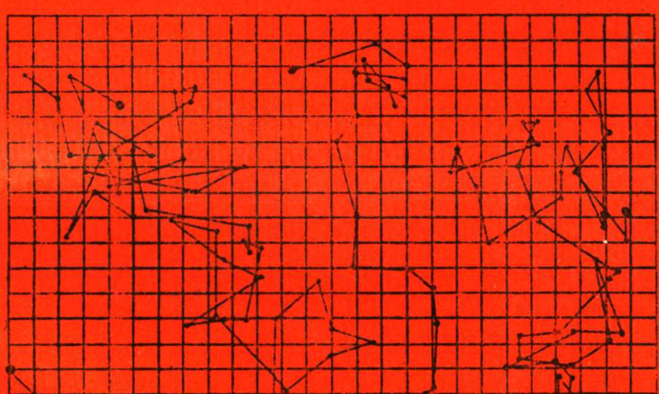
随机分析学基础

黄 志 远



武汉大学出版

随机分析学基础

黄 志 远

武汉大学出版社

1988

随机分析学基础
黄 志 远
*
武汉大学出版社出版
（武昌 珞珈山）
新华书店湖北发行所发行 武汉大学印刷厂印刷
*
850×1168毫米 1/32 12.5印张 307千字
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷
印数：1—1100（内含精装100册）
ISBN 7—307—00369—4/O·33
定价：（平）3.20元
（精）8.00元

内 容 提 要

本书在一般测度论观点下的概率论和随机过程初步知识的基础上，介绍了随机分析学的基础及较新成果。全书分五章，第一章是预备知识，包括随机过程一般理论和鞅论初步；第二章是近代随机积分理论；第三章讨论连续半鞅的随机微分、伊藤公式及其应用；第四章介绍随机微分方程的现代理论；第五章是 Malliavin 随机分析。

本书可作为概率论及有关领域的研究生教材，或有关专业研究工作者和高等院校教师的参考书。

序

这本书是作者在1984年及1987年两次为武汉大学数学系研究生讲课的讲稿基础上形成的。随机分析学是近代概率论中最活跃的分支之一。它的发展十分迅速，内容也极其丰富。为了力图做到在不需要很多准备知识的基础上，以较短的篇幅，介绍这一分支的核心内容和发展主流，作者选择了从伊藤随机分析到Malliavin 随机分析这一历史的和逻辑的发展线索，在作者工作的基础上重新改写了随机积分这一章，并增加了 Malliavin 随机分析的内容。在写作过程中，和 K. Itô（伊藤清）、P. Malliavin、P. A. Meyer、S. Watanabe（渡边信三）以及其他一些国内外概率论学者的讨论曾给作者以很大的启发，并参考了 H. Kunita（国田宽）关于随机流以及 I. Shigekawa(重川一郎)关于 Malliavin 随机分析的讲义。中国科学院应用数学研究所研究员严加安同志仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，作者在此深表谢意。但由于作者水平、所涉及的主题及篇幅所限，本书没有包括像极限理论、边界理论、稳定性理论等重要内容，也不能全面地反映国内同志在这一领域的许多工作，缺点和错误在所难免，衷心希望读者批评指正。

黄 志 远

1988年元月于武汉大学

常 用 记 号

$\triangleq$ 定义为

$\Rightarrow$ 蕴含

$\Longleftrightarrow$ （命题）等价

▌ 证明结束

$f|_A$ （函数）f 在（集合）A 的限制

$\mathbb{1}_A$ （集合）A 的示性函数：$\mathbb{1}_A(x)=1(x\in A)$；$=0(x\overline{\in}A)$

δ_{ij} Kronecker 记号：$\delta_{ij}=1(i=j)$；$=0(i\neq j)$

δ_x 集中于 x 的单点(Dirac)测度

$\operatorname{sgn}(x)$ x 的符号函数：$\operatorname{sgn}(x)=1(x>0)$；$=0(x=0)$；
$=-1(x<0)$

$x\longmapsto f(x)$ 映象 $x\to f(x)$

$\operatorname{Dom}(f)$ （映象）f 的定义域

$\operatorname{Rg}(f)$ （映象）f 的值域

$\binom{n}{k}$ $n!/k!(n-k)!$，n 个元素取 k 个的组合数

$a\wedge b$ $\min(a,b)$

$a\vee b$ $\max(a,b)$

x^+ $x\vee 0$，x 的正部

x^- $-(x\wedge 0)$，x 的负部

$a_n\uparrow a(a_n\downarrow a)$ $\{a_n\}$单调上升(下降)趋于 a

$a_n\uparrow\uparrow a(a_n\downarrow\downarrow a)$ $\{a_n\}$严格单调上升(下降)趋于 a

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ $\inf\limits_n \sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}$，数列$\{a_n\}$的上极限

$\varliminf_{n\to\infty} a_n$ $\sup_n \inf_{k\geq n} \{a_k\}$，数列$\{a_n\}$的下极限

$\mathbf{N}$ 自然数集合

$\mathbf{N}_0$ $\mathbf{N}\cup\{0\}$

$\overline{\mathbf{N}_0}$ $\mathbf{N}_0\cup\{\infty\}$

$\mathbf{Z}$ 整数集合

$\mathbf{Q}$ 有理数集合

$\mathbf{Q}_+$ 非负有理数集合

$\mathbf{R}$ 实数集合

$\mathbf{R}_+$ $[0,\infty)$，非负实数集合

$\overline{\mathbf{R}_+}$ $\mathbf{R}_+\cup\{\infty\}$

$\overline{\mathbf{R}}$ $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$

$\mathbf{R}^d$ d 维实数空间

$|x|$ $\mathbf{R}^d$ 中的范数：$|x|=\left(\sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{1/2}$

(x,y) $\mathbf{R}^d$ 中的内积：$(x,y)=\sum_{k=1}^d x_k y_k$

S^{d-1} $\mathbf{R}^d$ 中单位球面：$S^{d-1}=\{x\in\mathbf{R}^d;\ |x|=1\}$

$\mathbf{R}^m\otimes\mathbf{R}^d$ 实 $m\times d$ 矩阵全体所构成的 md 维欧氏空间

$\boldsymbol{\sigma}^*$ 矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 的转置矩阵

$\mathscr{S}^m$ 实 $m\times m$ 对称非负定矩阵的集合

$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{a}$ 矩阵 $\boldsymbol{a}=(a^{ij})_{1\leq i,j\leq m}$ 的迹：$\sum_{i=1}^m a^{ii}$

$\det\boldsymbol{a}$ 矩阵 $\boldsymbol{a}$ 的行列式

$\|\boldsymbol{\sigma}\|$ 矩阵 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_j^i)_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq d}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数：

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^*)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d(\sigma_j^i)^2$$

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 概率空间

$\overline{\mathscr{F}}^P$ (σ-代数)$\mathscr{F}$ 关于(测度)P 的完备化

$\mathrm{E}[\xi]$ (随机变量)ξ 的数学期望

$\mathrm{Var}(\xi)$ (随机变量)ξ 的方差

$\mathbf{E}[\xi|\mathscr{G}]$ (随机变量)ξ 关于(子 σ-代数)$\mathscr{G}$ 的条件期望

$\sigma(\mathscr{C})$ 由(集合系)$\mathscr{C}$ 产生的 σ-代数

$\sigma(X_\alpha, \alpha\in\Gamma)$ 由(函数系)$\{X_\alpha, \alpha\in\Gamma\}$产生的 σ-代数

$\mathfrak{F}=\{\mathscr{F}_t, t\in\mathbf{R}_+\}$ σ-代数流(§1)

$\mathfrak{F}^{\mathbf{X}}=\{\mathscr{F}_t^{\mathbf{X}}, t\in\mathbf{R}_+\}$ 由(随机过程)X 产生的 σ-代数流

$\overline{\mathfrak{F}}^{\mathbf{X}}=\{\overline{\mathscr{F}}_t^{\mathbf{X}}, t\in\mathbf{R}_+\}$ (随机过程)X 的自然 σ-代数流(定义 1.7)

$\bigvee\limits_\alpha \mathscr{F}_\alpha$ $\sigma(\bigcup\limits_\alpha \mathscr{F}_\alpha)$($\{\mathscr{F}_\alpha\}$为一族 σ-代数)

$\bigwedge\limits_\alpha \mathscr{F}_\alpha$ $\bigcap\limits_\alpha \mathscr{F}_\alpha$ ($\{\mathscr{F}_\alpha\}$为一族 σ-代数)

$\mathscr{F}_{t+}$ $\bigcap\limits_{u>t} \mathscr{F}_u$ ($\{\mathscr{F}_t, t\in\mathbf{R}_+\}$为 σ-代数流)

$\mathscr{F}_{t-}$ $\bigvee\limits_{s<t} \mathscr{F}_s$

$\mathscr{F}_\infty$ $\bigvee\limits_{t\in\mathbf{R}_+} \mathscr{F}_t$

$\mathscr{T}$ 停时全体构成的集合(§2)

$\mathscr{T}_f$ 只取有限多个不同实数值的停时集合

$\mathscr{T}_b$ 有界停时集合

$\tau|_F$ (停时)τ 在(集合)F 上的限制(§2)

$[[\sigma, \tau]]$ 随机区间(§2)

$[[\tau]]$ (随机时刻)τ 的图象(§2)

$\mathscr{F}_\tau$ (停时)τ 前事件 σ-代数(§2)

X^τ (随机过程)X 的停止过程：$X_t^\tau=X_{\tau\wedge t}$

$L^p(1\leqslant p<\infty)$ p 次幂可积随机变量构成的 Banach 空间

$\|\cdot\|_p$ L^p 中的范数：$\|\xi\|_p=(\mathbf{E}[|\xi|^p])^{1/p}$

L^∞ 本性有界随机变量构成的 Banach 空间

$L^{\infty-}$ $\bigcap_{1<p<\infty} L^p$

$\|\cdot\|_\infty$ L^∞ 中的范数：$\|\xi\|_\infty=\inf\{c; P(|\xi|>c)=0\}$

$\mathscr{F}/\mathscr{B}$ 可测　可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到可测空间 $(E, \mathscr{B})$ 的映象 f，若 $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}$

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$　依概率收敛

$\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$　以概率 1 收敛

$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$　在 L^p 中收敛

$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$　测度弱收敛(附录 C)

$a.e.[\mu]$(或 $\mu-a.a.$)　μ-几乎处处(或 μ-几乎所有)

$\mathscr{B}(E)$　(拓扑空间)E 中 Borel 子集 σ-代数

$\mathfrak{P}(\Omega)$　Ω 中一切子集全体

$\hat{\mu}_X$　(随机过程)X 的分布 $P\circ X^{-1}$

$(\mathscr{W}, \mathscr{B}, \mu)$　Wiener 空间

$\pi(\cdot)$　$\mathbf{R}_+ \times \Omega$ 向 Ω 的投影

$\mathscr{R}$　可料矩形构成的半环(§1)

$\mathscr{I}, \mathscr{I}_f, \mathscr{I}_b$　可料随机区间系(§2)

$\mathscr{P}$　可料 σ-代数(§1)

$\mathscr{O}$　可选 σ-代数(§1)

$\mathscr{M}$　循序 σ-代数(§1)

μ_X　(随机过程)X 的 Dol ans 测度(§6)

$\mathfrak{M}^2$　平方可积鞅构成的 Hilbert 空间(§8)

$\mathfrak{M}_0^2(\mathfrak{M}_d^2, \mathfrak{M}_c^2)$　零初值(纯断，连续)平方可积鞅空间(§8)

$\mathfrak{M}_{loc}^p(1 \leqslant p < \infty)$　零初值局部 L^p 鞅空间(§10)

$\mathfrak{M}_{loc}^c$　零初值连续局部鞅空间(§10)

$\mathscr{V}$　零初值适应有限变差过程空间(§11)

$\mathscr{V}_+$　零初值适应增过程空间(§11)

$\mathscr{H}_M^2$　Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R}_+ \times \Omega, \mathscr{P}, \mu_{M^2})$(§9)

$\mathscr{L}^2_{loc}(M)$ （见定义10.5）

$\mathscr{H}^2_{loc}$, $\mathscr{L}^2_{loc}$ （见定义10.11）

$\mathscr{L}^1_{loc}$ （见定义13.10）

$[M]$ （连续局部鞅）M 的平方变差过程(§12)

$[M, N]$ （连续局部鞅）M, N 的交互变差过程(§12)

$C^k(\mathbf{R}^m)$ $\mathbf{R}^m$ 上 k 次连续可微函数的空间

$C^k_b(\mathbf{R}^m)$ $\mathbf{R}^m$ 上具有直到 k 阶有界连续偏导数函数的空间

$C^\infty(\mathbf{R}^m)$ $\bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbf{R}^m)$

$C^\infty_b(\mathbf{R}^m)$ $\bigcap_{k=0}^\infty C^k_b(\mathbf{R}^m)$

$C^\infty_0(\mathbf{R}^m)$ $C^\infty(\mathbf{R}^m)$中具有紧支集函数的空间

$C^\infty_p(\mathbf{R}^m)$ $C^\infty(\mathbf{R}^m)$中具有缓增各阶导数函数的空间

$\mathscr{S}(\mathbf{R}^m)$ $C^\infty(\mathbf{R}^m)$中急减函数空间(§30)

$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^m)$ Schwartz 缓增广义函数空间(§30)

$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$ 广义函数空间(§17)

$\mathbf{D}^s_p(E)$ $(s\in\mathbf{R},\ p\in[1,\infty))$ （Hilbert 空间）E 值 Wiener 泛函的 Sobolev 空间(§28)

$\|\cdot\|^E_{p,s}$ $(s\in\mathbf{R},\ p\in[1,\infty))$ $\mathbf{D}^s_p(E)$中的范数(§28)

$\|\cdot\|_{H.S.}$ Hilbert-Schmidt 范数(§27, §29)

$\mathbf{D}^\infty(E)$, $\mathbf{D}^{-\infty}(E)$ （定义见§28）

$\|\cdot\|_B$ 赋范空间 B 中的范数

$(\cdot,\cdot)_H$ 内积空间 H 中的内积

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ $B^*\times B$ 上的典则双线性型（B 为线性拓扑空间，B^* 为其对偶空间）

$\lesssim$ （范数）不强于

$\sim$ （范数）等价

$\hookrightarrow$ 连续、稠密嵌入

∂_i $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbf{R}^m)$, $i=1,\cdots,m$

$|\alpha|$ $\alpha_1+\cdots+\alpha_m$（$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$为多重指标）

$\alpha!$ $\alpha_1!\cdots\alpha_m!$（$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$）

x^α $x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}$（$x=(x_1, \cdots, x_m)\in\mathbf{R}^m$）

∂_α $\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m}$（$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$）

目 录

引　论

概率论在它的发展早期，和分析是两个迥然不同的领域，一些人甚至认为，概率论是否数学或物理学的一部分还是一个疑问。直到1933年Kolmogorov建立了概率论的公理基础，才使它成为一个严密的数学分支。此后又有些人认为，概率论不过是分析的一部分，它的任何命题都可以翻译成分析的语言，因而不存在什么单独的概率方法，科学历史的发展证明这种观点是完全错误的。本世纪四十年代到五十年代间，这两个领域之间的关系发生了一个戏剧性的变化：如果说以前人们关心的是如何用分析方法来解答概率问题，那么在这以后更感兴趣的是如何用概率方法来解决分析问题。在它们之间迅速地发展着一门新的学科——**随机分析学**。

那么，什么是概率方法？它解决分析问题的奥妙何在？我们最好先考察几个典型的例子。

例1　证明连续函数可以用足够高次的多项式均匀逼近（Weierstrass定理）。

这是一个纯分析的命题。1912年Bernstein[1]基于概率的想法构造了这种多项式：设 $f\in C[0,1]$，$x\in[0,1]$，考虑其成功概率为 x 的 n 次Bernoulli试验，其成功次数 S_n 服从二项分布，由大数定律 S_n/n 依概率收敛于 x，因而 $f(S_n/n)$ 依概率收敛于 $f(x)$。但

$$\mathrm{E}[f(S_n/n)]=\sum_{k=0}^{n}f(k/n)P(S_n=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

为一 n 次多项式，记为 $p_n(x)$。设 M 为 $|f(x)|$ 之上界，对任给 $\varepsilon>0$ 可选 $\delta>0$ 使当 $|y-x|<\delta$ 时有 $|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|p_n(x)-f(x)| = \left|\mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right]\right|$$

$$\leqslant 2MP\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right| \geqslant \delta\right\}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 Chebyshev 不等式

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right| \geqslant \delta\right\} \leqslant \delta^{-2} Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \delta^{-2} n^{-1} x(1-x)$$

$$\leqslant \frac{1}{4n\delta^2},$$

因而可选 n 足够大（不依赖于 x）使 $M/n\delta^2<\varepsilon$，这样就证明了均匀逼近性质。

当然我们可以不用概率语言而用纯分析语言来定义这种多项式，把期望改成求和或积分，用纯分析方法给出证明。但是，这样一来，隐藏在概率语言后面的那种为概率论所特有的思维方式却无法翻译过来，因而使得在概率论看来十分自然的东西却变得莫明其妙。

例2 构造一个处处不可微的连续函数。

在很长一段时间里，分析学家们相信连续函数一般都可微，只可能在某些特殊的与孤立的点有例外。1872年 Weierstrass 构造了一个处处连续但处处不可微的函数：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n),$$

其中 $\lambda_{n+1}/\lambda_n>q>1$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|\lambda_n>0$. 1904 年 Von Koch 给出了这种曲线的几何构造。而对于这类函数性质的研究，至今仍延绵不断。

然而我们知道，早在1827年，英国植物学家 Brown 就在显微镜下观察到了花粉粒子在静水中的奇怪的不规则的运动。1905年，Einstein 对这种现象作了物理解释。1923年，Wiener[1]构造了它的数学模型，这就是我们现在称之为 **Brown 运动**或 **Wiener 过程**的随机过程。

按照 Wiener 的定义，一维 Brown 运动 $W=\{W(t),\ t\geqslant 0\}$ 是具有以下性质的随机过程：

1° $W(0)=0$;

2° $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$, $n\in\mathbf{N}\Rightarrow\{W(t_2)-W(t_1),\ W(t_3)-W(t_2),\ \cdots\cdots,\ W(t_n)-W(t_{n-1})\}$ 为相互独立随机变量族;

3° $0\leqslant s<t\Rightarrow W(t)-W(s)$ 服从正态 $N(0,\sigma^2(t-s))$ 分布，其中 $\sigma>0$ 为一常数。

当 $\sigma^2=1$ 时，称为标准 Brown 运动（或简称为 Brown 运动）。取值于 $\mathbf{R}^d$ 的 d 维随机过程 $W(t)=(W^1(t),\ W^2(t),\ \cdots,\ W^d(t))$，若 $\{W^j(t),\ t\geqslant 0\}_{j=1,2,\cdots,d}$ 为 d 个相互独立的一维 Brown 运动，称为 d 维 Brown 运动。

在今天，Brown 运动已不仅是花粉粒子运动的模型，它描述了像热电子运动、通讯噪声、许多动态系统的随机干扰等等物理现象，它的轨道的分析性质也是许多分析学家注意的对象。

例如考察一维 Brown 运动，由性质 3° 可知

$$\mathbf{E}[|W(t)-W(s)|^4]=3|t-s|^2,$$

根据著名的 Kolmogorov 定理，存在等价的随机过程，其一切轨道为连续函数。今后，我们所说的 Brown 运动均指这样的连

续过程。现在我们要证明 Brown 运动几乎所有轨道是处处不可微的连续函数。

为叙述简单起见，只考虑[0, 1]区间。若轨道 $W(\cdot, \omega)$在某点 $t\in[0, 1)$ 可微，必然在 t 点存在有限的右导数，因而存在足够大的正整数 m 及 k，使 $|W(t+h, \omega)-W(t, \omega)|\leqslant mh$ 对一切 $h\in\left[0, \frac{1}{k}\right)$成立。令

$$A(m, k)\triangleq\{\omega;\ \exists t\in[0, 1),\ \forall h\in\left[0, \frac{1}{k}\right)$$

$$|W(t+h, \omega)-W(t, \omega)|\leqslant mh\},$$

于是"至少在某点 $t\in[0, 1)$ 可微"的轨道集合含于集合 $\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A(m, k)$ 之中。此集合未必可测，为证几乎所有轨道的处处不可微性，只要证明对一切正整数 m 及 k，存在一个包含 $A(m, k)$ 的零概率集合 $B(m, k)$。

设 $n\geqslant 4k$，将 [0,1) 区间 n 等分。若 $\omega\in A(m, k)$，则必有 $t\in\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$对某个 $i(i=1, 2, \cdots, n)$成立，且对 $j=0, 1, 2$ 均有

$$\begin{aligned}&\left|W\left(\frac{i+j+1}{n}, \omega\right)-W\left(\frac{i+j}{n}, \omega\right)\right|\\ \leqslant&\left|W\left(\frac{i+j+1}{n}, \omega\right)-W(t, \omega)\right|\\ &+\left|W\left(\frac{i+j}{n}, \omega\right)-W(t, \omega)\right|\\ \leqslant&\left(\frac{j+2}{n}\right)m+\left(\frac{j+1}{n}\right)m=\left(\frac{2j+3}{n}\right)m.\end{aligned}$$

因为当 $n\geqslant 4k$ 时，上述区间最大者$\left[t, \frac{i+3}{n}\right)$，其长度不超过