高等学校数学系列教材

GAO DENG SHU XUE　gao deng shu xue

高等数学

● 下册

侯振挺主编

湖南科学技术出版社

高等学校数学系列教材

高等数学

下册

侯振挺主编

湖南科学技术出版社

高等数学（下）

主　　编：侯振挺
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路3号
印　　刷：长沙市富洲印刷厂
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙河西黄泥河
邮　　编：410013
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1996年4月第1版第1次
开　　本：787×1092毫米　1/32
印　　张：11.5
字　　数：260000
印　　数：1—4,300
征订期号：地科191—15
ISBN 7—5357—1878—7/O·145
定　　价：11.50元

目录
CONTENTS

第九章　多元函数微分学

上册中我们讨论的函数都是只有一个自变量的函数，这种函数称为一元函数. 然而，客观事物的变化往往涉及到多方面的因素，这就需要研究依赖两个或更多个自变量的函数，这种函数称为多元函数. 从一元函数转向二元函数将会产生一些新概念、新理论、新方法，而从二元函数到更多元的函数则基本上可以类推. 本章将以二元函数为主讨论多元函数的微分法及其应用.

§9-1　多元函数的概念

一　区域

研究一元函数离不开邻域和区间的概念，研究二元函数则需要平面上邻域和区域的概念.

平面上以点 $P(x_o, y_o)$ 为中心，以 $\delta>0$ 为半径的圆内所有点 $Q(x, y)$ 的全体称为点 P 的 δ **邻域**（见图 9.1.1），记为 $U(P, \delta)$，即

$$
\begin{aligned}
U(P,\delta) &= \{Q \mid |PQ| < \delta\} \\
&= \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}.
\end{aligned}
$$

在不需要指出邻域半径的情况下，P 的邻域简单地记为 $U(P)$. P 的不包含 P 在内的邻域称为 P 的**去心邻域**.

平面点集 D 称为一个**开区域**，如果它满足下面两个条件：

(1) D 是**开集**，即 D 中每个点都至少有一个完全包含在 D 内的邻域；

(2) D 是**连通**的，即 D 中任何两点都可以用一条完全属于 D 的折线连结起来.

简言之，开区域即连通开集.

设 D 是平面上的一个开区域，点 $P\in D$，如果 P 的任意一个邻域内既有属于 D 的点，又有不属于 D 的点，则称 P 是 D 的**边界点**，D 的所有边界点组成 D 的**边界**（见图 9.1.1）.

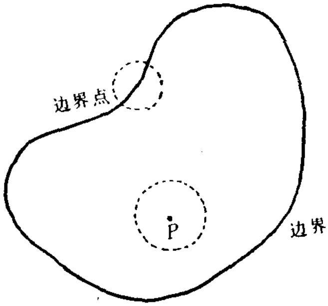
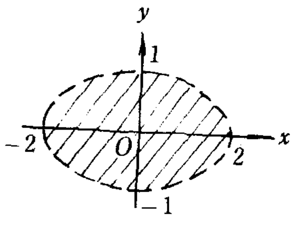


图 9.1.1

开区域与它的边界一起构成**闭区域**，开区域连同它的部分边界构成**区域**. 开区域和闭区域是区域的特例，但通常所说的区域多指开区域. 如果区域 D 可以完全被包含在原点的一个邻域内，则称 D 是**有界**的，否则是**无界**的.

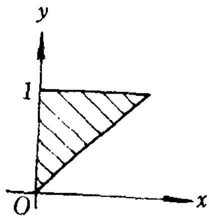
平面区域通常由平面曲线和孤立点所围成，图 9.1.2 给出了区域的几个例子.

$$0<\frac{x^2}{4}+y^2<1$$



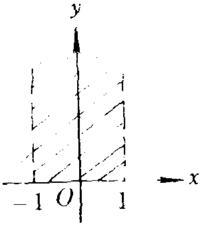
有界开区域

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

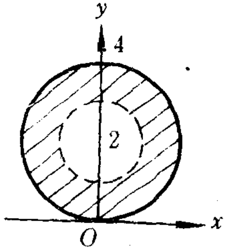


有界闭区域

$$\begin{cases} -1<x<1 \\ y>0 \end{cases} \qquad\qquad 1<x^2+(y-2)^2\leqslant 4$$



无界开区域



有界区域

图 9.1.2

直线上所有的点 P（即全体实数 x）称为一维空间，记为 R；平面上所有的点 P（即所有实数对 (x, y)）称为二维空间，记为 R^2. 一般地，称 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体为 **n 维空间**，记为 R^n，每个 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 **n 维空间的点**. 推广一维、二维、三维空间中两点间的距离公式，规定 n 维空间 R^n 中两点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的距离为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2},$$

则就平面点集所表述的邻域、开集、区域、边界等概念都可以照搬到 n 维空间，这里不一一细述，留给读者作为练习.

二　多元函数的定义

实际问题中经常会遇到多个变量之间的依赖关系. 例如，圆柱体体积 V 的值由其底半径 r 和高度 h 决定：$V=\pi r^2 h$. 当 r、h 在它们的取值范围内取定一对实数值 (r, h) 时，V 就有一个确定的实数与之对应. 以此为背景给出二元函数的定义如下：

定义 9.1.1　设 D 是 R^2 的非空子集，如果对于 D 中任一点 $P(x, y)$，按对应法则 f 有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f

是 D 上 x、y 的二元函数，习惯上也称 z 是 x，y 的二元函数，记作

$$z=f(x, y), \text{ 或 } z=f(P).$$

点集 D 称为该二元函数的**定义域**，x，y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，数集

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该二元函数的**值域**.

三元函数 $u=f(x, y, z)$ 以及三元以上的函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以类似定义.

与一元函数相似，在一般地讨论多元函数时约定其定义域是使函数表达式有意义的所有点 P 所组成的集合. 二元函数的定义域通常是一个平面区域或若干平面区域的并.

例 1 函数 $f(x, y)=\arcsin(x-y)$ 的定义域为

$$D_f=\{(x, y) \mid -1\leqslant x-y\leqslant 1\},$$

而函数$g(x, y)=\dfrac{\ln xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域为

$$D_g=\{(x, y) \mid xy>0 \text{ 且 } x^2+y^2<1\}.$$

如图 9.1.3 所示，D_f 是无界闭区域，D_g是两个有界开区域的并.

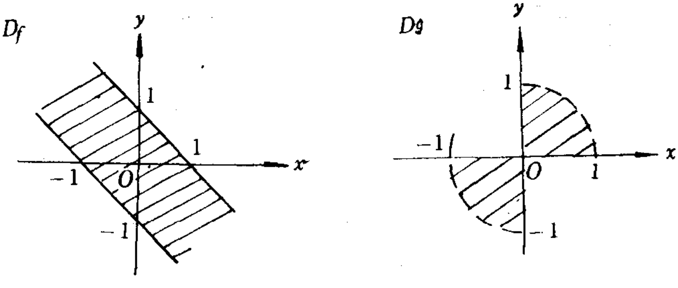


图 9.1.3

下面介绍二元函数的几何意义.

设函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 D, $\forall P(x, y)\in D$, 对应的函数值为 $z=f(x, y)$, 这样的一组 x, y, z 确定空间一点 $M(x, y, z)$. 当 $P(x, y)$ 在 D 上变动时, 点 $M(x, y, z)$ 在空间的轨迹就是二元函数 $z=f(x, y)$ 的**图形**. 二元函数的图形一般是三维空间 R^3 中的一张曲面.

例 2 作下列函数的图形

(1) $z=1-x-y$; (2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; (3) $z=y^2-x^2$.

解 根据空间解析几何知识,这三个函数的图形分别是平面、上半球面和双曲抛物面.

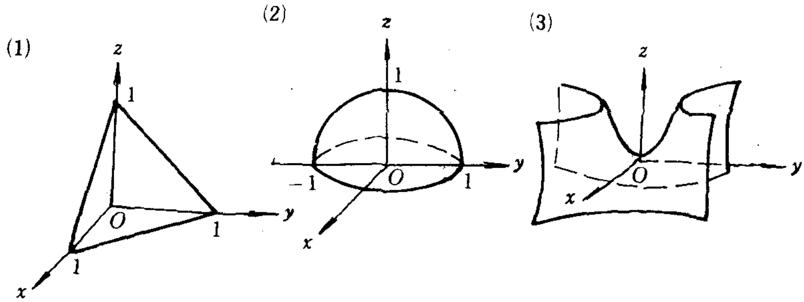


图 9.1.4

三 多元函数的极限

先介绍聚点的概念. 设 D 是一个平面点集, P 是平面上的一个点(点 P 可以属于 D, 也可以不属于 D). 如果 P 的任何一个邻域 $U(P)$ 内总有无限多个属于 D 的点, 则称 P 是 D 的**聚点**. 例如, 设 $D=\{(x, y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则原点 $(0, 0)$ 以及圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每个点都是 D 的聚点, 圆周上的点属于 D, 而原点不属于 D. 极限问题只能在聚点处讨论.

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是函数 $z=f(x, y)$ 的定义域 D 的聚点, 考

虑当点 $P(x, y)$ 以任何方式趋于点 $P_o(x_o, y_o)$，但始终未达到 P_o 时函数 $z=f(x, y)$ 的变化趋势. 如果当点 $P(x, y)$ 无限接近点 $P_o(x_o, y_o)$ 时，函数值 $z=f(x, y)$ 无限接近某一确定常数 A，则称 A 是函数 $z=f(x, y)$ 在 $P_o(x_o, y_o)$ 处的极限，用“ε—δ”语言描述就是

定义 9.1.2 设 $P_o(x_o, y_o)$ 是函数 $z=f(x, y)$ 的定义域 D 的聚点，$P(x, y)\in D$. 若$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|PP_o|=\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $z=f(x, y)$，当 $P(x, y)$ 趋向 $P_o(x_o, y_o)$ 时的**二重极限**，简称**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} f(x,y)=A \text{ 或} \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

例 3 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|$，故$\forall\ \varepsilon>0$，可取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon,$$

所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

必须注意：在直线上，$x\to x_0$ 的方式至多再区分为 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$；但在平面上，$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 的方式却是无限的，这是二元函数与一元函数的不同之处. 我们不能根据某几种，甚至无限多种特定方式（但非一切方式）下 $P\to P_0$ 有 $f(x,y)\to A$ 就断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$. 但是，如果 $P(x,y)$ 以两种不同方式趋

于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 分别趋于不同的值，则可断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在.

例 4 考虑函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}((x,y)\neq(0,0))$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限.

解 显然 $f(x,0)=0, f(0,y)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$，$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0$，即当 $P(x,y)$ 沿 x 轴或 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)\to 0$. 但当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx(k\neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}(\neq 0),$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

四 多元函数的连续性

定义 9.1.3 设函数 $f(P)$ 的定义域为 D，P_0 是 D 的聚点且 $P_0\in D$. 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在点 P_0 处**连续**. 若 P_0 是 D 的聚点，但 $f(P)$ 在点 P_0 处不连续，则称 P_0 为 $f(P)$ 的**间断点**. 若函数 $f(P)$ 在区域 D 内每一点连续，则称 $f(P)$ 在 D 上连续，此时也称 $f(P)$ 是 D 上的**连续函数**.

可以证明，多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商也是连续函数；连续函数的复合函数也是连续函数. 由此可知，多元初等函数（即由常量和自变量的基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成的函数）在其定义区域内是连续的.

根据多元初等函数的连续性，求初等函数在其定义区域内任意点处的极限，只要将自变量代入函数表达式直接计算函数值即可.

例 5 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\dfrac{\sqrt{1+1}-1}{1}=\sqrt{2}-1$;

而 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，有界闭区域上的多元连续函数 $f\ (P)$ 有如下性质：

性质 1（最大值最小值定理） 设 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\exists\ P_1$、$P_2\in D$ 使得 $f(P_1)$ 和 $f(P_2)$ 分别为 $f(P)$ 在 D 上的最大值和最小值，即 $\forall\ P\in D$ 有

$$f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1).$$

由此立知，有界闭区域上的连续函数必定有界.

性质 2（介值定理） 设函数 $f(P)$ 在有界闭区域上连续，M、m 分别为 $f(P)$ 在区域 D 上的最大值和最小值，则 $\forall\ \mu: m\leqslant\mu\leqslant M$，$\exists\ Q\in D$，使得 $f(Q)=\mu$.

由此立知，若 $M>0$，$m<0$，则 $\exists\ Q\in D$ 使 $f\ (Q)\ =0$.

* **性质 3**（一致连续性定理） 设函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(P)$ 在 D 上一致连续，即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ P_1$、$P_2\in D$，只要 $|P_1P_2|<\delta$，恒有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$.

§9-2 偏导数和全微分

一 偏导数

研究一元函数的变化率引出了导数的概念，研究多元函数的变化率则引出偏导数和方向导数的概念. 多元函数的变化情况远比一元函数复杂，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿不同方向有不同的变化率，因此研究多元函数的变化率首先要指定方向. 本节我们考虑函数沿坐标轴方向的变化率，这就是偏导数.

定义 9.2.1 设函数 $f\ (x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的某个领域中有定义，令 y 固定在 y_0，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{9.2.1}$$

存在，则称它为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的**偏导数**，记为 $f_x(x_0,y_0)$，或 $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$，或 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或 $z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 等.

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \text{（若极限存在）}, \tag{9.2.2}$$

相应地记为 $f_y(x_0,y_0)$，或 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$ 等形式.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 的每一点 (x,y) 上偏导数都存在，则这些偏导数在 D 上也是 x、y 的函数，分别记为 $f_x(x,y)f_y(x,y)$ 或 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 等形式. 偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 是偏导（函）数 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的值.

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 实际上就是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 的导数，其几何意义即平面 $y=y_0$ 上曲线

$$z=f(x,y_0)$$

对应 $x=x_0$ 的点 $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线的斜率（图 9.2.1）.

同样，$f_y(x_0,y_0)$ 是平面 $x=x_0$ 上曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 M 处切线的斜率.

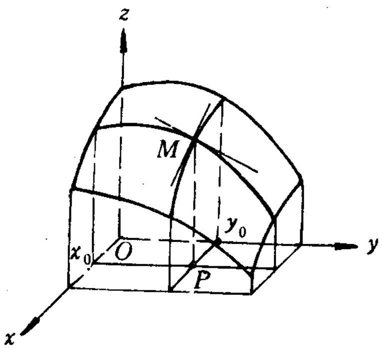


图 9.2.1

偏导数实际上是一元函数的导数，因此利用一元函数的求导公式和法则就能求得多元函数的偏导数.

例 1 求 $z=x^2-xy+y^3$ 在点（2，1）处的偏导数.

解 把 y 看作常量，对 x 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y;$$

把 x 看作常量，对 y 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+3y^2.$$

将 $x=2$，$y=1$ 代入上述结果，得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2\cdot 2-1=3;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=-2+3\cdot 1=1.$$

例 2 求 $z=f(x,y)=x^y(x>0)$ 的偏导数.

解 $f_x(x,y)=yx^{y-1}, f_y(x,y)=x^y\ln x.$

例 3 已知理想气体的气态方程 $PV=RT$（R 为常数），求证

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证 由 $P=\dfrac{RT}{V}$，得 $\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$；

由 $V=\dfrac{RT}{P}$，得 $\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{P}$；

由 $T=\dfrac{PV}{R}$，得 $\dfrac{\partial T}{\partial P}=\dfrac{V}{R}$，

所以 $$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

注 对一元函数，导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 可以看成微分 dy 与 dx 的商，因此有 $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=1$（分子、分母相消）. 对多元函数，偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等是一个整体记号，分子 ∂z、分母 ∂x、∂y 等均无独立意义，在运算中绝不能相消. 本例中，不能消去 ∂P、∂V、∂T 而得到 1.

二元函数偏导数的概念容易推广到三元和更多元函数. 例如，

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，固定 y、z 而对 x 求导即得 u 关于 x 的偏导数 $f_x(x,y,z)$.

例 4 求 $u=\ln(x^3+y^2+z)$ 的偏导数.

解 $u_x=\dfrac{3x^2}{x^3+y^2+z}$, $u_y=\dfrac{2y}{x^3+y^2+z}$,

$u_z=\dfrac{1}{x^3+y^2+z}$.

二 全微分

一元函数 $y=f(x)$ 的微分 dy 是函数的增量 Δy 关于自变量的增量 Δx 的线性主部. 根据同样的想法，引进二元函数全微分的概念.

定义 9.2.2 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域中有定义. 如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全增量**.

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right), \tag{9.2.3}$$

其中 A、B 只与 (x_0,y_0) 有关，而与 Δx、Δy 无关，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**可微**，而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全微分**，记作 dz 或 df，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y. \tag{9.2.4}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 的每个点处都可微，则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上可微.

下面两个定理阐明了函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 dz 与偏导数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 之间的关系.

定理 9.2.1（可微必要条件） 若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都存在，且

$$dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y. \tag{9.2.5}$$

证 在 (9.2.3) 式中取 $\Delta y=0$，得