2001年

人大版考研丛书

考研辅导教材

硕士研究生入学考试
单元测试1000题
数学 理工分册

编写　考研命题研究组

主编　北京大学　马小土

中国人民大学出版社

考 研 辅 导 教 材

硕士研究生入学考试
单元测试1000题

数学理工分册

编 写 考研命题研究组
主 编 北京大学 马小土

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试单元测试1000题.数学理工分册/马小土主编.
北京:中国人民大学出版社,2000
考研辅导教材

ISBN 7-300-03491-8/G·679

Ⅰ.硕… Ⅱ.马… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.643-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21973号

考研辅导教材

硕士研究生入学考试单元测试1000题

数学理工分册

编 写 考研命题研究组

主 编 北京大学 马小土

出版发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路157号 邮编100080)
发行部:62514146 门市部:62511369
总编室:62511242 出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn

经 销:新华书店

印 刷:中国煤田地质总局制图印刷中心

开本:787×1092毫米 1/16 印张:26

2000年4月第1版 2000年4月第1次印刷

字数:834 000

定价:29.00元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　言

本丛书自 1999 年在科技文献出版社出版以来，得到广大考生及专家的一致好评，以其卓越的品质跃居全国同类书销售量的榜首。今年中国人民大学出版社将此丛书列入出版计划。

您的早期复习参考是 4 月份推出的《应试教程》；本丛书的《单元测试》是您中期复习时，检查复习质量、培养应试素质、加强重点记忆、发现薄弱环节的最佳参考资料；后期的《最后冲刺》丛书，以模拟题的形式，使您在考研的题海中游刃有余，从容应试！

本丛书在提供单元测试的同时，对政治和数学总结出了知识网络图，使考生从支离破碎的详细考点中解脱出来，在大脑中勾画出本科目的总体知识构架，并从各知识点之间的联系和对比之中加强对概念的认识，从而使复习综合化、整体化，对问题能够从总体上全面把握，为培养您的“应试思维”、“应试能力”打下基础。另外，在知识网络图中列出新大纲对各知识点的要求，我们用 A，B 分别表示对有关概念、理论方面内容的较低和较高两种层次的要求（大纲中用“了解”和“理解”表达）；用 C，D 分别表示对有关方法、运算方面内容的较低和较高两种层次的要求（大纲中用“会或了解”和“掌握”表达），这样标记便于考生明确重点，合理安排时间。同时，英语科目紧紧衔接应试教程，通览知识点，把握要点，突出重点，使考试大纲在本丛书中以点、线、面的形式充分结合，科学体现，为您的考研打下坚实的基础。

本《数学理工分册》中每个单元有 3 套或 4 套测试题。对数学一考生，做本书全部内容；对数学二考生，做本书的第一、二、六、七、八、九单元。关于数学一和数学二适用的专业及考试内容、考试要求见《2001 年考研应试教程》（数学分册）[理工类]。复习本书时，最好先做题，后对答案，按考研要求在规定的时间（3 个小时）内完成，这样才能真正测试出自己的水平。在每套题的答案中，对于中上难度题，一般题前有解题分析，题后有考点。解题分析除了给出解题所用方法之外，更重要的是介绍了解题思路。希望以此增强考生对问题的应变能力；题后的考点旨在帮助考生在做完一道题后作总结。在某些章节，还就整套模拟试题作了小结，总结解决一类问题的各种题型和解题方法，和知识网络图首尾呼应。

在编写本丛书过程中，我们力求切合考生的各个复习阶段，结合当前命题趋势，尽可能地容纳最新信息，使考生的复习形成一个科学有效的体系。如果您在参阅本书后，觉得有所收获，将是我们最大的欣慰！如果您不吝批评与指正，我们将不胜感激！

编　者
2000.4

目　　录

第一单元　极限和一元函数微分学

第二单元　一元函数积分学

第三单元　A 向量代数与空间解析几何
B 多元微分学

第四单元　多元积分学

第五单元 级 数

第六单元 微分方程

第七单元 行列式

第八单元 线性方程组

第九单元 矩阵代数

第十单元 矩阵的特征值和特征向量

第十一单元 二次型

第十二单元 随机事件和概率

第十三单元 随机变量及其概率分布

第十四单元 二维随机变量

第十五单元　大数定律和中心极限定理

第十六单元　数理统计

第十七单元　模拟测试题

第一单元　极限和一元函数微分学

知识网络图

- **连续**
  - 连续函数性质
    - 有界(有界闭区间)　(A)
    - 最大值,最小值定理(有界闭区间)　(A)
    - 中间值定理　(A)
  - 间断点分类(左右极限)
    - 可去间断点　(B)
    - 第一类间断点　(B)
    - 第二类间断点　(B)
- **极限及求极限的常用方法**
  - "序列极限"$\varepsilon-N$语言
    - 极限存在准则
      - 单调有界　(D)
      - 夹逼定理　(D)
    - 积分和表示求极限　(D)
    - 导数定义求极限　(D)
  - (B)　$\Updownarrow$　(B)
  - "函数极限"$\varepsilon-\delta$语言
    - 两个重要极限　(D)
    - 洛必达法则　$\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$型(求导)　(D)
    - 等阶无穷小替换(Taylor展开)　(D)
- (B)
- **导数**
  - 几何意义:切平面和法线方程,切线和法线方程　(B)
  - 求导法则
    - 四则运算法则　(D)
    - 反函数求导　(D)
    - 隐函数求导　(D)
    - 复合函数求导(链锁法则)　(D)
    - 参数方程求导　(D)
  - 高阶导数 ——— 莱布尼兹公式　(A)
  - 导数和函数性质
    - 几何性质
      - 单调性　$f'(x)\neq 0$　(C)
      - 驻点　$f'(x)=0$　(C)
      - 极值　(B)　(D)
      - 渐近线　$y=kx+b$　$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$　(C)
      - 曲率　(C)
    - 罗尔定理　(B)
    - 中值定理　(B)
    - Taylor展开(B)
- **微分**
  - 一阶微分形式不变性　$\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$　(A)
  - 弧微分　$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$　(A)

单 元 测 试 一

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

1. 如果函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,那么函数 $f(\sin x)+f(\cos x)$ 的定义域为______.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}=$ __1__.

3. 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{a(\sqrt{n})^3+bn+c}=2$,那么 $a=$ __0__ ,$b=$ __1__ .

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta & x\leqslant 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上可导,那么 $\alpha=$ ______,$\beta=$ __-1__ .

5. 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}(a>0)$ 在点$(0,a)$处的曲率 $k=$ ______,曲率半径 $R=$ ______.

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

1. $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x}),g(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x}),a>1$,已知 $f(x)g(y)+f(y)g(x)=g(u)$ 则 $u=$ ( )

(A) $x-y$　　(B) $x+y$　　(C) $y-x$　　(D) xy

2. 下列函数在区间$[-1,1]$上不满足罗尔中值定理条件的是 ( )　B

(A) $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$　　(B) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$

(C) $f(x)=1+\cos x$　　(D) $f(x)=\begin{cases}1-x^3 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-x^2 & -1\leqslant x<0\end{cases}$

3. 对于方程 $x^3+px+q=0(p>0)$,下列说法正确的是 ( )

(A) 无实根　　(B) 有惟一实根

(C) 有两个不同实根　　(D) 有三个不同实根

4. 设 $f(x)$ 为偶函数,在 R 上可导,则其导数 $f'(x)$ 是 ( )

(A) 奇函数　　(B) 偶函数　　(C) 非奇非偶函数　　(D) 不能确定

5. 下列函数在 $x=0$ 可导的是 ( )

(A) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\leqslant 0\\ 1-x & x>0\end{cases}$　　(B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=x^2D(x)=\begin{cases}x^2 & x\text{ 为有理数}\\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ xe^x & x>0\end{cases}$

三、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上有定义,$x_1>0,x_2>0$,求证若$\dfrac{f(x)}{x}$单调下降,则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

四、(本题满分 10 分,每小题 5 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$. e

(2) 已知$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\operatorname{arctg}t\end{cases}$,求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$. $-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

五、(本题满分 5 分) $\dfrac{1}{2t}$

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,$a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.

六、(本题满分 8 分) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$.

求证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\cdot x$，指出 $f(x)$ 的间断点及类型.

八、(本题满分 5 分)

若两条曲线相交于点 p，我们称此两条曲线在 p 点处的两条切线的夹角(约定为0到$\frac{\pi}{2}$者)为此两曲线在 p 点的夹角，求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 在交点处的夹角.

九、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)>0$.

证明 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$，其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1,x_1,x_2\in(a,b)$.

十、(本题满分 8 分)

要造一圆柱形油罐，体积为 v，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小，这时底直径与高的比是多少？

十一、(本题满分 8 分)

设周期函数 $y=f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 是常数函数.

十二、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微，且 $f(a)=f(b)=0$，$|f''(x)|\leqslant M, x\in(a,b)$.

求证 $|f(x)|\leqslant \dfrac{1}{8}(b-a)^2M$.

$|f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 M$.

$x^3+px+q=0\ (p>0)$ 新 周新 新

$y=f(x)$ 新 周新

$x^3+2x+1=0$ 周新 周新

$f(x)$ x^3+x^2+x+1 新 周新 新

周新 $x^2(x+1)+x+1$

$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$

周新 — $\ln(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

x^3+px+q.

求其进行求导有 $3x^2+p>0$

$\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$

$(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$

$[\sqrt{2}(\sin t+\frac{\pi}{4})]^{\frac{1}{t}}$

$x\to 0$ $1^{\frac{1}{t}}$

单元测试一参考答案与解题分析

一、填空题

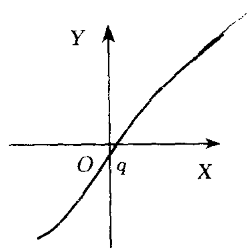
1. $2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots$　　2. 1 【提示】 洛必达法则不适用,为什么?

3. 0　1　　4. 2　-1　　5. $\frac{1}{a}$　a

二、选择题

1. B 【提示】 注意函数形式　　2. B 【提示】 有三个条件:$f(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上连续,在开区间$(-1,1)$上可导且区间端点上的值 $f(-1) = f(1)$.

3. B 【提示】 通过讨论 $x = \pm\infty$ 处极限及一阶导数,可知函数图大致如下



$y = x^3 + px + q$

$y' = 3x^2 + p$

4. A 【提示】 由导数的定义来推导　　5. C 【注意】 $D(x)$ 表示狄利克雷函数,$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

三、【分析】 涉及到单调性,若函数 $f(x)$ 有可微性,则 $f'(x) > 0$ 是一个首先要考虑的条件,否则只能用定义 $x_1 \leqslant x_2, f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

证明　$\forall x_1 > 0, x_2 > 0$,则有 $x_1 + x_2 > x_2, x_1 + x_2 > x_1$.

由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降,则

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leqslant \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow f(x_1+x_2) \cdot \frac{x_1}{x_1+x_2} \leqslant f(x_1)$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leqslant \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow f(x_1+x_2) \cdot \frac{x_2}{x_1+x_2} \leqslant f(x_2)$$

上两式相加得

$$f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2) \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

【考点】 单调性定义.

四、(1)【分析】 当 $x \to +\infty$ 时,$\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} \to 1$,因此该题属于 1^∞ 型函数极限,通常先取对数化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,用洛必达法则求极限.

解法一　令 $y = (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})^x$, $\ln y = x\ln(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\frac{1}{x} = t} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t + \cos t)}{t} \qquad \cdots\cdots 2\text{分}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} = 1 \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

$\therefore$ 原式 $= e$

【考点】 洛必达法则求极限.

解法二 用两个重要极限之一：$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right]^{x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)} \qquad \cdots\cdots 2\ 分$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\mathrm{e}^{\left[\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}+\lim\limits_{t\to0}\frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{t}\right]}$$

$$=\mathrm{e} \qquad \cdots\cdots 5\ 分$$

【考点】 重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

(2)【分析】 参数方程求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}\,y'_x(t)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}}$$

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}\frac{1}{2t}, \qquad \cdots\cdots 2\ 分$$

h(x)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{1}{2t^2}\frac{\frac{1}{2t}}{1+t^2}=-\frac{1+t^2}{4t^3} \qquad \cdots\cdots 5\ 分$$

【考点】 参数方程求导数公式.

五、【分析】 这类指数型极限通常要取对数，即 x^y 化为 $\mathrm{e}^{y\ln x}$.

解 $$\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)=\exp\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}$$

故 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\exp\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}$$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$$\xlongequal[法则]{洛必达}\exp\left(\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \qquad \cdots\cdots 5\ 分$$

六、【分析】 连续函数性质：在有界闭区间上函数有界，现在要证函数 $f(x)$ 在无穷区间上有界. 注意到条件 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ 极限存在，也就是说在无穷远处 $f(x)$ 被极限值 $A(B)$ 所约束住了，在有穷区间上有界，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明 $\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M(\varepsilon)>0$，当 $x>M(\varepsilon)$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$, $\exists M_1>0$，当 $x>M_1$ 时，$|f(x)|<|A|+1$

同理 $\exists M_2>0$，当 $x<-M_2$ 时，$|f(x)|<|B|+1$

又 $\because f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $\therefore f(x)\in C[-M_2,M_1]$ $\qquad\cdots\cdots 4\ 分$

$\therefore \exists D>0$，为 $x\in[-M_2,M_1]$ 时，$|f(x)|<D$.

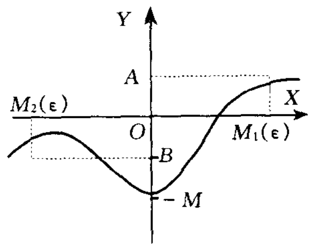
$\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}$

$[\ln(\sin t+\cos t)]'$

$\sin t+\cos t$

令 $M = \max\{D, |A|+1, |B|+1\}$ 则

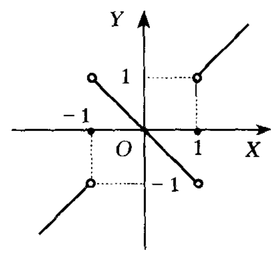
$$|f(x)| < M, x \in (-\infty, +\infty)$$ ……8 分



七、【分析】 先要将极限形式去掉才能讨论.

解　当 $|x| < 1$ 时

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \cdot x = \frac{0-1}{0+1} \cdot x = -x$$



当 $|x| > 1$ 时

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \cdot x = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} \cdot x = x$$

当 $|x| = 1$ 时

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \cdot x = 0$$ ……5 分

综上　$$f(x) = \begin{cases} x & |x| > 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -x & |x| < 1 \end{cases}$$

可见, $x = -1$ 及 $x = 1$ 均为不可去第一类间断点 ……8 分

八、【分析】 两曲线通过交点处的切线定义夹角

$$\theta = |\theta_2 - \theta_1|$$

由导数的几何意义 $y'_x(x_0) = \tan\theta$, 由和角公式定出夹角的值.

解　首先求两曲线的交点易知(1,1) 点是两曲线的交点;其次,求交点处两曲线的导数.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=1} = -1$$ ……1 分

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}$$ ……2 分

最后求夹角,设切线与 x 轴夹角为 θ_1, θ_2, 则

$$\theta = |\theta_2 - \theta_1|$$

于是　$$\tan\theta = \left|\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\times 1}\right| = 3$$

∴　$\theta = \arctan 3$ ……5 分

九、【分析】 给了二阶可导条件,可考虑泰勒公式.

证明　不妨设 $x_1 < x_2, x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in (a, b)$.

将 $f(x)$ 在 x_0 点展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$ 其中 ξ 在 x 和 x_0 之间 ……1 分

于是　$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2$$

于是 $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_0) + \frac{\lambda_1}{2!}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2$

$+ \frac{\lambda_2}{2!}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2$ ……3 分

由 $f''(x) > 0$, 知 $\frac{\lambda_i}{2!}f''(\xi_i)(x_i - x_0)^2 > 0, i = 1,2$

又因 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_0 = 0$

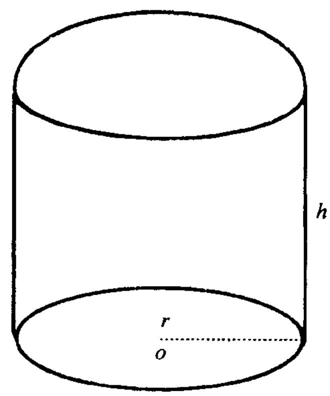
故 $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(x_0) + \frac{\lambda_1}{2!}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{\lambda_2}{2!}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2 > f(x_0)$

即 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ ……5 分

十、解 设表面积为 A, 则

$$\begin{cases} A = 2\pi r^2 + 2\pi rh & (1) \\ V = \pi r^2 h & (2) \end{cases}$$

由(2)解出 $h = \frac{V}{\pi r^2}$, 代入(1)得函数



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}(r > 0)$$

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{r^2}\left[r - \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right]\left[r^2 + r\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}\right]$$

惟一极值嫌疑点为 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$(驻点). ……3 分

由此问题的实际意义知, 这种表面积必有最小值, 并且最小值就在此驻点处取得, 故 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, 此油罐的表面积最小(如右图) ……6 分

这时 $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 因此底直径与高的比为 $2r : h = 1 : 1$. ……8 分

十一、【分析】 $f(x)$ 可导, 要证 $f(x)$ 是常数函数, 即要证 $f'(x) \equiv 0$. 注意到 $f(x)$ 是周期函数, 那么 $f'(x)$ 也是周期函数.

$f'(x) = f'(x + nT)$ T 为周期, $n \in Z, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 因而任何一点都可以通过令 $n \to +\infty$ 联系到 $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$.

证法一 首先证明 $f'(x)$ 也是周期函数, 设 T 是 $f(x)$ 的最小正周期.

则 $$f'(x + T) = \lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(x + T + \triangle x) - f(x + T)}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$ ……2 分

$\because f(x)$ 是周期函数, $f(x) \in C(0, T)$, 从而 $f(x)$ 有界. ……3 分

又 $\because \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 存在, 由洛必达法则有

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$ ……4 分

$\because$ $f'(x + T) = f'(x)$

$\therefore$ $f'(x) = f'(x + nT)$ 令 $n \to +\infty$

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'(x + nT) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

$\therefore$ $f(x)$ 为常数函数. ……8 分

【考点】 洛必达法则求极限.

证法二 $f(x)$ 为周期函数, 易证 $f'(x)$ 也为周期函数, 设最小正周期为 T, 则

$$f'(x) = f'(x + nT)，令\ n \to +\infty\ 有$$

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'(x + nT) = \lim_{x\to+\infty} f'(x).\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

即 $f'(x) \equiv C$. C 为常数 ……4 分

又 $f(x + T) = f(x)$，由 Rolle 定理.

$\exists \zeta \in (x, x + T)\quad f'(\zeta) = 0, \therefore C = 0$

即 $f'(x) \equiv 0$，因此 $f(x)$ 为常数函数. ……8 分

【考点】 洛必达法则，周期函数导函数仍为周期函数，函数极限与数列极限关系.

十二、【分析】 要证 $f(x)$ 有界，只要能够估计出函数在最大点的取值的大小，从而将一个区间上的函数估计问题归到一个点的函数值的大小估计问题，在该点考察其导数，泰勒展开.

证明 $\because f(x) \in C^{(2)}[a, b]$，则 $|f(x)| \in C[a, b]$，由连续函数最大、最小值定理. $\exists x_0 \in (a, b)$，x_0 点为 $|f(x)|$ 的最大值点(显然 $x_0 \neq a, b$，否则 $f(x) \equiv 0$)

$\therefore f'(x_0) = 0$ ……3 分

在 x_0 点作泰勒展开

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''[x_0 + \theta(x - x_0)]}{2}(x - x_0)^2 \quad 0 < \theta < 1$$ ……4 分

取 $x = a, b$ 得

$$|f(x_0)| \leqslant \frac{M}{2}(a - x_0)^2$$

$$|f(x_0)| \leqslant \frac{M}{2}(b - x_0)^2$$

$\therefore$

$$|f(x_0)| \leqslant \frac{M}{2}\min\{(a - x_0)^2, (b - x_0)^2\}$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{b - a}{2}\right)^2 = \frac{M}{8}(b - a)^2$$

即

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{8}(b - a)^2$$ ……8 分

【考点】 函数 Taylor 展开(拉格朗日余项)估计函数值.

单元测试二

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{tg}(\text{tg}x)-\sin(\sin x)}{\text{tg}x-\sin x}=$ ________.

2. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+a\cos x-b\sin x}{x^3}=1$,则 $a=$ ________, $b=$ ________

3. 设 $f(x)=x^4\ln(2+x)$,则 $f^{(8)}(0)=$ ________.

4. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}-x$ 的渐近线为________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x+b & x\leqslant 0\\ \sin ax & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,那么 $f'(0)=$ ________

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限均为 A,则 $f(x)$ 在点 x_0 ( )

(A) 有定义 (B) 极限存在 (C) 连续 (D) $f(x_0)=A$

2. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的 ( )

(A) 等价无穷小 (B) 同价但不等阶的无穷小

(C) 低阶无穷小 (D) 高阶无穷小

3. 设 $f(x)$ 有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则 $f^{(n)}(x)=$ ( )

(A) $n[f(x)]^{n+1}$ (B) $n![f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{n+1}$ (D) $(n+1)![f(x)]^{n+1}$

4. 设偶函数 $f(x)$ 有连续二阶导数,且 $f''(0)\neq 0$,则 $x=0$ ( )

(A) 不是 $f(x)$ 的驻点 (B) 一定是 $f(x)$ 的极值点

(C) 一定不是 $f(x)$ 的极值点 (D) 不能确定是否为 $f(x)$ 的极值点

5. 以下命题正确的是 ( )

(A) 无界数列必趋于无穷大 (B) 趋于无穷大的数列必无界

(C) 趋于正无穷大的数列必在充分大时单调 (D) 不趋于无穷大的数列必有界

三、求极限(本题满分 12 分,每小题 3 分 $[2+(-1)^n]\cdot n$

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n+1]{5})$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

四、(本题满分 8 分)

设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x(t)=\ln\cos t\\ y(t)=\ln\sin t\end{cases}$, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 确定.求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(本题满分 6 分)

设三次多项式 $p(x)$ 在 $x=1$ 处函数值及各阶导数值为 $p(1)=1$, $p'(1)=-2$, $p''(1)=4$, $p'''(1)=6$. 求 $p(x)$.

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k<+\infty$.求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导二次,且 $f''(x)<0$,又 $f(0)=0$.证明对于 $[0,1]$ 中的任何一点 a,都有 $f(a)\leqslant 2f(\dfrac{a}{2})$.