

S HAONIAN
BAIKE CONGSHU

巧猜妙想学数学

王增新 韩家桀



巧猜妙想学数学

王增新 韩家桀

封面： 高 延

插图： 姜渭渔

中国少年儿童出版社

巧猜妙想学数学

王增新 韩家桀

*

中国少年儿童出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092 1/32 4印张 39千字

1985年4月北京第1版 1985年4月北京第1次印刷

印数1—100,000册 定价0.47元

内 容 提 要

这是一本有趣的书。要考一考你，看看你的数学学得怎样。全书 50 个问题，选材别致，内容实在，能吸引你琢磨其中的道理。相应的猜想和解答各 50 个，大都运用实验归纳的方法，形象直观，能帮助你增长分析和想象、判断和推理的能力。这是补充课堂教学，生动活泼地学习数学的一个办法。

要是没有大胆的猜想，就不会
有知识的进展。

——高 斯

难处不在于有了公式去证明，
而在于没有公式之前，怎样去找出
公式来。

——华罗庚





目 次

举 例	1
问 题	6
代 数(20)	6
几 何(20)	15
三 角(4)	23
杂 题(6)	26
猜 想	31
解 答	60
附 录	112

举 例

这本书分问题、猜想和解答三部分。

下面,先举两个例子,把它们的三部分放在一起作为开头。也算是分析问题、提出猜想和给出解答的参考。

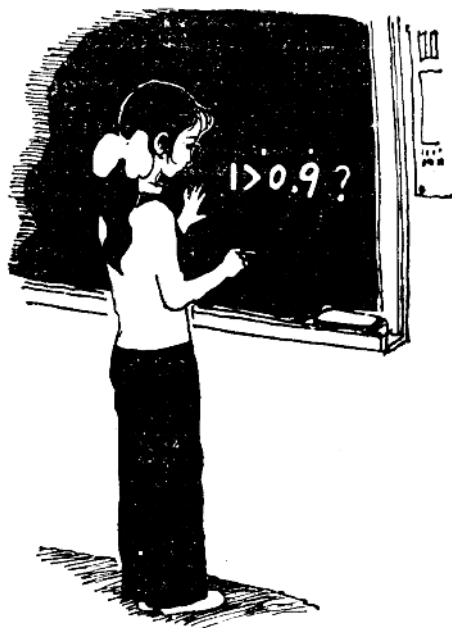
问题 任何两个实数,都可以比较它们的大小。好。现在请你在比1小的数当中,把最大的一个找出来。

猜想 要从比1小的数里找出最大的一个,当然是从小数里去找了。它不是0.7、0.8,也不是0.9,因为0.99更大。0.99也不是最大的,还有更大的0.999、0.9999、...

我猜想:在比1小的数里,最大的是0.999...也就是0.9。

解答 猜想错了。因为 $0.\dot{9}$ 并不比1小。不信,请看:

$$\text{设 } x = 0.\dot{9} = 0.999\cdots$$



两边乘 10, 得 $10x = 9.999\ldots$

把这两个等式相减, 得 $9x = 9$ 。

所以, $x = 1$, 也就是 $0.9 = 1$ 。

那在比 1 小的数当中, 最大的是哪一个呢?

答案是: 没有。

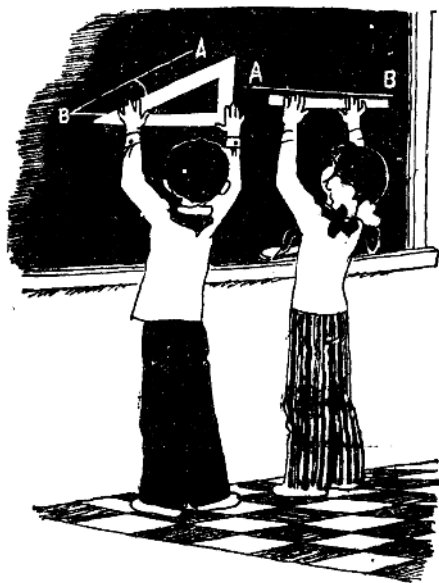
要是有人指出 A, 就是比 1 小的最大的一个, 那我们根据 $1 - A = a > 0$, 很容易指出比 1 小、又比 A 大的数还多着呢。

就象没有最大的整数、也没有最小的分数和小数一样，比 1 小的最大的一个数是不存在的。

问题 下面的两个作图题，一个能作出来，一个不能作出来。请你想一想，猜一猜：是哪一个能作出来？

一，只用一把有刻度的直尺，准确地等分一条线段。

二，只用一把有刻度的直尺，准确地等分一个角。

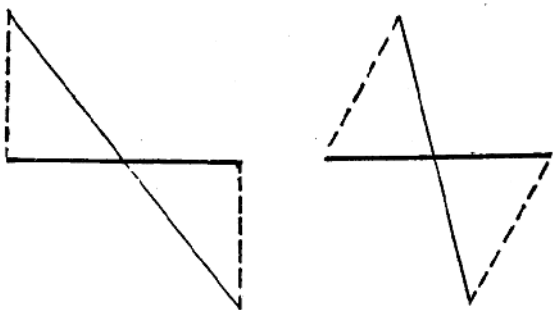


猜想 尺子怎么能等分角呢。看起来，用一把有刻度的尺子，应该能等分一条线段。先量出线段的长，再算出它的一半，不就解决了问题。

一琢磨，不对了。线段有长有短，不一定正好能用尺子的刻度准确地量出来。

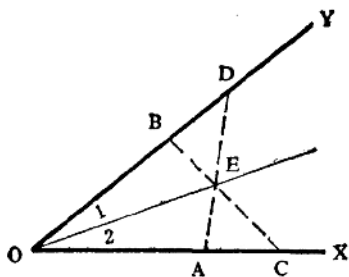
要是量边长为1的正方形的对角线，它的长 $\sqrt{2}$ 是一个不循环的无限小数，不管尺子的刻度多么精密，也量不出准确的长度。

用垂直线或者平行线也能等分线段。可是，刻度尺又无法准确地作出垂直线和平行线。



既然刻度尺不能准确地等分一条线段，那自然是能准确地等分一个角了。

解答 猜想对了。刻度尺虽然量不出角度，可是能作出等长的线段，再作出全等的三角形，来准确地等分已知角。



在 $\angle XOY$ 的两边上,分别取 $OA = OB$, $OC = OD$;连接 AD 、 BC , 相交于 E ;连接 OE , OE 就等分了 $\angle XOY$ 。

证明简单:

第一步, 证 $\triangle ODA \cong \triangle OCB$, 得 $\angle ODA = \angle OCB$;

第二步, 证 $\triangle EBD \cong \triangle EAC$, 得 $BE = AE$;

第三步, 证 $\triangle OBE \cong \triangle OAE$, 这就得到了 $\angle_1 = \angle_2$ 。

你看这两个例子: 问题有点懵人, 其实不难; 猜想是设想读者可能怎么猜想, 不一定就对, 还需要再猜想; 解答讲正确的结论, 也讲证明的思路、根据和方法。

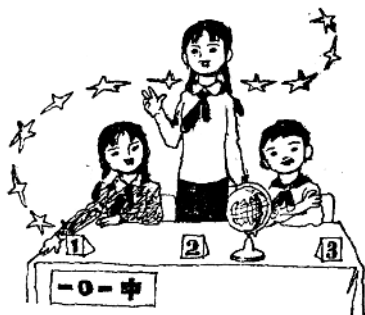
要是你有了好的想法, 特别是有了漂亮的证明, 请来信告诉我们。

问 题

代 数

1 电视台正在播放一个智力竞赛题：一个自然数与它自己的和、差、积、商加起来等于100，这个自然数是几？当主持人把问题刚说完，就有人按铃正确地抢答“9”。

现在，请你尽快回答这个问题：一个自然数与它自己的和、差、积、商加起来能等于122吗？



2 2246066280...

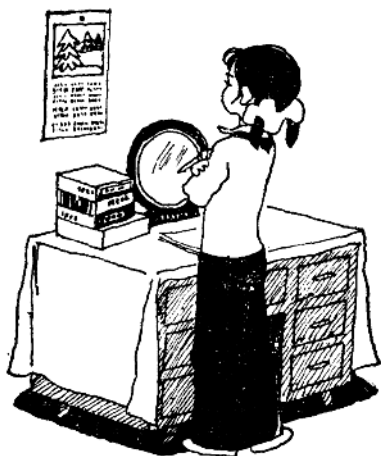
这个数，它的各个数字是这样写出来的：开头的两个2，是任意取定的；后面的每一个，都是前两个的和的个位数字。例如第三的一个4，是 $2+2=4$ ；第五的一个0，是 $4+6=10$ 取0；第八的一个2，是 $6+6=12$ 取2。

请问：这个数这样没完没了地写下去，会出现什么样的有规则的变化？



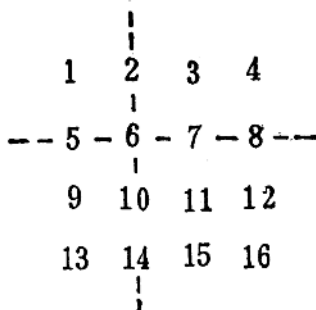
3 这是一张月历。在上面任意取上下左右相连的九个数组成一个矩形。你看，横行的三数和，依次相差21；竖列的三数和，依次相差3。

请问：不管怎么取这九个数，在这九个数中，还有什么不变的关系？



日	一	二	三	四	五	六
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

4 剪 16 张小卡片,分别写上 1、2、3、…16,依次摆成一个正方形:



从图中任选一个数,比如 6,把它拿出来放在左边。然后,把与这个数同一横行和同一纵列中的数,全都拿出来放在右边。

在剩下的 9 张卡片中,再任选一个数,把它拿出来放在左边。然后,把与这个数同一横行和同一纵列中的数,全都拿出来放在右边。

现在,剩下 4 张卡片。再任选一个数,把它拿出来放在左边。然后,把与这个数同一横行和同一纵列中的数,全都拿出来放在右边。

现在,剩下一张卡片了,把它拿出来放在左边。

最后,把放在左边的四个数加起来。

重新这么做一次后,你能提出什么猜想吗?

5 九位同学参加智力竞赛，分为三组，每组三人；每组的三位同学，又编为 1、2、3 号。他们的得分情况如下：

	第 1	第 2 号	第 3	
第一	a	b	c	x
第二组	d	e	f	y k
第三	g	h	i	z
	m	n	p	
		l		

x, y, z 分别是三个组里的最高分， k 是这三个最高分里的最低分； m, n, p 分别是三个号里的最低分， l 是这三个最低分里的最高分。

请问： k 与 l 哪个大？

6 A 和 B 是两个自然数，它们的最大公约数是 F，最小公倍数是 M。请你猜想：A、B、F、M 四个数有什么关系？

$$7 \quad x + \frac{2}{x} = 3 + \frac{2}{3},$$

去掉分母后是一个一元二次方程，它的两个根，一个是3，一个是 $\frac{2}{3}$ 。请问：这是碰巧，还是所有类似的方程都这样呢？

$$8 \quad x^2 + 5x + 6 = 0, \quad 6x^2 + 5x + 1 = 0.$$

看看这两个方程的特点，再看看它们的根，你能提出什么猜想吗？

9. 京京和玲玲在玩一种写数游戏：

两个人轮流在纸上写出两个数，要求写出来的四个数 a_1, a_2, a_3, a_4 满足两个条件：

一， $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ (a_1, a_2, a_3 不全是零)；

二， a_4 与 $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ 的符号相同。

谁写得快，谁就胜了。

在游戏中，玲玲总是抢着写第一个和第三个数。她认为：第四个数 a_4 难写出来，一定费的时间多。不过，她只赢了头两盘，从第三盘起，就总是京京获胜了。

玲玲想不明白其中的奥妙，请你帮她解开这个谜。

10 分数的分子、分母乘上同一个正数，值不变。