数学基础知识丛书

面积与体积

吕林根

江苏人民出版社

面积与体积

吕林根

江苏人民出版社

数学基础知识丛书

面积与体积

吕林根

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
南通县印刷厂印刷

1978年6月第1版
1978年6月第1次印刷
书号：13100·015　定价：0.42元

内　容　提　要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分六个部分，一、二部分主要讲解平面图形的面积概念及其计算方法；三至六部分主要讲解立体图形的体积、表面积的概念及其计算方法。

目　录

一　多边形的面积

“数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的”（恩格斯：《反杜林论》）。劳动人民在改造社会和改造自然的长期斗争中，积累了丰富的数学知识，得出了各种形状的面积和体积的计算方法，这些方法，在阶级斗争、生产斗争和科学实验三大革命实践中，经常被广泛应用着。我们在这本书里，将向读者介绍有关面积与体积的一些基础知识和常用的计算方法。

§1　面　　积

多边形或者其他平面封闭图形所围的平面部分的大小，叫做这个图形的面积。

显然，图形的面积有着下面的两条基本性质：

（1）两个全等形的面积一定相等；

（2）一个图形的面积，等于它的各部分的面积的和。

如果两个图形的面积相等，这两个图形就叫做**等积形**。全等形一定是等积形，但是等积形未必是全等形。例如在图1中，由两个直角三角形Ⅰ和Ⅱ拼成的三个图形，显然它们的面积都相等，但是它们彼此都不全等。

为了要度量一个图形的面积，首先要选定一个度量面积的单位，通常选取以边长为一个长度单位（例如，1厘米）的正方形作为面积的度量单位，这个正方形叫做**单位正方形**，

它的面积叫做面积单位（例如，1平方厘米）. 面积单位的选用，也常根据不同的要求加以确定. 例如，度量机器零件的截面面积，常采用平方毫米，度量房间面积的大小，常采用平方米，至于一个国家的疆土，就需要用平方公里作为面积单位进行计算了.

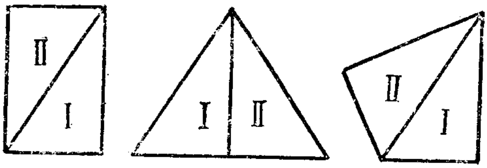

图 1

度量一个图形的面积，实际上就是要确定它含有多少个面积单位的问题. 度量图形的面积，为了方便我们并不常用单位正方形直接去量图形含有多少个面积单位，而往往采用间接的方法，就是先量出图形中某些线段的长度，再由这些长度，计算出图形的面积.

§2 多边形的面积公式

1. 矩形的面积公式 多边形的面积度量，是以矩形的面积为基础的，其他多边形的面积公式的推导，都是以此为出发点的. 矩形的面积是以下面的公式来计算的.

$$矩形的面积 = 底 \times 高.$$

这个公式应当这样来理解：用同一个长度单位（例如，厘米）量矩形的底和高，如果分别得到量数b和h，那么用相应的面积单位（例如，平方厘米）来量它的面积所得的量

数S就等于bh，即

$$S = bh$$

现在我们就b和h都是整数，或含有分数，或含有无理数的三种情形来说明。

（1）如果b、h都是整数，例如$b=5$、$h=3$，就是说矩形的底等于5个长度单位，高等于3个长度单位。这时沿着矩形的底边，在矩形内恰好可以放置（不重迭）5个单位正方形，因为矩形的高度是3，所以沿着高线在矩形内一共可以放3排（图2），因此整个矩形内一共可以放置5×3个单位正方形。这就是说矩形恰好含有5×3个单位正方形，所以矩形的面积就是5×3个相应的面积单位。

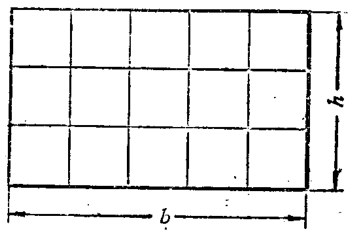

图 2

一般地当b和h为任意整数时，矩形的面积等于bh个相应的面积单位。

（2）如果b、h中含有分数，例如$b=5\frac{1}{3}$，$h=3\frac{1}{5}$，那么可以将这两个分数通分后得$b=\frac{80}{15}$，$h=\frac{48}{15}$。这时我们可以改用原来长度单位的$\frac{1}{15}$作为新的长度单位去量矩形的底和高，就分别得整数80和48。根据第一种情况，可以知道矩形的面积等于80×48个和新的长度单位相应的面积单位，因为和原来长度单位相应的面积单位等于15×15个和新的长度单位相应的面积单位，所以如果用原来的面积单位来表示矩形

的面积，应该是$\frac{80\times48}{15\times15}$，就是$\frac{80}{15}\times\frac{48}{15}$，也就是$5\frac{1}{3}\times3\frac{1}{5}$．这就是说矩形的面积等于$5\frac{1}{3}\times3\frac{1}{5}$个和原来的长度单位相应的面积单位。

一般地当b和h为任意分数时，矩形的面积等于bh个和长度单位相应的面积单位。

（3）如果b、h中含有无理数，例如$b=\sqrt{3}$，$h=\sqrt{2}$，那么这时我们可以分别取$\sqrt{3}$与$\sqrt{2}$精确到相同单位的不足近似值与过剩近似值，例如取精确到$\frac{1}{10}$的不足近似值$\sqrt{3}\approx1.7$、$\sqrt{2}\approx1.4$和过剩近似值$\sqrt{3}\approx1.8$、$\sqrt{2}\approx1.5$，然后在矩形$ABCD$的底边AB和它的延长线上分别取$AB_1=1.7$、$AB_2=1.8$，同样在高AD和它的延长线上分别取$AD_1=1.4$、$AD_2=1.5$（图3）．过B_1、B_2和D_1、D_2分别作高AD和底边AB的平行线，这样得矩形$AB_1C_1D_1$和矩形$AB_2C_2D_2$，而矩形$ABCD$夹在两矩形$AB_1C_1D_1$与$AB_2C_2D_2$之间。如果以S_1、S和S_2分别表示矩形$AB_1C_1D_1$、$ABCD$和$AB_2C_2D_2$的面积，那么有

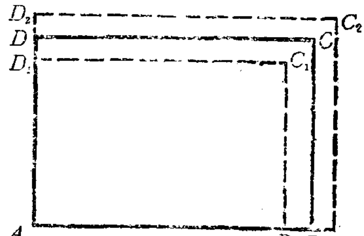

图 3

$$S_1<S<S_2.$$

因为有限小数总能化为分数，所以由第二种情况得

$$S_1=1.7\times1.4,$$
$$S_2=1.8\times1.5,$$

$\therefore\quad 1.7\times1.4<S<1.8\times1.5$，

如果我们继续不断地取$\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$精确到$\frac{1}{10^2}$、$\frac{1}{10^3}$、…等不足近似值与过剩近似值，那么用同样的方法可得

$$1.73\times1.41<S<1.74\times1.42,$$
$$1.732\times1.414<S<1.733\times1.415,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

当$\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$的不足近似值和过剩近似值的小数位数无限增加时，上述不等式两边分别趋向公共极限$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$，因此矩形$ABCD$的面积在数值上与$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$完全一致，即矩形$ABCD$的面积等于$\sqrt{3}\times\sqrt{2}$个和长度单位相应的面积单位.

一般地当b和h为任意无理数时，矩形的面积等于bh个和长度单位相应的面积单位。

综合上面三种情况，我们得**矩形的面积等于它的底和高的积。**

正方形是底与高相等的矩形，因此**正方形的面积等于它的一边长的平方.**

2. 平行四边形、三角形和梯形的面积公式　在推导某些图形的面积公式时，我们常常割去这些图形的一部分，把割下来的部分拚到原来图形的剩余部分的适当位置上，从而改变原来图形的形状，这样处理图形的方法叫做面积割补法.根据图形面积的基本性质，图形经过割补后它的面积没有改变，也就是割补后的图形与原图形是等积的。我们采用割补法的目的，在于改变原图形的形状，使它成为一个面积度量已经解决的等积图形，从而通过后者的面积计算，来求出原图形的面积。

在度量图形的面积时；有时也常常在需要度量的图形

上，补充某一部分图形，使它变成一个我们已会度量的新图形，那么由新图形减去所补充的某一部分图形（或减去与补充图形等积的图形）的面积，就可以求出原图形的面积。象这样处理图形的方法叫做**面积补充法**。

如图4，从平行四边形$ABCD$的顶点B、A分别作CD边的垂线，交CD或CD的延长线于F、E，那么$\triangle BCF\cong\triangle ADE$，因此我们可以先在平行四边形$ABCD$上添补一个$\triangle ADE$，得梯形$ABCE$，然后再割去一个和$\triangle ADE$全等的$\triangle BCF$，最后得矩形$ABFE$．显然矩形$ABFE$是和平行四边形$ABCD$等积的，这个矩形的底和高仍然是平行四边形$ABCD$的底和高，联系到矩形的面积公式，就得平行四边形的面积公式

$$S=bh$$

这里S是平行四边形的面积，b是平行四边形的底，h是平行四边形的高。

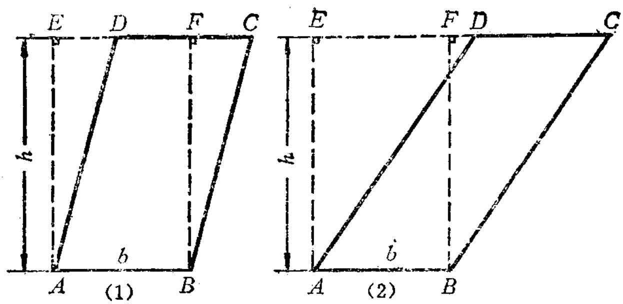

图 4

如图5，我们用一个与原三角形ABC全等的三角形ADC拼补在$\triangle ABC$的一边上，使它补充成一个平行四边形

$ABCD$，这时平行四边形的面积显然为原三角形的两倍，而平行四边形的高与底也是三角形的高与底，因此就得三角形的面积公式

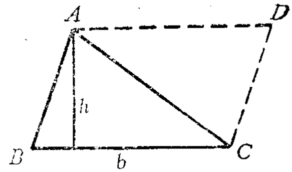

图 5

$$S=\frac{1}{2}bh$$

这里S是三角形的面积，b是三角形的底，h是三角形的高。

图 6 中的（1）、（2）、（3）是用图形的割补法来证明三角形面积公式的三种方法（图中$AM=MB$，$AN=NC$）。

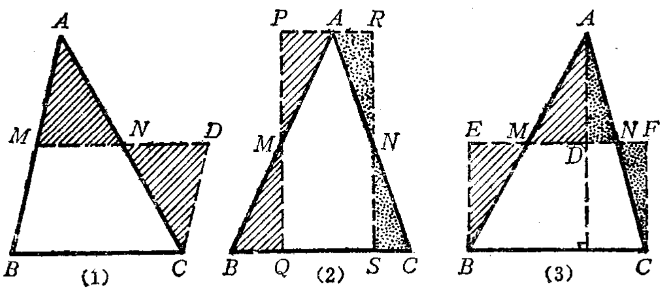

图 6

图 7 是在梯形 $ABCD$ 的一腰BC上拼补一个与它全等的梯形$BCEF$，这样就补充成一个平行四边形$AFED$．显然它的面积是原梯形 $ABCD$ 的两倍，这平行四边形的底为原梯形的上底、下底之和，而高等于梯形的高，因此就得梯

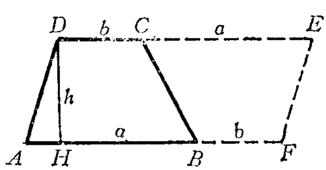

图 7

形的面积公式

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h$$

这里S是梯形的面积，a、b分别是梯形的上底和下底，h是梯形的高。

图 8 是用图形的割补法来证明梯形的面积公式（图中 $BM=MC$）；图 9 是将梯形剖分为两个等高的三角形，然后

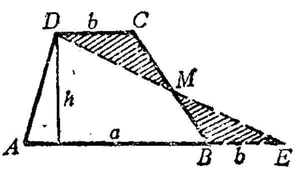

图 8

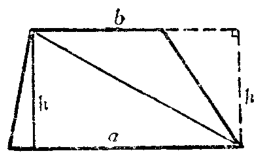

图 9

用三角形的面积公式导出梯形的面积公式。根据图示，读者自己可以写出它的证明。

根据三角形的面积公式，容易知道等底等高的三角形等积。因此，底边公共，顶点在底边的平行线上移动的三角形，它们的面积都相等（图10）。根据这一点，我们可以把一个任意四边形改成等积的三角形。

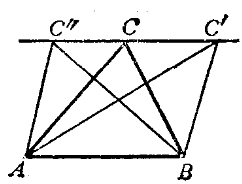

图 10

如图11，已知四边形$ABCD$，连B、D，过C作$CP\parallel DB$，交AB于P，那么由于$\triangle PBD$与$\triangle CBD$等积，所以$\triangle APD$与四边形$ABCD$

等积．用完全同样的方法，读者可以把一个任意多边形逐步改变成一个与它等积的三角形。

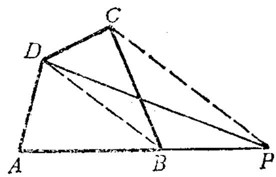

图 11

3．一般多边形的面积 对于任意多边形的面积度量，我们可以像上面那样，先把它变形成等积的三角形，然后通过度量变形得来的三角形的面积来求出已知多边形的面积．但是，这种方法并不常用，通常是先把这个多边形分割成许多三角形（图12），然后分别计算各个三角形的面积，把所得的结果相加，就得已知多边形的面积．

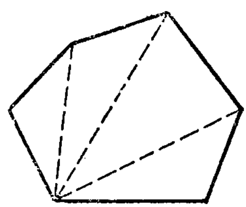

图 12

在导出平行四边形、三角形和梯形的面积公式时，我们运用了割补法或补充法．我们不难看出，当一个多边形割补成另一个新的多边形时，这两个多边形一定是由相同个数的对应全等的部分所组成，或者说这两个多边形可以分割成相同个数对应全等的部分．例如图6(1)中的▱$BCDM$与$\triangle ABC$，可以分割成对应全等的两部分，即除公共部分$BCNM$外，还有一对全等的三角形，即$\triangle CDN\cong\triangle AMN$．从图6（2）中也可以看出$\triangle ABC$与矩形$PQSR$可以分割成对应全等的三部分；图6（3）中的$\triangle ABC$与矩形$BCFE$也可以分割成对应全等的三部分；而图8中的梯形$ABCD$与$\triangle AED$可以分割成对应全等的两部分。

如果两个多边形可以分割成相同个数对应全等的多边形，那么这两个多边形叫做组成相等多边形。

显然图6（1）中的$\square BCDM$与$\triangle ABC$组成相等；图6（2）中的$\triangle ABC$与矩形$PQSR$组成相等；图6（3）中的$\triangle ABC$与矩形$BCFE$组成相等；图8中的梯形$ABCD$与$\triangle AED$组成相等。

容易知道，两组成相等的多边形一定等积；反之，我们也可以证明两等积的多边形一定组成相等。

例1　直角三角形斜边上正方形的面积，等于它的两条直角边上正方形的面积的和。

这就是著名的勾股定理，现在我们运用面积的补充法来证明它。

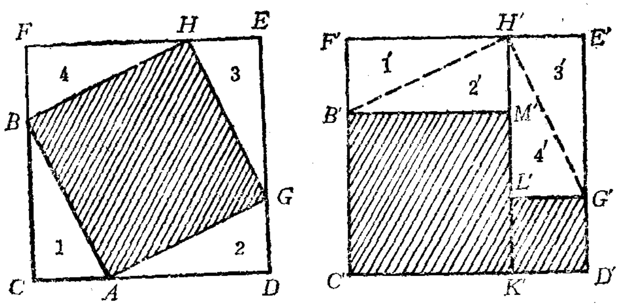

图　13

设$ABHG$为已知直角三角形ABC斜边AB上所作的正方形（图13），而多边形$B'C'D'G'L'M'$为两直角边BC及AC为边所作两个正方形面积的和，现在我们来证明$ABHG$与$B'C'D'G'L'M'$等积。

如果在正方形$ABHG$的每边上分别添加全等于已知$\triangle ABC$的三角形1、2、3、4，使它补充成为正方形$CDEF$；另一方面，又在多边形$B'C'D'G'L'M'$上也添加四个与$\triangle ABC$全等的三角形$1'$、$2'$、$3'$、$4'$，补充

成正方形 $C'D'E'F'$ （如图13所示）。这样显然有正方形 $CDEF$ 等积于正方形 $C'D'E'F'$，所以 $ABHG$ 与 $B'C'D'G'L'M'$ 等积。

我国古代数学家对勾股定理早有研究，我国第一部古老的算书《周髀算经》上面已有记载，其中立说最早的要算商高与陈子（商高为周朝与周公同时代人，约在公元前1120年左右，而陈子的年代目前尚无确实考证，但据古书记载，至迟为春秋时代即公元前六世纪人）。到了汉朝，有个数学家赵君卿，他在注周髀算经一书时补了一个“勾股方圆图注”，在这个注的解说中，明确的提出了这个定理的公式。他的勾股方圆图一共有三幅，图14就是其中的第一幅，叫做弦图。我们容易看出，图中面积等于c^2的正方形是由四个全等的直角三角形和一个面积等于$(b-a)^2$的正方形所组成的，因此

$$c^2=\left(\frac{1}{2}ab\right)\times 4+(b-a)^2$$
$$=a^2+b^2.$$

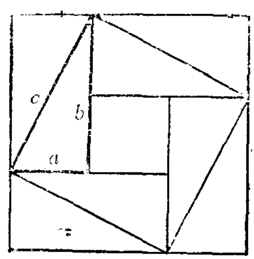

图　14

以后的数学家曾用“演段”证明此定理，“演段”法就是把图形实行分割后再拼补在一起的方法，实际上这就是应用了组成相等。到了清代，有许多数学家如梅文鼎、李锐、华蘅芳等创造了许多不同的用面积割补法的证明。图15是我国古算书上的两张用面积的分割法来证明勾股定理的图形。

这个定理的证明方法是很多的，我们不作一一的介绍了。