数学分析方法选讲

主编　周忠群

西南师范大学出版社

数学分析方法选讲

周忠群　主编

西南师范大学出版社出版

（重庆北碚）

新华书店重庆发行所　经　销

四川省内江新华印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：15.5　字数：336千

1990年9月第一版　　1990年9月第一次印刷

印数：1—3,700

ISBN7—5621—0410—7/O.32

定价：9.05 元

前　言

本书是在《数学分析》教材的基础上，着重讲述数学分析的主要理论和重要方法．对数学分析的一些基本理论进行加深和拓广．例如序列极限、函数极限与积分和的极限都统一在Moore-Smith的网收敛理论中．力求使读者明白数学分析中的种种极限的深刻内在联系，并为进一步学习作了准备．书中讨论了抽象实数的连续性的种种等价形式，对极限理论进行了完整的论述，并且在有理数系的基础上建立了具体的康托（Cantor）实数理论，对代德金（Dedkind）定义实数的方法也作了介绍．书中引入了只以集合概念为基础的近代函数概念．对函数的连续性及一致连续性作了较为严格的讨论．对微分学的基本定理即中值定理作了一定的推广，对凸函数作了简单的介绍．在一元函数的积分学中，注意指出了对原函数概念由于忽视定义域而容易出现的错误，加强了可积性的讨论，补充了定积分的一些性质．多元函数微积分中举了较多的例子，对含参变量积分的性质也作了一些推广，并补充了级数的一些判别法．以上所列的这些内容要在教科书中都叙述是不可能的，但要透彻理解数学分析的基本理论，这又是必要的．

我们选取了较多例题，有的例题说明基本方法的使用，有的例题可使读者学到解决问题的技巧，有的例题难度较大，可使读者受到锻炼，提高解决问题的能力．

我们编写各章时，尽可能地概括了数学分析教材的相应部分的主要内容，对教材中的定理，只给出了在证明方法上有代表性的定理的证明，有的定理使用了新的证明方法进行证明，以便起到复习巩固作用．另外，我们在论述问题时，尽可能地将数学分析教材中的某些重要概念和定理较好地联系起来，有助于读者把握住它们．

本书是为学生学习数学分析这门重要基础课而编写的参考书，主要对象是数学系本科生、专科生、函授生以及从事数学分析课教学的教师．也可作为大学本科数学分析选讲课以及专科起点的本科函授的数学分析选讲课的教材或教学参考书．

本书由西南师范大学周忠群教授主编，参加编写的有下列同志：周忠群（编写第一章及附录）、李华容（西南师大，编写第二章）、段应全（贵州师大，编写第三章）、梁冠玉（四川师大，编写第四章）、刘建军（西南师大，编写第五章）、张同彬（广西师大，编写第六章）、王文俩（云南师大，编写第七章）、郭瑞海（西南民族学院，编写第八章）、王天贵（四川师院，编写第九章）．最后由周忠群、刘建军等同志完成全书统稿工作．

我们要感谢西南师范大学数学系给我们提供了完成本书的工作条件．还要感谢西南师范大学罗四维教授对本书提出的宝贵意见和建议．由于我们水平有限，时间又比较仓促，不当与错误之处在所难免，希望读者不吝指教．

编　　者

1989年12月20日

目　　录

第一章　极限理论

第二章　函数及其连续性

第三章　微分中值定理·凸函数

第四章 一元函数的积分学

第五章　无穷级数与广义积分

第六章　多元函数的微分学

第七章 含参变量积分

第八章 多元函数积分学

第九章　实数理论

第一章 极限理论

极限理论是数学分析这门学科的理论基础，极限方法是数学分析的基本方法.

完整的极限理论的建立，依赖于实数的基本性质，即实数系的所谓连续性. 我们已经熟悉的单调有界原理就是实数连续性的一个等价命题. 实质上，单调有界原理，确界存在定理，区间套定理，波雷尔（Borel）有限复盖定理，维尔斯特拉斯（Weiestrass）聚点原理等都是等价的，都是实数连续性的刻划. 实数的连续性等价命题有二十多个. 本书只给出几个常见的命题，并通过对它们的等价性的证明，介绍极限中的一些典型方法.

本章分为三节和一个附录. 在§1里，以实例说明解决极限问题的若干方法；在§2里给出实数连续性的等价命题，并给出它们的等价性的证明，在本章附录里，通俗易懂地讲解极限的一般理论(即一般拓扑学中的网收敛理论的具体化)，试图把数学分析中见到的数列极限，函数极限（一元和多元函数极限），积分和的极限等各种极限都统一在这一般理论之下，使它们都成为特例，希望能使初学者对极限的本质有较深刻的认识.

§ 1　解决极限问题的若干方法

极限问题的类型和解决的方法都很多．由于篇幅所限，在本章里不可能把解决极限问题的各种方法都详尽地加以讨论，而是举一些比较典型的例题和习题，通过对这些例题的讲解，给读者一些启迪，希望从中归结出解决极限问题的一些方法．

我们先回顾函数极限的定义和基本性质，而数列极限具有类似的性质．

定义 1　设$\{a_n\}$是一个数列，a是一个确定的数，若对任$\varepsilon>0$，存在N（自然数），当$n>N$时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于a．a称为它的极限并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a\ (n\to\infty).$$

当数列$\{a_n\}$不以任何有限实数为极限时，称它为发散的．

定义 2　设$\delta>0$，记$U(x_0,\delta)=\{x\in \mathrm{R}\,|\,|x-x_0|<\delta\}$，称它为$x_0$的邻域．而$U^0(x_0,\delta)=\{x\in \mathrm{R}\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$，称为点$x_0$的空心邻域或去心邻域，或记为$U^0(x_0)$．

定义 3　设函数$f(x)$在x_0的某个空心邻域内有定义，A是一个确定的数．若对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称$f(x)$在x趋向于x_0时，以A为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

下面以函数极限为例叙述极限的性质.

定理 1（唯一性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则它是唯一的.

定理 2（局部有界性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则存在$x_0$的某个空心邻域$U^0(x_0)$，使得$f(x)$在$U^0(x_0)$内有界，即存在$M>0$，使$|f(x)|<M$，任意$x\in U^0(x_0)$.

定理 3（局部保号性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$（或$<0$），则对正数$r$（$0<r<|A|$），存在$x_0$的某空心邻域$U^0(x_0)$，使得对一切$x\in U^0(x_0)$恒有$f(x)>r>0$（或$f(x)<-r<0$）.

定理 4（不等式性质） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$皆存在，且存在$x_0$的某空心邻域$U^0(x_0,\delta)$，使得对一切$x\in U^0(x_0,\delta)$都有$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0} g(x).$$

定理 5（迫敛性） 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且存在$U^0(x_0,\delta)$使得对一切$x\in U^0(x_0,\delta)$，都有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)，则$$

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

定理 6（四则运算法则） 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$在$x\to x_0$时，极限也存在，且

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

又若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$x\to x_0$时，极限存在，且有

$$\text{(iii)}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

定理 7（归结原则或称海涅(Heine)定理） 设$f(x)$在某个$U^0(x_0)$有定义，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是：对任何以$x_0$为极限且含于$U^0(x_0)$的数列$\{x_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

证 必要性是显然的．仅证充分性．用反证法，倘若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$不存立，则存在$\varepsilon_0>0$，对任意$\delta>0$，存在$x$满足$0<|x-x_0|<\delta$，但有$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$．

设$f(x)$在$U^0(x_0,\delta')$上有定义，依次取$\delta=\dfrac{\delta'}{2}$，$\dfrac{\delta'}{2^2}$，$\cdots$，$\dfrac{\delta'}{2^n}$，$\cdots$，则存在相对应的$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$，$\cdots$，尽管

$$0<|x_n-x_0|<\frac{\delta'}{2^n},\ \text{但}|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0,\ n=1,2\cdots.$$

显然数列$\{x_n\}$含于$U^0(x_0,\delta)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，但它所对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$却不以$A$为极限，这与假设矛盾．]

定理 8（柯西(Cauchy)收敛准则） 设函数$f(x)$在$U^0(x_0,\delta')$内有定义，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充分必要条

件是：对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$ $(\delta<\delta')$，使当$0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

定理的证明放在§2.

柯西收敛准则既可判定极限的存在，也可判定极限不存在，学会使用它的否定形式是必要的.

设函数$f(x)$在x_0的某个空心邻域$U^\circ(x_0,\ \delta')$内有定义，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在的充分必要条件是：存在$\varepsilon_0>0$，对任意$\delta>0$ $(\delta<\delta')$，存在x'、x''，使得$0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$，但

$$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$$

定理 9 （1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

（2）$\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，特别$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

定义 4 称数列$\{a_n\}$是单调增的（或单调不减的），如果对于一切n，有$a_n\leqslant a_{n+1}$；称数列$\{a_n\}$是单调减的（单调不增的），如果对一切n，有$a_{n+1}\leqslant a_n$；称数列$\{a_n\}$是单调的，若它是单调增或单调减的，当$a_n<a_{n+1}$（$a_n>a_{n+1}$），对一切n，称数列为严格单调增（减）.

定义 5 非空数集E称为有上界，若存在常数M，对一切$x\in E$，有$x\leqslant M$，这时M称为E的一个上界．类似可以定义有下界．当数集E既有上界又有下界时，称为有界.

定理10 单调有界数列有极限.

定理的证明放在§2.

定义 6 设S是直线上的点集，ξ是一个定点（它可以属

于S，也可以不属于S），若ξ的任何邻域内都含有S的无限多个点，则称ξ是点集S的一个聚点.

定义 7 对于给定的数集E，若数η满足:

i) η是E的上界;

ii) 对任给正数ε，必存在E中的某个数x_0，使得$x_0>\eta-\varepsilon$，则称数η为数集E的上确界. 记作 $\eta=\sup E$ 或 $\eta=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$.

定义 8 对于给定的数集E，若数ξ满足:

i) ξ是E的下界;

ii) 对于任给正数ε，必存在E中的某个数x_0，使得$x_0<\xi+\varepsilon$，称ξ为E的下确界，记作$\xi=\inf E$ 或 $\xi=\inf\limits_{x\in E}\{x\}$.

定理11（确界存在原理） 非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

定理的证明放在§2.

定义 9 若$f(x)$是定义在R的子集E上的实值函数，a是E的聚点，称x趋于a时，$f(x)$以L为极限，若对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使对满足$0<|x-a|<\delta$的所有$x\in E$，有$|f(x)-L|<\varepsilon$. 仍记为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

定理12 设函数$f(x)$在数集E内单调不减，集合E以大于一切$x\in E$的数a（a有穷或正无穷）作为聚点. 若函数$f(x)$在E上有上界，则当$x\to a$时，函数有有穷的极限，当$f(x)$无上界时，$f(x)$趋于$+\infty$.

证 首先假设函数有上界. 即存在$M>0$，使$f(x)\leqslant M$，$x\in E$. 由定理11，$A=\sup\limits_{x\in E}\{f(x)\}$有穷.

对任意$\varepsilon>0$，有$x_0\in E$，使$x_0<a$且$f(x_0)>A-\varepsilon$. 由单

调性，当$x\in E$时，$f(x)\leqslant A+\varepsilon$. 取$\delta=a-x_0>0$，当$0<|x-a|<\delta$，$x\in E$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. 而当$a=+\infty$时，完全类似．当$f(x)$无上界时，类似可证． ］

可以重述这个定理，使适用于a小于E的一切数的情形，以及对于单调不增的函数的情形．

下面举例说明求解极限问题的若干方法．它们主要是根据极限的定义、运算法则和极限的性质定理，以及数学上的其它知识和技巧．

首先说明用追敛性定理求极限是简单而常用的方法．

例 1 证明 (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 (i) 当$a=1$时，等式显然成立．当$a>1$时，令$\sqrt[n]{a}=1+h_n\,(h_n>0)$，则

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>nh_n,$$

故 $0<h_n<\dfrac{a}{n}$，由追敛性定理，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1$.

$$\text{当}0<a<1\text{时，}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=1.$$

(ii) 设$\sqrt[n]{n}=1+h_n$，其中$h_n>0$，$(n\geqslant 2)$则

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n$$

$>\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$，即$0<h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\ (n\geqslant 2)$，由追敛性定

理，得

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0,$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n) = 1.$

例 2 求极限$\lim\limits_{\lambda\to 0+}\lambda\ln\left(e^{\frac{1}{\lambda}}+e^{\frac{2}{\lambda}}+\cdots+e^{\frac{n}{\lambda}}\right)$

解 当$\lambda>0$时，$e^{\frac{n}{\lambda}}\leqslant e^{\frac{1}{\lambda}}+e^{\frac{2}{\lambda}}+\cdots+e^{\frac{n}{\lambda}}\leqslant ne^{\frac{n}{\lambda}}$. 即 $e^n\leqslant\left(e^{\frac{1}{\lambda}}+e^{\frac{2}{\lambda}}+\cdots+e^{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\lambda}\leqslant n^{\lambda}e^n$. 令$\lambda\to 0^+$， 由追敛性定理可得

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{\lambda}}+e^{\frac{2}{\lambda}}+\cdots+e^{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\lambda}=e^n$$

由连续函数定义，知 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda\ln\left(e^{\frac{1}{\lambda}}+e^{\frac{2}{\lambda}}+\cdots+e^{\frac{n}{\lambda}}\right)=n.$

例 3 设$a_k(k=1，2，\cdots，r)$为固定正实数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_r{}^n}$.

解 令$a=\max\{a_1，a_2，\cdots，a_r\}$，则

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_r{}^n}\leqslant\sqrt[n]{r}\,a$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{r}=1$，由追敛性定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_r{}^n}=a. \quad]$$

例 4 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

证 令 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，则