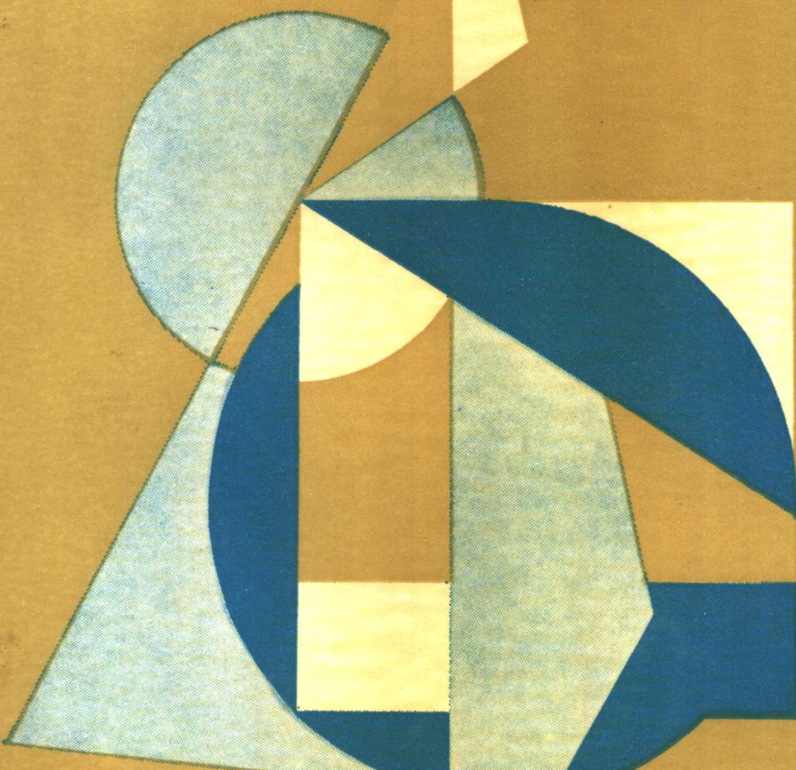
從傳統幾何到拓撲學



羅元祐著・香港萬里書店出版

從傳統幾何到拓撲學

羅元祐著

香港萬里書店出版

從傳統幾何到拓撲學

羅元祐著

出版者：香港萬里書店
香港北角英皇道486號三樓
(P. O. BOX 15635, HONG KONG)
電話：5-712411 & 5-712412

承印者：新華印刷股份公司
香港鰂魚涌華廈工業大廈四樓B座

定價：港幣二元八角

（一九七三年七月版）

目　　錄

一、幾　何

在現行數學的課程中，傳統幾何（Traditional Geometry）還要保留一些辯證的參考部分。所謂傳統幾何，就是基於紀元前三世紀時希臘數學家歐基理得（Euclid）的傑著「幾何原理」所編成。這部具有歷史性的古典數學巨著，一共有十三卷，是傳統數學（Traditional Mathematics）上第一次有系統的、有條理的，編輯古代數學而成的文獻。

由於時代科學的需要，幾何學的觀念，也曾發生很大的變化。正如德國科學家愛因斯坦(Einstein，1879—1955年)所指出歐氏幾何並不是測量空間的最好方法，因而產生「非歐幾何」。現代數學(Modern Mathematics)的幾何範圍中，除了部分的歐氏有限幾何（Definite Geometry）保留之外，就是非歐幾何的非量度幾何、投影幾何（Projection Geometry），以及拓撲學(Topology)、網絡（Net Work）等。

1. 非量度幾何

非量度幾何，是航空學的一部分重要知識。因爲在太空中航行，就要曉得點、綫、面以及「三維物體」的知識。所謂三維（Three Dimensions）就是長、濶、高。

在空間幾何裏面，點只不過是一個觀念而已，向來都未曾發現過幾何上的眞點，因此點只佔有一個理想的位置而沒有大小，即使新的幾何學也是把「點」這個數學名詞作爲一個未下定義的名詞（Undefined Term）。雖然這樣，在幾何空間裏面却充滿着無數的點，於是空間便成爲無數之點的「宇集」（Universal Set）。

綫也是無數之點的集合，它有位置、有長度，但仍然沒有大小，所以在理想中，兩綫段相交，只有一理想之點。一條綫，無論它是直綫抑或曲綫，都是無限之點的集合。

至於面（一般的平面），却有兩個量度：即是長與濶，但依然沒有厚度，因此面在空間幾何中，也具有看不到的特性，於是面也是一個理想的無限點的集合。

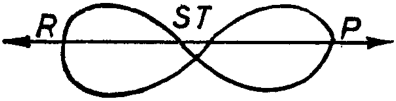


圖 1

如圖1所示，是一封閉曲綫（一個圓或多邊形，都屬於封閉曲綫），作爲一平面看，即可分成三個點的集合：曲綫內、曲綫外和曲綫界限上。從曲綫內的一點到曲

綫外的一點，那界限是這一點走向界外的必經之路。當一直綫穿過一平面上的一封閉曲綫時，穿過的諸點是該二集合的交集（Intersection）的元素（Element）。所謂交集就是兩綫集合相交之處，換句話說，這是一理想之點，是它們之間唯一的共同元素，通常用「∩」表示交集。

假設：封閉曲綫「∞」代表集A；

直綫　　　　　代表集B；

直綫經過封閉曲綫界限交點爲集R，S，T和P；

交集R之唯一元素爲r；

交集S之唯一元素爲s；

交集T之唯一元素爲t；

交集P之唯一元素爲p。

則　　$B \cap A = \{r, s, t, p\}$

由此可見一個平面可分爲三個區域（Regions），而一個區域，也可看作一個諸點的無限集合；即是：

（1）　平面內部爲一區域；

（2）　限界（Boundary）爲另一區域；

（3）　界外又另一區域。

由點、綫、面，發展而爲「三維空間」，如圓球體或正立方體之類，其封閉面也將空間分爲三個點的集合：

（1）　封閉面內；

（2）　封閉面外；

（3）　限界（即封閉面上）。

從封閉面內一點至面外的一點的路徑，也必要經過限

界。當兩平面相交時，其交集爲一綫；如圖 2 所示之長方立體，面A與面B相交成一綫m，此一綫即爲A與B之交集，餘可類推。

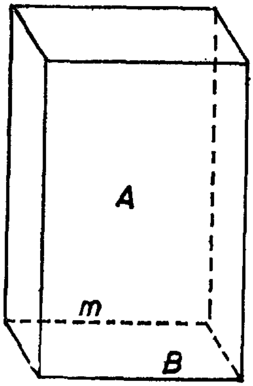


圖 2

當一平面與一封閉面相交時，其交集可能只有一點而已；如圖 3 所示之球面與一平面之交集，這球面爲一封閉面，其與平面相交，只有一點 P。

一面與一長方立體相交，其交集爲 4 綫之集合；如圖 4 所示，這長方立體R與平面A相交，其交集爲 4 綫 a,b,c,d之集合。

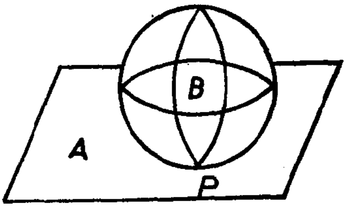


圖 3

一點塵可以代表一條綫的集合中的一個元素，當光由一眼小孔射入黑房裏面，我們即可看見其中的光綫，有無數的塵點排成綫段。這樣的綫段，精確地顯出了它的長度；其實兩點不同位置的塵亦可以決定一綫段。如果三個點的位置不同在一直綫上便可決定一個三角形和三角形內的點，如四個點的位置如果不在同一平面內，也可以聯成一個四面體，即是由四個三角形組成的金

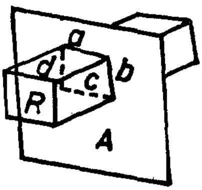


圖 4

字塔形四面體。

由上面的實驗，便可明白由點至綫（一向度），由綫至面（二維空間），又由面發展而爲立體（三維空間）。上面所說的金字塔形四面體，也是點的集合。而且點、綫、面也可以構成其他一切的多面體。

2. 投影幾何

投影幾何（Projection Geometry）是一種「實驗幾何」，在實驗進行中，工作上顯得非常有趣而精確，當時導師把假定的圖形畫在幻燈片上，然後由幻燈機映射至平面的銀幕上，或作其他類似的投射，而且可以從許多不同的角度來映射，經過許多次投影的變換，便從每一個投影中尋出有那些性質是保留不變的，這才是最精確的結論。

事實上物體照射而投影於一平面上，這影像的每一點都與實物上的每一點作一一對應。凡是物體的影子，都是投影幾何中要認識的一部分。這個影子的長短與大小固然受物體所在之位置以及它擺設的狀態而決定。在量度幾何（傳統幾何）中，往往要注意物體之長短與大小，但在投影幾何中，却不需要注意這方面的問題。因爲投影幾何實驗之目的，在乎求出一件物體在諸多變換的位置與角度之下，其投影上那些性質却是保留不變的。這些不變的性質，就是投影幾何中最精確的結論。因此理想的航空綫（Air Line）以及最新的建築學，也運用投影幾何的原理

去繪畫圖則，以適應諸多變幻的自然現象；投影幾何的精確的結論，也可以說是一種自然規律。

二、拓 撲 學

由非量度幾何的圖形與「集合」的關係，其點、綫、面、三維物體的基本概念，以及投影幾何的精確結論，發展而爲拓撲學（Topology），一個數學的分支。拓撲學是另一種有趣的非量度幾何，是一種同胚變換而不變量的學問。例如一個封閉曲綫是用橡膠製成的，它便有伸縮性，可以任意拉長或壓縮，甚至把它扭轉，以至變成奇形怪狀，這當然與原形大小不同，但其「點集合」之量却是一樣，所以稱它做「同胚變換而不變量」。又如一條簡單的封閉曲綫可變成一個正方形的周界或一個圓形的周界。雖然正方形的周界有四個直角，而圓周亦有圓心與其無數等距的半徑，但從集的觀念看來，這種周界和簡單的封閉曲綫，都是同性質的封閉綫而已。關於同胚變換而不變量的精確結論，就是任何封閉面，是將空間分爲三個點的「集合」：

（1）封閉面內，

（2）封閉面外，

（3）限界（封閉面上）。

所以從拓撲學的觀念看一隻咖啡杯與環狀小泡餅，是同胚

的圖形。試看圖 5 的幾個怪圖形，它們都是同胚的一個封閉曲綫。圖 5 所示的五個圖形，因爲它們並沒有新的附貼

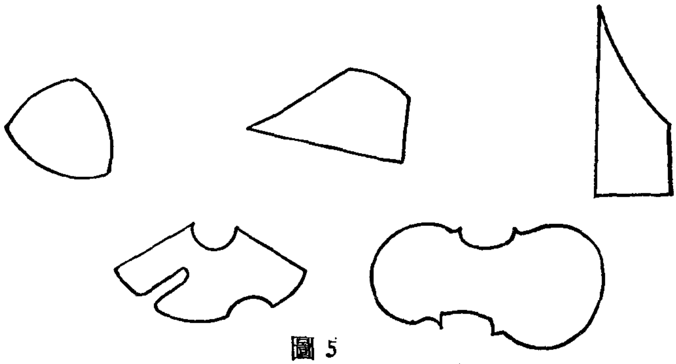


圖 5

關係(Attachment)。變來變去也不出三個區域上的點集合，所以拓撲學也叫做橡膠面幾何(Rubber Geometry)。所謂附貼關係，必須把兩點貼合在一起而有了兩曲綫的交集，同時產生出四點的集合；因此我們不能把圓形變成∞的曲綫封閉面。圖 6 所示的三個封閉曲綫，都不是同胚的

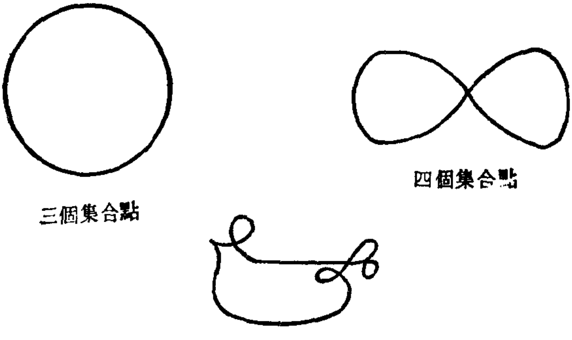


圖 6

圖形。所有同胚變換而不變量的性質，皆爲「拓撲性質」；而附貼關係（包括點、綫、面等之附貼）就是最基本和最普遍的拓撲性質之一。

圖 6 的三個拓撲圖形中：第一個是圓形，是一個簡單封閉曲綫，其圓的內部爲一集合點，圓外又一集合點，圓周（限界）也是一個集合點，即一共有三個集合點。第二個是由兩個簡單封閉曲綫相交而成，它有新的附貼關係（一交點），即一共有四個集合點。第三個是由五個簡單封閉曲綫構成，它有四個新的附貼關係（四交點），即一共有七個集合點。

1. 摩比烏絲帶（Moebius Strip）

摩比烏絲帶是拓撲學的基本圖形之一。如圖 7 所示，把紙條A B C D 扭轉過來，然後連結頭尾兩端，就變成一條摩比烏絲帶。這是十九世紀中葉德國幾何學家摩比烏絲（Moebius）用來表現拓撲學中二維單面連通的理論的實驗。照一般沒有扭轉的紙圈看來，一點 P 從紙圈內圍走到外圍，必要跨過限界，但一經扭轉過來，這個摩比烏絲帶上的 P 點，只要沿着虛綫直走，自然會走到背後的外圍而

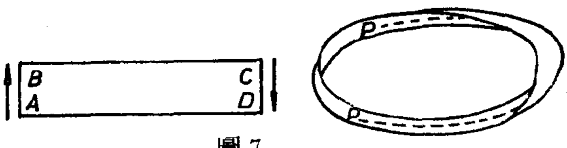


圖 7

不必要跨越限界，因爲它只有一邊面，便稱爲單路連通。如果用帶的中間，沿着與邊平行的方向來剪開這條帶，結果剪出來的不是兩條帶，而是一條新的摩比烏絲帶，但只得原來的一半濶，長却是兩倍。

2. 克萊茵曲面 (Klein Bottle)

克萊茵曲面亦是拓撲學的基本圖形之一。把兩個摩比

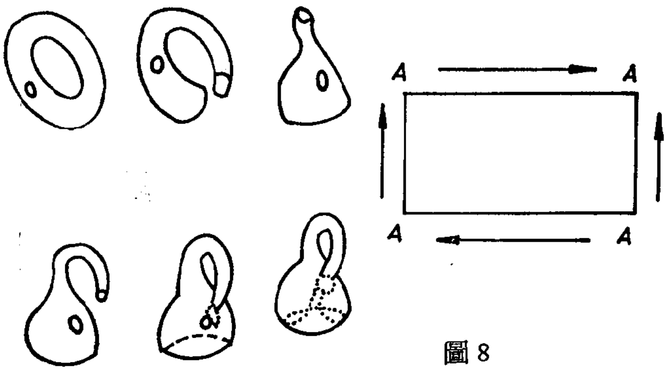


圖 8

烏絲帶沿着邊界黏合起來便構成克萊茵曲面。又可以把一個環面剪續成克萊茵曲面，如圖 8 所示，先在環面上打一個孔，然後在離孔較遠的地方截斷這個環面，再把其一之截斷口插入那個孔內，並將這截斷口與另一截斷口從其內側邊緣黏合起來，便完成一個三維的克萊茵曲面。

由此可知，克萊茵曲面也是單側曲面（即單面的曲

面）。但是摩比烏絲帶是二維的，而克萊茵曲面却是在三維空間裏的。從拓撲不變量來看，克萊茵曲面是沒有邊緣的，它只有一個面，而其連通階却是 2 。

3. 環　面 (Torus)

環面亦是拓撲學的基本圖形之一。從前我們學立體幾何的圓環部分，我們也學過求它的環面面積和它的體積。如圖 9 所示 A 代表環的內半徑，B 代表外半徑，那麽

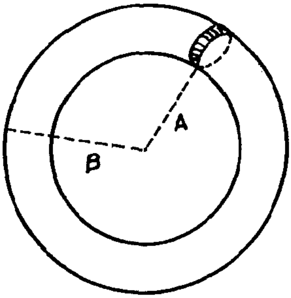


圖9

(i)　體積 $=\frac{1}{4}\pi^2(A+B)(B-A)^2$

(ii) 環面積 $=\pi^2(B^2-A^2)$

但現在我們要求出環的拓撲不變量。由圖10所示的直觀圖形，我們知道環面也是一個單側曲面，也就是說，它只有一個面。其次，　它是沒有邊緣的。　但它的連通階是多少呢？ 從圖10中我們可以在環面上找到兩條封閉曲綫的分割（如圖中虛綫所示）。按照情形，它們分割環面，還不致於把它分割爲兩塊互不聯接的部分。如圖10所示，在 A 點之封閉曲綫分割，可把環形變成了一個彎曲的圓筒形；再在 B 點之封閉曲綫分割，把圓筒形變成了一個四邊形。但是環面上不存在三條共同不截開這個曲面的閉曲綫，所以環面的連通階等於 2 。

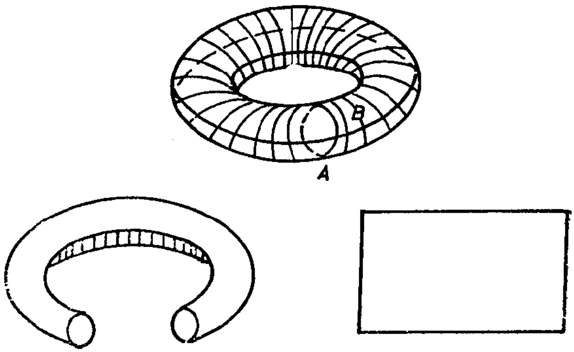


圖10

4. 地圖色數問題

除了上述三個有關拓撲學的基本圖形之外，在拓撲學裏面，地圖色數問題也是有趣而重要的問題之一。現在把與這問題有關的各種概念，分述如下：

A. 鄰接

要解決地圖之着色問題，我們就要把「鄰接」的概念加以討論。這裏所指的鄰接，是兩個區域須有一共同的界綫，而不是只在一點的相接。

當然，綫段與綫段也可鄰接。例如：一條綫是可以分爲二段（有時也叫這二段爲二個區域）相鄰接，於是這二段綫就有一共同之點。再進一步說，立體圖形（簡稱體）的鄰接，是指兩個立體須有一個共同面。至於任何兩個須共有一面的立體最多能有幾個呢？我們說，在某一種特定

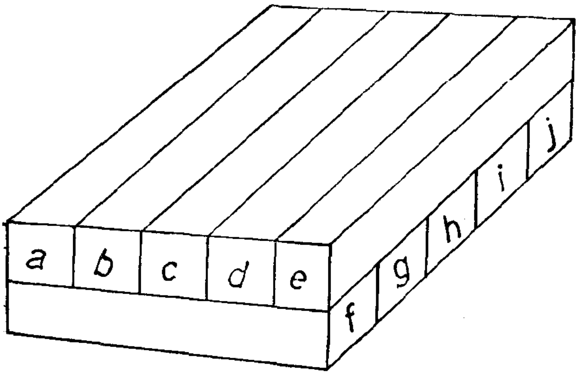


圖11

的情形下，這樣的立體的數目是無窮的。如圖11所示，若每個體都是相同的條狀長方體，縱橫並排地疊起來，那麽每兩體都不是鄰接嗎？

至於組合的形態，却有下列三種：（1）表示一個區域被另外三個所包圍；（2）表示兩個區域被另外兩個所包圍；（3）表示三個區域被第四個所包圍。由此可見每兩個相鄰接的區域最多時只能有四個，如圖12所示。

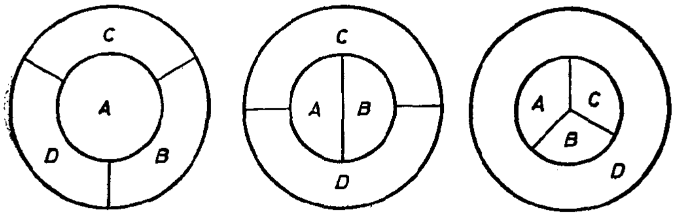


圖12