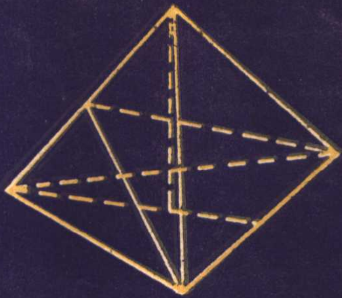

时承权　李荣生　编

高中数学错解分析

黑龙江教育出版社

高中数学错解分析

时承权　李荣生　编

黑龙江教育出版社
1985年·哈尔滨

责任编辑：孙怀川
封面设计：贺新录

高中数学错解分析

Gaozhong Shuxue cuojie fenxi

时承权　李荣生　编

黑 龙 江 教 育 出 版 社 出 版
（哈尔滨市道里森林街 42 号）
黑龙江新华印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 8 14/16 · 字数 169,000
1985 年 1 月第 1 版　　1985 年 1 月第 1 次印刷
印数 1— 40,500

统一书号：7357 · 4　　定价：1.15 元

前　　言

任何人解数学题，都难免发生错误。这些错误的原因大致可以分两类：一类是计算马虎；另一类是对基础知识的理解不准确。对于第一类错误，如果解题时细心，就会避免。而对于第二类错误，则必须加以分析，找出产生错误的原因，才能改正。

本书所选的错例均属第二类，都具有典型性。其中，有些是编者在多年的教学实践中积累的，有些是在近几年高考或数学竞赛试卷中发现的，还有些是各种书刊中发生的。

有经验的人都知道，仅仅依靠正面学习知识是不够的，如果选择一些典型的错例加以分析，进行正误对比，就能够形成鲜明的对照，这样既可以防止发生同类错误，又可以从反面加深对知识的理解。另外，分析产生错误的原因，找到改正的方法，就能够提高解题的能力。因此运用反例是教与学中不可缺少的重要手段。本书就是为教与学提供一些典型的错例而写的。

本书的写法是：对每个例题先写出错误解法，再进行错误分析，指出错误所在，分析产生错误的原因，最后给出正确的解法。在每个单元的最后，附有研究题，提供若干题目的错误解法，要求读者自己找出错误所在及分析错误的

原因。

本书可供自学高中数学的青年和普通中学、业余中学、中等专业学校的师生阅读和参考。

编　者

目　　录

一、关于三角变换的错例

在三角的计算及证明问题中，总是要进行一系列的三角变换。三角变换的依据是：有关三角函数的基本概念，诱导公式，和差倍半公式，和差化积公式，积化和差公式。在变换过程中，要正确地运用概念和公式，防止发生下列错误：

1. 防止发生条件不同，套用公式结论的错误。

任何三角公式都是有条件的，使用公式，必须严格遵守这些条件。条件不一样，形式地套用公式就会导致错误的结论。当然，随意改动公式的结论也是不行的。

如 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$成立的条件是：$\alpha\in R, \alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \alpha+\beta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 $k\in Z$。

如公式 $\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$，不能随意改成 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\leqslant\sqrt{2}$。

2. 防止发生违反正、余弦值域的错误。

正、余弦都是有界函数。解题时要注意：$|\sin\alpha|\leqslant 1$，$|\cos\alpha|\leqslant 1$，$|\sin\alpha+\cos\alpha|\leqslant\sqrt{2}$，$|\sin\alpha\cos\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}$。

3. 防止发生遗漏轴线角的错误。

因为象限角不包括轴线角（终边落在坐标轴上的角），所

以解题过程中，如需将角划分为象限角、轴线轴来讨论时，不要忽略轴线角。

另外下列说法也不确切："α是第一、二象限角时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角；α是第三、四象限角时，$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角。"

事实上，当$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$或$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$，$(k\in Z)$时，$k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}$或$k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{2}$。即当$k$为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角；当$k$为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角。

4. 防止发生用必要但非充分条件推证结论的错误。

例如，$\alpha=\beta\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta$是成立的，但是由$\sin\alpha=\sin\beta$是推不出$\alpha=\beta$的。所以$\sin\alpha=\sin\beta$是$\alpha=\beta$成立的必要但非充分条件。因此，由$\sin\alpha=\sin\beta$推出$\alpha=\beta$，就是犯了用必要条件推出结论的错误。当然，由$\sin\alpha=\sin\beta$，附加相应的条件（如$\alpha$、$\beta$都是锐角）之后，再推出$\alpha=\beta$是可以的。

5. 防止发生因乘以零（或除以零）而破坏恒等变形的错误。

在三角变换中，如将一个分式的分子、分母乘（除）以某个三角函数式，或将一个等式的两边乘（除）以某个三角函数式时，必须保证这个三角函数式的值存在并且不等于零。对于不能确定是否为零的式子，应划分为零和不为零两种情况来讨论。如果忽略这一点，就会发生论证不严密的错误。

6. 防止发生分类不周的错误。

某些问题的证明，有时需要划分为若干种情况来证明。划分情况时，需要做到不重不漏，否则也会发生论证不严密的错误。

如在$\triangle ABC$中，欲证$a=2R\sin A$，就需要将角A划分为①锐角；②直角；③钝角。三种情况来证明。

7. 使用逆证法，要防止发生“不可逆”的错误。

逆证法的最后一句话中的“推理的每步可逆”不是写出来摆样子的，必须是每一步真正可逆，否则证明无效。因此，使用逆证法，应该对推理过程进行认真的检查，验证每一步确实可逆之后，才能写这句话。

8. 防止发生违反绝对值定义的错误。

在三角函数、对数函数或其它方面需要化去绝对值符号时，一般有三种情况：一是绝对值符号内的式子为正（或非负），这个绝对值就等于该式本身；二是绝对值符号内的式子为负，这时的绝对值等于该式的值的相反数；三是绝对值符号内的式子可正可负，这时应将原式中字母的取值范围重新划分，使之符合上述两种情况。

9. 防止发生“偷换论题”的逻辑错误。

在证明过程中，“论题”应该始终一致，不能中途改变。也就是论题的“条件”或“结论”都不能改变，否则就要犯“偷换论题”的错误。

10. 防止发生“循环论证”的逻辑错误。

如果发生：（1）用甲命题推出乙命题，而又用乙命题推出甲命题；

（2）用一个命题本身来证明这个命题；

（3）用一个命题的逆否命题来证明原命题，三种情形之一，就是犯了“循环论证”的错误。

例 1　$\triangle ABC$ 中，若 $a\cos A=b\cos B$，问 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形？

错误解法：∵　$a\cos A=b\cos B$，

∴　$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$.

由正弦定理，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}，即\quad \frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}.$$

故　$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

$2\sin A\cos A=2\sin B\cos B$，

$\sin 2A=\sin 2B$，

∴　$2A=2B$，从而 $A=B$.

所以，$\triangle ABC$ 是等腰三角形。

错误分析：$\sin 2A=\sin 2B$ 是 $2A=2B$ 的必要但非充分条件。由 $\sin 2A=\sin 2B$ 能推出 $2A=2B$ 或 $2A+2B=180°$（∵A、B 是三角形的内角）。所以原解答有误。

正确解法：推导 $\sin 2A=\sin 2B$ 同原解法。

∵　$\sin 2A=\sin 2B$，

∴　$2A=2B$，或　$2A+2B=180°$.

即　$A=B$，或　$A+B=90°$.

故$\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形。

例 2　三角形的三边分别为a、b、c，试求$\sin A$，这里A是a边的对角。

错误解法：假定b、c所对的角分别为B、C，由正弦定理，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

根据更比定理，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{ac}{b}.$$

错误分析：由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，不顾$\dfrac{a}{\sin A}$，就把$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$换成了$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$，所以得出了错误的结果。

实际上，由$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$能推出$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$，但是它们不再等于$\dfrac{a}{\sin A}$了。

正确解法：$\because\quad S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A,$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{2}{bc}S_{\Delta ABC}.$$

如果三角形的半周长$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，那么$S_{\Delta ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。从而有

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

例 3 (1) 证明：对于任意实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模 $r=|z|$ 适合 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$。

(2) 当实数 t 取什么值时，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的幅角的主值适合 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$？

错误解法：(1) 复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的模 $r=|z|$ 为 $r=\sqrt{(\sqrt{|\cos t|})^2+(\sqrt{|\sin t|})^2}$

$$=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}.$$

$\because\quad \sin t+\cos t\leqslant\sqrt{2}$，$\quad\therefore\quad |\cos t|+|\sin t|\leqslant\sqrt{2}$。

$\therefore\quad r=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}\leqslant\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$。

(2) 设 $\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，

则 $\quad r\cos\theta=\sqrt{|\cos t|}$， ①

$\quad r\sin\theta=\sqrt{|\sin t|}$。 ②

$\because\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\quad\therefore\quad \cos\theta\neq0$。

② ÷ ① 得 $\quad \operatorname{tg}\theta=\sqrt{|\operatorname{tg}t|}$。

$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\Rightarrow0\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant1\Rightarrow\sqrt{|\operatorname{tg}t|}\leqslant1\Rightarrow|\operatorname{tg}t|\leqslant1\Rightarrow-1\leqslant\operatorname{tg}t\leqslant1\Rightarrow k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$，$(k\in Z)$。

错误分析：(1) $|\cos t|+|\sin t|$ 不同于 $\sin t+\cos t$，所以不能套用结论 $\sin t+\cos t\leqslant\sqrt{2}$。

(2) 由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\Rightarrow0\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant1$ 是对的，但是由 $0\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant1$

却不一定能推出 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$。所以原解法不能保证当 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$ 时一定有 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$。

正确解法：(1) $r=|z|=\sqrt{(\sqrt{|\cos t|})^2+(\sqrt{|\sin t|})^2}$

$$=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}.$$

设 $m=|\cos t|+|\sin t|$，则 $m^2=1+|\sin 2t|\leqslant 2$。

$\therefore$ $m\leqslant\sqrt{2}$，$r\leqslant\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$。

(2) 推导 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{|\operatorname{tg}t|}$ 同原解法。

因为复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$ 的实部与虚部都是非负数，所以 z 的幅角主值 θ 一定适合 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$。在此条件下有

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\Longleftrightarrow 0\leqslant\operatorname{tg}\theta\leqslant 1\Longleftrightarrow 0\leqslant\sqrt{|\operatorname{tg}t|}\leqslant 1\Longleftrightarrow|\operatorname{tg}t|\leqslant 1\Longleftrightarrow -1\leqslant\operatorname{tg}t\leqslant 1\Longleftrightarrow k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4},\ (k\in Z).$$

$\therefore$ 当 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$，$(k\in z)$ 时，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$。

例 4 求证：$\operatorname{tg}x+\sec x=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi\right)$。

错误证法：

$$\text{左边}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}$$

$$=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\Big/\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\Big/\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right) \quad ①$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)\Big/\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \quad ②$$

$$=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)\Big/\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

错误分析：由①到②这步，分子、分母需要同除以 $\cos\frac{x}{2}$。由于使等式有意义的 x 的可取值范围内，有 $\cos\frac{x}{2}=0$ 的可能，因而这个证明是不严密的。

正确证法：(1) 当 $\cos x\neq 0$ 时，证明同原证法。

(2) 当 $\cos\frac{x}{2}=0$ 时，有 $x=(2n+1)\pi \quad (n\in Z)$，此时，

$\operatorname{tg}x+\sec x=0+(-1)=-1$，$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi\right)=-1$。

$\therefore \quad \operatorname{tg}x+\sec x=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\pi\right)$。

综合(1)、(2)可知原等式成立。

例 5 已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 为 $x^2+px+q=0$ 的两根，求 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ 之值。

错误解法：根据一元二次方程的根与系数的关系，由已知条件得 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-p$ 和 $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=q$，从而

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=-\frac{p}{1-q}.$$

$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q]$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)}[\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)+p\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{1}{1+\frac{p^2}{(1-q)^2}}\left[\frac{p^2}{(1-q)^2}-\frac{p^2}{1-q}+q\right]=q.$$

错误分析：在由 $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=-p$ 和 $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta=p$ 得出 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{-p}{1-q}$ 时，必须附加条件 $q\neq1$。原解法中忽略这一点，是不严密的。

正确证法：(1) 当 $q\neq1$ 时，同原证法。

(2) 当 $q=1$ 时，从 $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta=1$，可得 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$，即 $\cos(\alpha+\beta)=0$，从而 $\sin^2(\alpha+\beta)=1$。

$$\therefore\quad \sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=1.$$

综合(1)、(2)可得

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q.$$

例 6 已知直线的倾斜角 x 满足方程

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x},$$

求此直线的斜率与倾斜角。

错误解法：原方程变形为

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}.$$

即 $$\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}.$$

因此，直线的斜率为 $k=-\frac{4}{3}$，倾斜角为

$$x=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

错误分析：倾斜角 x 的取值范围是 $0\leqslant x<\pi$，在此范围内 $\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ 不一定成立。因而推出的结果是没有根据的。

错误原因是忽视了倾斜角 x 的取值范围及算术根的定义。

正确解法：

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|-\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|.$$

$$\because \quad 0\leqslant x<\pi, \quad \therefore \quad 0\leqslant\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

在 $0\leqslant\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$ 范围内，$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}>0$，但 $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$ 可正可负，故需要分成 $0\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$ 来讨论。

(1) 当$0\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$时，$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}>0$，

$$\therefore\quad \sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=0.$$

$\therefore\quad x=0$，$\mathrm{tg}x=0$。即直线的斜率和倾斜角都是零。

(2) 当$\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$时，$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}>0$，

$$\therefore\quad \sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}.$$

$$\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2},\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=2.$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}x=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=-\frac{4}{3}.$$

因此直线的斜率$k=-\frac{4}{3}$，倾斜角为$\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$。

例 7 证明：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

错误证法：在直角坐标系xoy内，作单位圆O。设α角的始边重合于ox轴，终边交圆O于A；β角的始边重合于ox轴，终边交圆O于B（如图1.1)。这时，A，B两点的坐标分别是$(\cos\alpha,\sin\alpha)$和$(\cos\beta,\sin\beta)$。由两点间距离公式，得

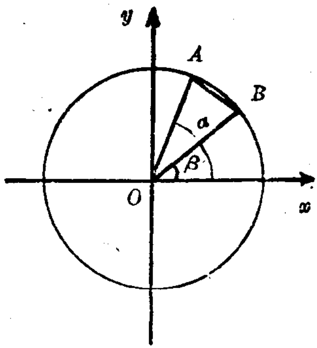

图 1.1