

DARK
HORSE
maths

◆ 新课标 ◆



初中版

数学黑马

因式分解与分式

崔首诗 ◇ 主编

- 名师名题
- 专项突破
- 优化复习



吉林人民出版社

初中版

数学黑马

CHUZHONGBAN SHUXUE HEIMA

简单的数与式——有理数与整式

一次方程与不等式

图形世界——点、线、面

● 因式分解与分式

三角形

数的开方与二次根式

四边形与相似形

二次方程

解直角三角形

函数及其图象

统计初步

圆



责任编辑 崔 凯

装帧设计 瑞峰祥工作室

ISBN 7-206-04057-8



9 787206 040573 >

ISBN 7-206-04057-8

G · 1458 定价:8.50 元

◆ 新课标 ◆



初中版

数学黑马

因式分解与分式

崔首诗 ◇ 主编

吉林人民出版社

因式分解与分式

主 编:崔首诗

责任编辑:崔 凯

电 话:0431-5649704

封面设计:瑞峰祥工作室

责任校对:宋 春

吉林人民出版社出版 发行(长春市人民大街 4646 号 邮政编码:130021)

印 刷:长春市康华彩印厂

开 本:850mm×1168mm 1/16

印 张:8.5 字数:227 千字

标准书号:ISBN 7-206-04057-8/G·1458

版 次:2004 年 1 月第 1 版

印 次:2004 年 1 月第 1 次印刷

印 数:1-10 000 册

定 价:8.50 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

丛书主编:崔首诗

副主编:沙敬红 牟玉华 吴轶兵

编写:郝艳 孙子晴 尹振彬

王晓东 程云穆 刘大治

王铁军 孙红艳 澎松

金海 宋春 孙明佶

齐夏 那海涛 吴志明

孙勇 宿建扬 何汇川

孙宇泽 张力杰 于建华

编者前记

《专项突破》类丛书在浩如烟海的教辅图书中何以能够备受青睐且长销不衰?

所谓“专项”,其特点在于“专”,改变普遍教辅图书“面面俱到”的模式,以学科知识为核心,能力训练为基础,对相关知识进行优化整合,使学生在融会贯通的基础上形成研究性学习。“专项”书的创作空间于理论上深入浅出,于学法上实用灵活,让学生在理解的基础上有所提高,在提高之中实现创新。

本套丛书的特色是什么?

本套书针对数学的各个板块进行科学有序地组合,对每一专题均由浅入深,由表及里地进行系统归纳,不同年级学生可以有针对性地选择,在最短时间内对某一板块知识学精学通。

图书清晰实用的体例:

1. 言简意赅的专项知识剖析
2. 少而精的经典试题讲解
3. 基础与能力的专题突破

在课程改革的大潮之中,丛书的适应性如何?

在目前教材版本与内容不稳定的状况下,本书克服了其他图书“完全同步性”不灵活的弱点,同时又对“同步性”有一定的辅助作用,适用面广。本书尽最大可能体现了新课标人教版、北师大版、华东师大版的课改理念,增强了原有“专项”的人文意识和科学内涵。

第一讲 因式分解

- 一 提公因式法 / 1
- 二 运用公式法 / 12
- 三 分组分解法 / 23
- 本章综合测试 / 34

第二讲 分 式

- 一 分式的基本性质 / 38
- 二 分式的乘除法 / 49
- 三 分式的加减 / 63
- 四 含有字母系数的一元一次方程 / 75
- 五 可化为一元一次方程的分式方程及其应用 / 82
- 本章综合测试 / 93

中考链接 / 97

参考答案 / 102





第一讲 因式分解

一 提公因式法

知识点讲解

■学习目标

1. 正确理解因式分解的意义及它与整式乘法的区别和联系.
2. 能够用提公因式法把多项式进行因式分解.

■重点、难点和考点

重点:运用提公因式法分解因式

难点:理解因式分解的意义;公因式的确定.

考点:主要考查利用因式分解解一元二次方程,在因式分解的各种方法中,提取公因式法是最基本的也是最重要的因式分解的方法,有时也单独考查提公因式法分解因式.

■知识点剖析

1. 正确理解因式分解要注意四点

(1) 因式分解是整式乘法的逆变形(不是逆运算). 如 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 是整式乘法,而 $ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d)$, 则是因式分解,可利用整式乘法来检验分解结果是否正确.

(2) 因式分解对象就是多项式,如把 x^2y 分解为 $x \cdot x \cdot y$ 不是因式分解,因为 x^2y 不是多项式,把 $\frac{1}{x^2} - 1$ 分解为 $\left(\frac{1}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ 也不是因式分解,因为 $\frac{1}{x^2} - 1$ 也不是多项式.

(3) 因式分解的结果一定是乘积形式. 如 $x^2 - 8x - 9 = x(x+8) - 9$ 不是因式分解,因为 $x(x+8) - 9$ 不是乘积的形式.

(4) 因式分解结果中的每一个因式都必须是整式. 如 $x - 1 = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ 不是因式分解,因为结果中 $\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ 不是整式.

2. 提公因式法

(1) 公因式:

多项式中每一项都含有的因式,叫公因式.

(2) 公因式的构成:

- ① 系数——各项系数的最大公约数;
- ② 字母——各项都含有的相同字母;



③指数——相同字母的最低次幂.

(3)提公因式法的关键是正确找出公因式:

提公因式法的步骤:第一步,找出公因式,第二步提出公因式,当一个多项式公因式正确找出后,需要提公因式,此时可用原多项式去除以公因式,所得的商即是提出公因式后,剩下的另一个因式.

例如分解因式: $9x^3y - 12x^2y^2 + 18x^2y^3z$.

公因式为: $3x^2y$

则 $(x^3y - 12x^2y^2 + 18x^2y^3z) \div 3x^2y$

$= 3x - 4y + 6y^2z$

所以有 $9x^3y - 12x^2y^2 + 18x^2y^3z = 3x^2y(3x - 4y + 6y^2z)$

(4) 当一个多项式提出公因式后,括号里再也不能提出式子来了.



名题精析

例1 下列各式由左边到右边的变形哪些是因式分解,哪些不是?

$$(1) x^2 + x = x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$(2) a^2 - 17 = (a + 4)(a - 4) + 1$$

$$(3) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(4) x^2y + xy^2 = xy(x + y) = x^2y + xy^2$$

$$(5) -9 + x^2 = (3 + x)(x - 3).$$

精析 因式分解的定义是把一个多项式化为几个整式的积的形式;(1)题虽然也是积的形式,但 $1 + \frac{1}{x}$ 不是整式;(2)题结果是 $(a + 4)(a - 4)$ 与1的和的形式,而不是积的形式;(3)题是整式的乘法,与因式分解运算刚好相反;(4)题分解到半路又做乘法算回去了;(5)题则以定义去衡量,完全符合,故只有(5)题是因式分解.

解 (1)(2)(3)(4)都不是因式分解;(5)是因式分解.

点评 解此类题要从因式分解的定义出发,把一个多项式化为 n 个整式的积的形式,不能出现分式.

例2 分解因式: $a(x - 2)^2 - (2 - x)^3b$.

精析 此多项式由两大项组成,即 $a(x - 2)^2$ 和 $-(2 - x)^3b$,并且注意到 $-(2 - x)^3b$,提出一个负号后就变成 $(x - 2)^3b$,于是公因式就找到了.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & a(x - 2)^2 - (2 - x)^3b \\ &= a(x - 2)^2 + (x - 2)^3b \\ &= (x - 2)^2 \cdot [a + (x - 2)b] \\ &= (x - 2)^2(bx + a - 2b) \end{aligned}$$

点评 多项式中的公因式,有些比较简单,有些则比较复杂,需要进行一些变形才能发现公因式,但不能生搬硬套,记住下面结论是有益的.

当 n 为奇数时, $(x - y)^n = -(y - x)^n$

当 n 为偶数时, $(x - y)^n = (y - x)^n$.

例3 分解因式: $2x(x-y)^3 - x^2(x-y)^2 + xy(y-x)^2$.

精析 提取公因式要彻底,并且要一次完成,不能分成几次去提取公因式,在提取公因式后,要把每个因式内部化简,相同因式要写成幂.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 2x(x-y)^3 - x^2(x-y)^2 + xy(y-x)^2 \\ &= 2x(x-y)^3 - x^2(x-y)^2 + xy(x-y)^2 \\ &= x(x-y)^2[2(x-y) - x + y] \\ &= x(x-y)^2(x-y) \\ &= x(x-y)^3 \end{aligned}$$

点评 要注意使用公式 $(x-y)^{2n} = (y-x)^{2n}$, $(x-y)^{2n+1} = -(y-x)^{2n+1}$.

例4 分解因式: $-4m^3 + 16m^2 - 4m$.

精析 (1) 多项式的第一项的系数是负数时,一般要提出“-”号,使括号内的第一项是正的,在提出“-”号时,多项式的各项都要变号.

(2) “1”作为项的系数,通常省略不写,但单独成一项时,它在因式分解时不能漏掉.

$$\text{解} \quad -4m^3 + 16m^2 - 4m = -4m(m^2 - 4m + 1).$$

例5 证明 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.

精析 欲证 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除,只要证明 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能分解出“45”这个因式即可.

$$\because 81 = 3^4, \therefore 81^7 = (3^4)^7 = 3^{28}. \quad \because 27 = 3^3, \therefore 27^9 = (3^3)^9 = 3^{27}, \quad 9^{13} = (3^2)^{13},$$

$\therefore 81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26}$. 显然 3^{26} 是此算式中各项的公因式,提出公因式再计算即可.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \because 81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} \\ &= 3^{26}(3^2 - 3 - 1) \\ &= 3^{26} \times 5 \\ &= 3^{24} \times 3^2 \times 5 \\ &= 3^{24} \times 45 \end{aligned}$$

$\therefore 81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.



基础过关题

一、填空题

- $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$ 是表示_____与_____相乘,其结果是_____,这是_____运算.
- $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ 则是把多项式_____化为_____与_____的积的形式,这是_____.
- 把一个_____化成_____的形式,叫做_____.
- 填上适当的符号:① $-2x+y = \underline{\hspace{2cm}}(2x-y)$; ② $-x^2+y^2 = \underline{\hspace{2cm}}(x^2-y^2)$; ③ $-x-y+z = \underline{\hspace{2cm}}(x+y-z)$; ④ $(4a-3b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}(3b-4a)^2$; ⑤ $(x-y)^3 = \underline{\hspace{2cm}}(y-x)^3$; ⑥ $(1-x)(x-2) = \underline{\hspace{2cm}}(x-1)(x-2)$.
- 写出下列各多项式中的公因式.

① $2ab^2 + 5a^2b - 10b$, 公因式:_____.	② $m(x-y) - n(x-y)$, 公因式:_____.
③ $2x(b-a) + y(a-b) + z(b-a)$, 公因式:_____.	④ $9x(a-b)^2 - 3y(b-a)^3$, 公因式:_____.
⑤ $-3ab^3 + 6a^2b^2 + 12a^3b$, 公因式:_____.	⑥ $5x^{n+1} - 20x^n + 15x^{n-1}$, 公因式:_____.
- 已知多项式的公因式,将另一个因式填在括号里.

① $14abx - 8ab^2x + 2ax = 2ax(\underline{\hspace{2cm}})$.	② $-7ab - 14abx + 49aby = -7ab(\underline{\hspace{2cm}})$.
③ $15x^3y^2 + 5x^2y - 20x^2y^3 = 5x^2y(\underline{\hspace{2cm}})$.	④ $6m^2n - 15mn^2 + 30m^2n^2 = 3mn(\underline{\hspace{2cm}})$.
⑤ $-16x^4 - 32x^3 + 56x^2 = -8x^2(\underline{\hspace{2cm}})$.	⑥ $-4a^3b^2 + 6a^2b - 2ab = -2ab(\underline{\hspace{2cm}})$.
- 分解因式: $x(a-b) - y(a+b) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 分解因式: $a(a-b) + (a-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 分解因式: $m(a-3) + 2(3-a) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 分解因式: $(a+b)(a-b) - (b+a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

- 下列各式由左到右的变形是因式分解的是()

A. $-9+a^2 = (3+a)(a-3)$	B. $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$
C. $a^2 - 2ab + b^2 + a + b = (a-b)^2 + (a+b)$	D. $m^2 + m = m^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)$
- 下列各式从左到右的变形错误的是()

A. $(y-x)^2 = (x-y)^2$	B. $-a-b = -(a+b)$
C. $(a-b)^3 = -(b-a)^3$	D. $-m+n = -(m+n)$
- 多项式 $6a^3b^2 - 3a^2b^2 - 18a^2b^3$ 分解因式时,应提取的公因式为()

A. $3a^2b$	B. $3ab^2$	C. $3a^3b^3$	D. $3a^2b^2$
------------	------------	--------------	--------------
- 把多项式 $-2x^3 + 6x^2$ 分解因式的结果是()

A. $-2(x^3 - 3x^2)$	B. $-2x^2(x+3)$
C. $-2x^2(x-3)$	D. $-2x(x^2 - 3x)$



5. 下列各式中, 分解因式正确的是()

A. $12xyz - 9x^2y^2 = 3xyz(4 - 3xy)$

B. $3a^2y - 3ay + 6y = 3y(a^2 - a + 2)$

C. $-x^2 + xy - xz = -x(x^2 + y - z)$

D. $a^2b + 5ab - b = b(a^2 + 5a)$

6. $m^2(a-2) + m(2-a)$ 分解因式等于()

A. $(a-2)(m^2-m)$

B. $m(a-2)(m+1)$

C. $m(a-2)(m-1)$

D. 以上都不对

7. 多项式 $(5x-2y)^2 + (2x+5y)^2$ 分解因式等于()

A. $2(5x-2y)^2$

B. $-2(5x-2y)^2$

C. $29(x^2+y^2)$

D. 以上答案都不对

8. 把多项式 $2(x-2)^2 - (2-x)^3$ 分解因式的结果是()

A. $(x-2)^2(4+x)$

B. $x(x-2)^2$

C. $-x(x-2)^2$

D. $(x-2)^2(2-x)$

9. $(-2)^{1997} + (-2)^{1998}$ 分解因式后是()

A. 2^{1997}

B. -2

C. -2^{1997}

D. -1

10. 观察下列多项式:

① $2a^2b + 4b^2$; ② $(a+b)^2x - 5x^2(a+b) + 4(a-b)^2$;

③ $9a^2(x-y) - 4b(y-x)$; ④ $8a^3 - 4a^2 + 2a - 1$.

其中可以用提公因式法分解因式的有()

A. ①④

B. ②③

C. ②④

D. ①③

三、解答题

1. 把下列各式分解因式.

(1) $45a^3 + 15a^2 - 5a$

(2) $x^5y + x^3y^2 - x^3y$

(3) $-8p^4 + 16p^3 - 40p^2$

(4) $2a^m b^{n+1} - \frac{1}{2}a^{m+1}b^n$

(5) $2(x+y)(x-y) + 6$

(6) $(x+y)(a^2+a+1) - (x-y)(a^2+a+1)$



$$(7) -15am^3 + 10bm^2 + 35cm$$

$$(8) a^m(3x-2) - 2 + 3x$$

$$(9) 4a(x-1) - 3b(x-1) - (1-x)$$

$$(10) x(a-x)(a-y) - y(x-a)(y-a)$$

2. 把下列各式先因式分解,再求值.

(1) $5x(m-2) - 4x(2-m)$, 其中 $x=4, m=5$.

(2) $4a^2(x+7) - 3a^2(x+7)$, 其中 $a=-5, x=3$.



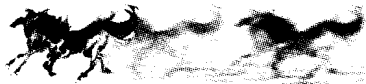
3. 利用因式分解计算.

(1) $21 \times 5.68 + 62 \times 5.68 + 17 \times 5.68$

(2) $3.186 \times 1.357 - 1.357 \times 1.186$

4. 已知 $a + b = 2$, $ab = 100$, 求 $a^2b + ab^2$ 的值.

5. 分解因式 $x^2(x-y)^{n+1} - 2x(x-y)^{n+2} + (x-y)^{n+3}$.



能力拓展题

一、填空题

- $-a^3 + 2a^2b - ab^2 = (\quad)(a^2 - 2ab + b^2)$.
- $a^3(x-y) - 3a^2b(y-x) = (\quad)(x-y)(\quad)$.
- $x(x+y)(x-y) - y(y+x)(y-x) = (x-y)(\quad)$.
- $(a-b)^n = \quad(b-a)^n$ (n 为奇数), $(a-b)^n = \quad(b-a)^n$ (n 为偶数).
- $(a-1)^2(2-b)^3 = \quad(1-a)^2(b-2)^3$.
- $x(a-b+c) - y(a-b+c) - z(b-a-c) = \quad$.
- $2(x-2y)(a-2b+3c) - 4(x-y)(2b-a-3c) = \quad$.
- $-3(x-1)^3y - (1-x)^3z = \quad$.
- $-ab(a-b)^2 + a(b-a)^2 - ac(a-b)^2 = \quad$.
- $(a+x)^{m+1}(b+x)^{n-1} - (a+x)^m \cdot (b+x)^n = \quad$.

二、选择题

- 下列各式的因式分解, 正确的是()
 A. $12abc - 9a^2b = 3abc(4 - 3ab)$
 B. $3m^3n^2 - 3m^2n^2 + 6m^2n^3 = 3mn(m^2n - mn + 2mn^2)$
 C. $x^2y + 5xy - y = y(x^2 + 5x)$
 D. $-5a^2 + 10ab - 15ac = -5a(a - 2b + 3c)$
- 化简 $(x-y+z)^4(y-x-z)^2(x+z-y)^3(y-z-x)$ 的结果为()
 A. $(x-y+z)^{10}$ B. $(x-y-z)^{10}$ C. $-(x-y+z)^{10}$ D. $-(x-y-z)^{10}$
- $(a-b)(m-n)$ 是下列哪个多项式分解因式的结果()
 A. $am - an + bm - bn$ B. $am - an - bm + bn$
 C. $am + an + bm - bn$ D. $am - an + bm + bn$
- 已知 $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ 有因式 $(a-b)$ 则另外的因式是()
 A. $a^2 + b^2$ B. $(a-b)^2$ C. $(a-b)(a+b)$ D. $(a+b)^2$
- $-16x^{m+2}y + 12x^{m+1}y^2 - 4x^my$ 分解因式等于()
 A. $4x^my(4x^2 + 3xy)$ B. $-4x^my(4x^2 + 3xy - 1)$
 C. $-4x^my(4x^2 - 3xy)$ D. $-4x^my(4x^2 - 3xy + 1)$
- 整式 $2a^2b^2 - 2b^2 + (ab-1)(a-1)^2$ 因式分解后含有的因式有()
 A. $ab-1$ B. a^2-1 C. $a-1$ D. $(a-1)^2$
- 若 $x^3 + 3x^2 - 3x + k$ 有一个因式为 $x+3$, 则 k 的值为()
 A. -1 B. 1 C. 9 D. -9
- 把 $a^3 + a - b - b^3$ 分解因式, 其结果为()
 A. $(a-b)(a^2 - ab + b^2 + 1)$ B. $(a-b)(a^2 - ab + b^2 - 1)$
 C. $(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$ D. 以上答案都不对



9. $x^{m+n+3} - x^{m+2n+3}$ 分解因式, 等于()

A. $x^{m+n+3}(x - x^n)$

B. $x^{m+n+3}(1 - x^n)$

C. $x^{m+n+3}(1 - x^2)$

D. $x^{m+n}(x^3 - x^{n+3})$

10. 分解因式 $(m-n)(a-b) - (n-m)^2 + (n-m) = ()$

A. $(m-n)(m-n+a-b-1)$

B. $(m-n)(a-b-m-n-1)$

C. $(m-n)(n-m+a-b-1)$

D. $(m-n)(n-m+a-b)$

三、解答题

1. 把下列各式分解因式.

(1) $-10a^4b^2 - 8a^4b + 6a^3b^2 - 2a^3b$.

(2) $(x+1)^2 + (x^2+x)^2$.

(3) $2a(a-b)^3 - a^2(a-b)^2 + ab(b-a)^2$.

(4) $x-1 - (1-x)(2-x)$.



(5) $3(m-n)^2xy - 6ny + 6my.$

(6) $x(a-b)^{2n} + y(b-a)^{2n+1}.$

2. 求证: $8^{2000} - 8^{1999} - 8^{1998}$ 能被 5 整除.

3. 不解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$, 求 $7y(x-3y)^2 - 2(3y-x)^3$ 的值.