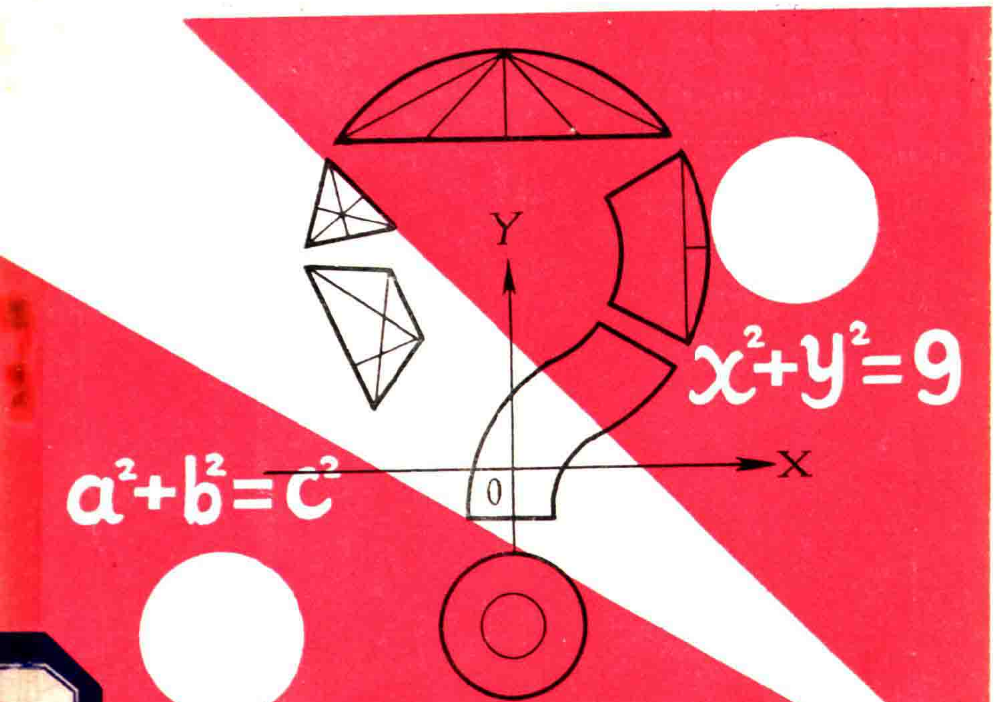
中学数学解题思维方法与技巧

主编：李　森



中国物资出版社

中学数学解题思维方法与技巧

中 国 物 资 出 版 社

中学数学解题思维方法与技巧

李　森

※

中国物资出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京四二二九工厂印刷

开本：787×1092　1／32　印张 8.25　字数 185 千字

1990 年 1 月第一版　1990 年 1 月第一次印刷

印数 1－15,000 册

书号：ISBN7－5047－0144－0／O·0010

定　价：2.50 元

编写说明

本书是专门讲授数学解题方法的小册子。编写时，注意按照教学大纲，剖析难点，启迪思维，开发智力，培养能力。它能帮助中学生学习和掌握解数学题的方法，提高分析问题和解决问题的能力，成为中学生学数学的良师益友。

学习数学必须解题，更重要的是通过解题掌握方法，学会自己动手、动脑的本领。

教学实践表明，学生在解题中常遇到不少困难和问题。首先，由于对概念、原理理解不清，而缺少灵活性以至产生误差。对此，我们通过典型实例分析，从正反两方面指出如何正确地运用数学概念和原理。其次，是解题思路狭窄、呆板，对此，我们阐明解析法、代数法对解几何题的作用及各科知识间的联系。再次，有的不会审题，分不清问题的条件和结论，不知道什么是已知，什么是未知，有的不懂证题的步骤和格式，在论证过程中，往往犯偷换论题、虚假论证，循环论证等逻辑错误。更有甚者，不知问题是否已经证明完毕。针对此问题编写了证题的基本方法。特别是介绍了递推方法。这一部分之后，紧密结合高中教材，编写了关于周期、极限、微积分等方面的解题知识和方法。在知识系统上给予辅导，在思想方法上给予指点，对学有余力的学生的提高会大有益处，对教师也有一定的参考价值。

针对以上问题，本书通过简单有趣的例子，讲授解题的各种一般性方法和技巧，通过具体解题方法的比较，阐明思考问题和动手解题的一般思路,从而培养学生的逻辑思维能力和空间想象能力，使学生探索思维得到启发与训练，掌握由表及里，逐步接近并最终解决问题的本领。本书的特点是：通俗易懂，解法自然，易于接受，能启发学生自发地思考和提出问题。本书取材广泛，集作者多年教学经验编写成的。

由于作者水平所限，在编写过程中难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

本书由北京市教育局局长陶西平任编写顾问，北京市海淀区教育科研所张士充同志主审，参加审稿的还有师范大学梁立明同志。

作　者

于北京 1989.4

序

在中学数学教学和学习中,师生都用了大量时间来解题，但效果却往往是很不一样的；这常是由于对为什么要解题、怎样解题这两个问题的认识不同。

对于第一个问题，为什么要解题似乎是自明的，因为种种考试都要求学生解题。但正因如此，就出现一种把解题本身作为目的的倾向，而忽视了把它作为手段，作为一个学习过程应达到的全面学习目的：一方面要巩固理论知识，掌握程序规范，学会方法技巧，锻炼思维能力；另方面，还要注意养成认真负责的态度，陶冶知难而进的精神，体验顿悟发现的美感。只有这样明确解题过程的教学和教育作用才能真正达到解题的目的，也才能真正学会准确、迅速、而灵活的解题。反之，若只把解出题目本身做为目的，而忽视上述解题过程中应达到的教学和教育目标，虽然师生都沉浮于题海，却往往不能真正学会解题，至少是事倍功半。

至于应该怎样解题，却不能做出固定的结论，常常是因题目的类型和解题者的个性而有所不同。不过，一般来讲，只重技巧而忽视一般方法以及理论和概念的运用，则往往会导致解题思路狭窄，特别是削弱解综合性较强的题目的能力，降低检查解题过程中产生的错误的能力。也就是说，解题应该是概念、理论、方法、技巧，作为整体的综合运用。这样才能达到前述解题作为教学和教育过程的

最终目的。

所以，为什么要解题和该怎样解题这两个方面是相互联系的，明确这一点，对研究解题是很重要的。

李森老师在海淀区执教期间，结合教学对解题的目的，获得较全面的理解，对解题的途径也积累了一些经验；同时，对学生在解题中遇到的种种困难，更有具体的了解。所以，在这本书中首先从正反两方面明确概念在解题中的作用，并例举各科方法在解题中的相互联系，这就涉及解题中概念和理论的作用；其次，在论及一般与特殊的解题方法和相应思维训练中，又显示出解题技巧与一般方法及逻辑思维间的联系。因此，这本书与一般的单纯讨论解题方法与技巧的题解不同，内容虽然不多，却将会对中学的教师和学生有所启发。

张　士　充

1989.12

目　录

第一章　　正确运用数学概念和原理

一、数学概念和原理在解题中的作用

解决一个数学问题必须运用数学概念和原理进行一些推理或运算。数学中的概念和原理很重要，常常会因为对一个概念或原理理解不清、不全面而使我们的思维方法和抽象想象能力得不到充分地发挥以致陷于迟钝，不知怎样去探索解题途径。在计算或证明一个问题的过程中也可能由于对某些概念或原理的理解或运用错误导致解题的失败。因此，我们必须对数学的基本概念作认真的反复地思考，并且能准确地叙述它们。这不仅是对加深概念和原理的理解所必须的，也是在运算或推理证明等应用中所不可缺少的。只有在掌握数学概念和原理的基础上才可能逐步做到运算熟练、运用灵活，从而提高分析问题和解决问题的能力。

二、例题

例题 1　有一个五位数 2abcd 乘以 2 后得 abcd8，求此数。

分析：往往学生拿到此题后感到束手无策，其原因在于：不熟悉用字母表示数；不习惯用四个字母表示一个未知量；将数与数字概念混淆。针对学生学习中存在的问题，若我们依题列出一元一次方程，把 abcd 四个字母看成

了一个整体，此时只须一个等量关系，题目可解。事实上，由于 2abcd 就是四位数字 abcd 加上 20000，即 2abcd＝20000+abcd

abcd8 就是将 abcd 乘以 10 再加上 8，即 abcd8＝abcd ×10+8

于是，令 x＝abcd，则

$2\cdot(20000+x)=10x+8$

整理化简：$8x=39992$

$\therefore\quad x=4999$

所求五位数是 24999。此题解法妙在用未知数 x 表示四位数 abcd，于是得到：

2abcd＝20000+x

与　abcd8＝10x+8

依题设列出一元一次方程，从而使问题得到解决。但此题不限于上述解法，若将四个字母看成四个未知量也不是不能解。事实上，若设个位数字为 d，十位数字为 c，百位数字为 b，千位数字为 a，则

由　2(2abcd)＝abcd8 得：

$2(20000+1000a+100b+10c+d)$

$=10000a+1000b+100c+10d+8$

即　$40000=8000a+800b+80c+8d+8$

$1000a+100b+10c+d=4999$

比较两边得：$a=4$，$b=9$，$c=9$，$d=9$

所求五位数为：24999

例题 2　解方程

$$a^0=1+\log_b\left[1+\log_c(1+\log_d x)\right]$$

分析：只要我们对指数、对数概念以及指数式与对数式之间的变换关系清楚就自然会想到 $a^0=1$

并把对数式 $\log_a N=b$

化成指数式 $a^b=N$

再步步化简即可求出 x 之值。

事实上，$a^0=1+\log_b[1+\log_c(1+\log_d x)]$

$$0=\log_b[1+\log_c(1+\log_d x)]$$

$$1+\log_c(1+\log_d x)=b^0=1$$

$$\log_c(1+\log_d x)=0$$

$$1+\log_d x=c^0=1$$

$$\log_d x=0$$

$$x=d^0=1$$

另解：利用 $\log_a 1=0$ 及 $a^0=1$，由观察法可得 $x=1$。而且由对数函数是 1-1 对应的函数关系，故此题的解是唯一的。

例题3 求$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{\cdots 5\sqrt{5\cdots}}}}$之值

分析：题目中出现无限情况，似乎很难办。但在明确分指数概念基础上，不难用分指数表示原式

原式 $=\sqrt{5}\cdot\sqrt[2^2]{5}\cdot\sqrt[2^3]{5}\cdots\cdots$

$$=5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2^2}}\cdot 5^{\frac{1}{2^3}}\cdots\cdots$$

$$=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots}$$

而上式右端的指数是以无穷等比数列形式出现的，所以应用无穷等比数列求和的方法，把无穷化为有限即得所-

求结果。即

$$原式 = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots\cdots}$$

$$= 5^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}$$
$$= 5^1$$
$$= 5$$

$$\therefore \quad \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{\cdots 5\sqrt{5\cdots}}}} = 5$$

例题4 试问当x为何值时

$$\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}}}} \text{ 有意义}$$

分析：此题可根据算术根和对数概念去考虑。即解不等式

$$\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}}} \geqslant 0$$

根据算术根非负的概念和对数函数当$a>1$时单调递增，当$0<a<1$时单调递减的特征，从外逐层脱去根号、对数符号，便可得出正确答案。

事实上，当$a>1$时

$$\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}}} \geqslant 0$$
$$\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}}} \geqslant 1$$
$$\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}} \geqslant 1$$
$$\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}} \geqslant a$$
$$\log_a\sqrt{\log_a x} \geqslant a^2$$

$$\sqrt{\log_a x} \geqslant a^{a^2}$$

$$\log_a x \geqslant a^{2a^2}$$

$$x \geqslant a^{a^{2a^3}}$$

当$0 < a < 1$时，

$$\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}}} \geqslant 0$$

$$0 < \sqrt{\log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}}} \leqslant 1$$

$$0 < \log_a\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}} \leqslant 1$$

$$\sqrt{\log_a\sqrt{\log_a x}} \geqslant a$$

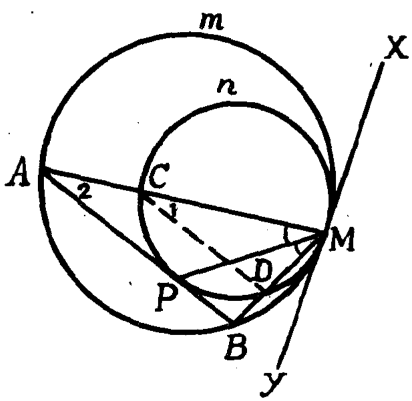
$$\log_a\sqrt{\log_a x} \geqslant a^2$$

$$0 < \sqrt{\log_a x} \leqslant a^{a^2}$$

$$0 < \log_a x \leqslant a^{2a^2}$$

$$x \geqslant a^{a^{2a^3}}$$

例题 5 两圆内切于M点，大圆的弦AB切小圆于P点，求证：∠AMP=∠BMP（见图1）



(图 1)

分析：联结AM、BM，分别与小圆交于C、D两点。欲证：

∠AMP=∠BMP

容易想到去证：PC=PD

由于AB是小圆的切线，P是切点，因此，如果我们证明了$CD \parallel AB$，那么问题就解决了。但是要证$CD \parallel AB$只要证明：$\angle ABM$

$=\angle CDM$ 即证明弧 AmM 与弧 CnM 有相同的量数。由于 $\angle AMX$ 是弦切角，因而问题得以解决。

从以上分析可知，如果我们对于两圆相切有关的一些概念，如切线、弦切角及其性质还不甚了解，那么也许不会想到把求证：$\angle AMP=\angle BMP$ 变换为证明 $CD \parallel AB$ 更不会导出弧 AmM 与弧 CnM 的量数都等于弦切角 $\angle AMX$ 的量数，即得出：$\angle ABM=\angle CDM$ 于是得 $AB \parallel CD$。因此，弧 $PC=$ 弧 PD

$\therefore \angle AMP=\angle BMP$

另解。以两圆相切和直线与圆相切为突破点，由弦切角与圆周角的关系易知 $\angle 1=\angle 2$，所以弧 $PC=$ 弧 PD，由此 $\angle AMP=\angle BMP$

学生之所以作起来有困难，原因在于对圆的位置关系搞不清，不熟悉弦切角与圆周角的关系。

三、小结

从以上的例题中我们看到解决一个数学题，不论代数的或是几何的都必须正确地运用有关的概念和原理。在变换中注意等效；运算中注意正确。因此数学中的概念和原理必须很好地掌握。并在运用中加深对概念和原理的理解。因此我们除了做一些基本题外，还要做一些有一定难度的经过一番思考后才能演算出来的习题。

第二章　错解剖析

一般的数学问题常常从正面提出。这是因为接受知识常会先入为主，所以要先从正面进行认识，对于数学中的概念、原理和方法就是应该先从正面去学习，再通过充分地演算加深理解和巩固。但仍难免因对某些概念、原理认识不清、理解错误，从而造成在运用它们去分析解决问题时引起的错误；或因片面地运用数学知识产生的错误；或在错误的几何作图的基础上（虽然运用了正确的逻辑推理）而导致的错误等等。把出现这些典型性或带有普遍性错误的题解汇集起来加以剖析，常常有利于从反而促进我们正确地认识、理解数学中的概念和原理，注意进行正确的几何作图，以及纠正在运用数学方法进行演算、证明方面的错误。

一、错误地运用数学概念和原理而导致的错误。

例题 1　任意两个正数都相等。

已知：x，y 是任意两个正数。

求证：$x=y$

证明：令 $x+y=2a$

由这个等式得两等式：

$$x=-y+2a \quad (1)$$

$$x-2a=-y \quad (2)$$

将（1）式与（2）式的左边与左边相乘，右边与右边相

乘，得:

$$x^2-2ax=y^2-2ay$$

在这个等式两边同时加上 a^2，得

$x^2-2ax+a^2=y^2-2ay+a^2$

即　　$(x-a)^2=(y-a)^2$

两边开平方，得:

$x-a=y-a$

故　　$x=y$

这样我们证明了"任意两个正数相等"。这个明显的错误结论是怎么产生的？在于我们对平方根的概念认识不清。我们知道，例如:

$2^2=4,\qquad (-2)^2=4$

因此当我们求 4 的平方根时，会有两个结果：2 与-2，即一个正数的平方根有两个。因此当我们对等式

$$(x-a)^2=(y-a)^2$$

的两边开平方时就有两种结论:

$$x-a=y-a \tag{3}$$

$$\text{或}\qquad x-a=-(y-a) \tag{4}$$

取(3)式得 $x=y$，取(4)式得 $x+y=2a$。(3)式与(4)式取哪个合理?(3)式一般不成立(除非 $x=a$)，这是因为 $x+y=2a$，若 $x>a$，则 $y<a$；若 $x<a$,则 $y>a$，即 $x-a$ 与 $y-a$ 反号。但我们错误地取了(3)，从而导致错误的结论 $x=y$。我们取(4)式就不会犯错误。这时只能从等式

$$x-a=-(y-a)$$

又回到原来等式

$$x+y=2a$$

自然不会得出“任意两个正数都相等”的错误结论。

例题 2 试证：$1=2$

证明：设 $a=b$

上式两边同乘以 a，得 $a^2=ab$

两边同时减去 b^2，得 $a^2-b^2=ab-b^2$

分解因式，得 $(a+b)(a-b)=(a-b)b$

两边同除以 $a-b$，得 $a+b=b$

再把 $a=b$ 代入上式，得 $2b=b$

两边同除以 b，得 $2=1$

结论：“1＝2”也是明显的错误，错在何处？我们知道在等式两边同除以某数，只有当除数是非零的数时才允许的，观察从等式

$(a+b)(a-b)=b(a-b)$ 变换到 $a+b=b$ 是在等式 $(a+b)(a-b)=b(a-b)$ 的两边同除以 $(a-b)$ 而得到的，但假设 $a=b$，得 $a-b=0$，因此我们在证明过程中实际上是在等式的两边同除以零，“零不能作除数”，违背了这条数学原理，于是导致“1＝2”的错误结论。

二、片面地掌握数学知识造成的错误

例题 1 凡是三角形都是等腰的

已知：$\triangle ABC$

求证：$AC=BC$（见图 2）

证明：设 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$。

延长 AC 至 P 使 $CP=a$ 联结 PB。延长 BC 至 Q 使 $CQ=b$（如图）