根 据 教 育 部 最 新 教 材 编 写

○国家骨干教师○全国特级教师○高考研究专家

高考考点总攻略

总审定○中科高考命题研究中心

总主编○耿立志

数学

排列组合与概率

平面向量
立体几何
三角函数
解析几何
集合 函数 数列
不等式

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

《高考考点总攻略》

丛书编委会

序

对于即将参加高考的同学而言，最重要的无非是对各科知识体系的构建。只有具备完整的知识体系才能自如地应对各种考试，才能实现自己在高考中的成功。

这一切都需要从对一个个知识考查点的学深吃透开始。

没有“点”，便无以成“线”；没有“线”，便无以成“网”。没有一个个知识点的扎实理解，构建的知识体系就只是空中楼阁——尽管“欲上青天揽明月”，但仍必须一切从“点”开始。

正是基于这种现实考虑，本丛书将高考各学科分别拆分成不同的知识考查点，每个考点独立成书，同学们既可以“合之”为完整的知识体系，并进行补充和检测，也可以“分之”为不同的知识点而各个击破，从而在高考复习中便于学生根据个人情况灵活安排，真正实现了高考复习和日常学习的自主性。

一、考点点睛

考点该如何确立？是由最新的《考试说明》确定并从

教材讲解中进行筛选的。既然是应对高考，学习之前就必须先将考点弄清吃透。没有目标的学习会事倍功半，正如同没有“点睛”的龙不能飞一样。

“考点点睛”分为“知识盘点”和“方法整合”，既关注了基础知识的完整牢固，又强调了思维方式的科学迅捷，不仅有利于学生“记忆”，更有利于学生“巧记”；不仅指导学生“学习”，更指导学生“巧学”。

二、考例点拨

对考例的分析是必不可少的。本丛书精选高考例题并对之进行详解的目的，在于确认考点，透视设题思路，明确排障技巧，完善解题方法，捕获得分要点。通过对考例的点拨，学生就会熟知高考设题的方向，了解高考试题是如何与知识点相结合的。可以说，在“考点点睛”之后的“考例点拨”是给予学生的一把金钥匙。

三、考题点击

本丛书所选考题或者是各地历年高考题中对本知识考查点的涉及，或者是针对某些需要提醒之处的重点训练。“考题点击”是学生对知识点进行科学梳理之后必不可少的实战演练，有利于加深记忆，拓展思维，强化技法。

此外，考虑到不同层次学生的不同需求，本丛书又开辟了“创新拓展”版块，供学有余力的同学继续巩固提高。

本丛书命名为《高考考点总攻略》有两层意思：第一是本丛书每本书精讲一个考点，力争做到在这个“点”上讲通讲透；第二是学生经过本书点拨后即可学懂学透。

这个“点”，是水滴石穿中点滴之水的不懈，是点石成金中手指轻点的智慧，是点火燎原中星星之火无限潜能的释放，是京、冀、辽、吉、豫等各地一线名师联手对高中学习的重点点拨。

当然，再好的书也必须去学习才能体现它的价值，再美的愿望也需要同学们脚踏实地地从第一章读起。正所谓：

勤学如春起止苗，不见其增日有所长；

辍学如磨刀之砥，不见其损日有所亏。

开始读书吧！

耿立志

目　录

第一篇　基础达标

第二篇　创新拓展

第一篇

基础达标

排列组合与概率

一、考点点睛

知识盘点

(一)排列组合部分

(1)分类计数原理　完成一件事,有 n 类办法,在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法,在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots m_n$ 种不同的方法.

(2)分步计数原理　完成这件事,需要分成 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots m_n$ 种不同的方法.

(3)排列定义　一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

(4)排列数定义　从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示

(5)排列数公式　$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}\qquad A_n^n=n!$$

(6)组合　一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

(7)组合数　从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数.

(8)组合数公式 $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ 掌握排列组合数公式及如下公式:$C_n^k=C_n^{n-k}(0\leqslant k\leqslant n)$

$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}(1\leqslant k\leqslant n-1)$

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots C_n^n=2^n$

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$

$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+k-1}^n+C_{n+k}^n=C_{n+k+1}^{n+1}$

(9)掌握$(a+b)^n$展开式的通项公式$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$

尽管$(a+b)^n=(b+a)^n$，但为了使“第n项”的说法含义确定，必须将$(a+b)^n$与$(b+a)^n$加以区别.注意系数与项的区别，系数与二项式的联系与区别.注意所谓“中间最大”的二项式系数的性质.

（二）概率部分

(1)必然事件　在一定条件下必然发生的事件，叫做必然事件.

(2)不可能事件　在一定条件下不可能发生的事件，叫做不可能事件.

(3)随机事件　在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，叫做随机事件.

(4)概率　一般地，在大量重复进行同一试验时，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$总是接近于某个常数，在它附近摆动，这时就把这个常数叫做事件A的概率，记作$P(A)$

$P(A)=\frac{m}{n}\qquad 0\leqslant P(A)\leqslant 1.$

(5)互斥事件有一个发生的概率

①不可能同时发生的两个事件称为互斥事件.

②一般地，如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中的任何两个都是互斥事件，那么就说$A_1,A_2,\cdots,A_n$彼此互斥.

互斥事件不一定是对立事件，对立事件一定是互斥事件

对于互斥事件有$P(A_1+A_2+\cdots A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)$

(6)相互独立事件同时发生的概率，一般地，如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，那么这n个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率之积.即

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$

(7)独立重复事件　一般地，如果在1次试验中某事件发生的概率是P，那么在n次独立重复试验中这个事件恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

方法整合

1. 分步计数与分类原理的应用

2. 分类计数原理与分步计数原理的混用

3. 没有条件的排列问题

4. 有附加条件的排列问题

(1)“在”与“不在”　指某个元素在不在某个位置上. 处理这类题有三种方法，第一种方法是考虑特殊位置. 第二种方法是考虑特殊元素. 第三种方法是间接法.

(2)“邻”与“不邻”的问题　指某些元素相邻或者不相邻. “相邻”问题用“捆绑法”指把相邻的元素看作一个元素. “不相邻问题”用插空法，即把其他元素先排列，再把相邻的元素插到他们每个元素的前后位置.

(3)有序排列问题　指某些元素的顺序固定不变.

5. 没有附加条件的组合问题

6. 有附加条件的组合问题

(1)“含”与“不含”的问题　解决此类问题的方法时，先考虑特殊元素，利用直接法或间接法

(2)平均分配，平均分组　不平均分配，不平均分组

(3)重复组合问题　设从n个元素中抽取v个，若允许对其中的任一个都可以使用不止一次，也允许v大于n，则这样作成的组合叫做重复组合，种数用H_n^v表示，且$H_n^v=C_{n+v-1}^v$

(4)不尽相异元素的全排列：若m个元素中，有n_1个a_1，n_2个a_2，…，n_k个a_k，且$n_1+n_2+\cdots n_k=m$. 则这m个不尽相异元素的全排列数为$\dfrac{m!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$

(5)排列组合恒等式的证明方法

①公式法. 即利用排列组合的公式进行证明.

②二项式定理的运用. 即通过赋值法(在$(a+b)^n$及展开式中代a、b以

具体值、别的字母或代数式)或构造法(构造恒等式或可生成所需二项式系数的函数等)应用二项式定理于解题中.

③组合分析法. 即对等式两边所代表的组合涵义进行分析,或对两个有一一对应关系的组合模型进行计数,从而将证明方法化归为组合应用问题的解决方法.

④数学归纳法和概率方法.

7. 随机事件,必然事件,不可能事件的判定以及概率的求法

8. 等可能事件概率的求法

9. 互斥事件有一个发生的概率的求法

10. 相互独立事件的概率的求法

11. 独立重复事件的概率的求法

二、考例点拨

(一)排列组合部分

【例1】 (1)从4个学生中选一人到三个车间之一去劳动,有几种不同的分法;

(2)将4个学生全分到三个车间去劳动,有几种不同的分法;

(3)4个学生争夺三项比赛的冠军,可能出现几种不同的分法.

【解析】 (1)先选学生后分配. (2)分成4步给每一个学生选一个车间,然后再根据分步计数原理可得结果. (3)给每一个冠军安排一个学生,再根据分步计数原理可得结果.

【答案】 (1)分二步做. 第一步,先从4个学生中选出1人,有 C_4^1 种选法;第二步,再将选出的人派到3个不同的车间之一的派法有 C_3^1 种. 故由分步计数原理可知,共有 $C_4^1 \cdot C_3^1=12$ 种派法.

(2)分四步做. 第一步,先分学生甲到三个车间之一去,有 C_3^1 种分法;第二步,再分学生乙到三个车间之一去,又有 C_3^1 种分法;第三步,再分学生丙到三个车间之一去,又有 C_3^1 种分法;第四步,再分学生丁到三个车间之一

去，又有 C_3^1 种分法. 故由分步计数原理知，共有 $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1=81$ 种分法.

(3)分三步做. 第一步，赛出第一项冠军有 C_4^1 种可能；第二步，赛出第二项冠军仍有 C_4^1 种可能；第三步，赛出第三项冠军还有 C_4^1 种可能. 所以共有 $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1=64$ 种可能.

【点评】 此类题属一个映射模型，$A=\{a_1a_2,\cdots a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots b_m\}$ 从集合 A 到集合 B 的映射的个数共有 m^n 个不同的映射. 4 个学生争夺三项比赛的冠军，三个冠军作为集合 A 中的元素，每个冠军都有一个确定的人和它相应. 4 个学生是集合 B 中的元素，从集合 A 到集合 B 的映射共有 4^3 种可能. 应用两个原理时应注意：必须明确要做的"事"是什么，以及怎样去做. 要注意，一组方法是该事的一"类"方法还是一个"步骤"的方法的区别，以便确定属于分类计数还是分步计数原理. 区分的关键是看能否完成问题中的事情.

【例 2】 求 2160 的约数的个数(包括 1 和 2160 在内).

【解析】 先把 2160 分成质因数的乘积，再看每个质因数有多少种可能的取法，然后根据乘法原理，可得结果.

【答案】 对于 $2160=2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ 在下列三行

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4$

$3^0 \quad 3^1 \quad 3^2 \quad 3^3$

$5^0 \quad 5^1$

中的每一行中任取一个的相乘积都可做它的约数. 由于各行的数字的个数分别是 5,4,2. 从而 2160 的约数有 $5\times4\times2=40$ 个.

【点评】 此题属于分步计数原理的一个应用，在 2160 的约数中 2^4 可能有 5 种不同的取法，可能一个 2 也不取，可能取 1 个 2，…，可能取 4 个，一共有 5 种不同的取法. 其他几个因数依次类推. 根据分步计数原理可得结果.

【例 3】 5 张 1 元币，4 张 1 角币，1 张 5 分币，2 张 2 分币可组成多少种不同的币值(一张不取，即 0 元 0 角 0 分不计在内).

【解析】 先看每一种币值可以组成多少种不同的币值，即有多少种不同的选取方法，再根据分步计数原理可得结果.

【答案】 分三种币值的不同组合.

元:0 元　1 元　2 元　3 元　4 元　5 元

解:0 角　1 角　2 角　3 角　4 角

分:0 分　2 分　4 分　5 分　7 分　9 分

然后分三步进行,第一步:从元中选取有 6 种取法;

第二步:从角中选取有 5 种取法;

第三步:从分中选取有 6 种取法.

由分步计数原理可得:$6\times5\times6=180$. 但应除去 0 元 0 角 0 分这种情况,故有不同币值 $180-1=179$ 种.

【点评】 此题也属于分步计数原理的一个应用题. 与例 1 类似.

【例 4】 用 1 克,2 克,3 克,4 克的砝码各 1 个可以称量多少种不同的重量?

【解析】 只要找出 4 个砝码可组成多少种不同的值即可得出结论.

【答案】 尽管砝码间搭配组合的方式很多,但由于称量的重量最少为 1 克,最多为 10 克,故只需分别举一例说明中间各值可称量出即可,如:2,3,4,2+3,2+4,3+4,1+3+4,2+3+4.

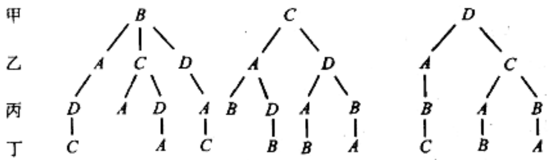
所以可称量出 10 种重量.

【点评】 本题属于一个分类计数问题. 先找一个砝码可组成多少值,然后再找 2 个,3 个可组成多少值,根据分类计数原理可得结果.

【例 5】 同室 4 人各写一张贺年卡. 先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡,则 4 张贺年卡不同的拿法有多少种?

【解析】 本题可根据排列树图把每一种符合情况的排列找出来.

【答案】 设甲、乙、丙、丁所写的贺年卡分别为 A、B、C、D. 则贺年卡送出的方式可列举如下:



所以共有 9 种不同的拿法.

【点评】 本题属于有条件排列问题,由于条件比较多,所以我们可以回

到原始情况去处理问题，此题便迎刃而解.

【例 6】 7 个人 A,B,C,D,E,F,G 按下列要求排成一行：

(1)A、B 必须在两端；(2)A 不能在左端，B 不能在右端；(3)A、B、C 必须排在一起；(4)A、B、C 两两不相邻；(5)A、B、C 顺序固定.

【解析】 (1)可以先考虑 A,B 的位置再排其他元素.(2)可用直接法，分两种情况，第一种情况 A 在右端，第二种情况 A 不在右端.根据分类计数原理可得结果.(3)可把 A,B,C 看作一个元素与其他元素做排列，然后再排 A,B,C.还可使用间接法，考虑 A 在左端和 B 在右端的情况，然后再用所有排列减去不符合条件的情况.得出结果.(4)先排除去 A,B,C 的其他元素，再把 A,B,C 插到他们中间.(5)先排 A,B,C 三个元素，因为他们的顺序固定所以有 C_7^3 种，然后再排其他元素.

【答案】 (1)先排 A、B 在两端，有 $A_2^2=2$ 种方法.再排其余的人有 $A_5^5=120$种方法.所以共有 $2\times120=240$ 种排法.

(2)方法 1：分成 A 在与不在右端两种情况，再按分类计数原理得：

$A_6^6+A_5^1A_5^1A_5^5=3720$(种).

方法 2：在 A_7^7 全排列中，A 在左端和 B 在右端各有 A_6^6 种.但它们都含有 A 在左端且 B 在右端的情况，故有：

$A_7^7-2A_6^6+A_5^5=3720$(种).

(3)先把 A、B、C 看成一个整体与其余 4 个元素作全排列，再把 A、B、C 作全排列.故有：

$A_5^5A_3^3=720$(种).

(4)先对 D、E、F、G 作全排列，再在间隙及两头空档共 5 个位置中选 3 个插入 A、B、C.故有：

$A_4^4A_5^3=1440$(种).

(5)先在 7 个位置中选出 3 个位置把 A、B、C 按要求的顺序放入，再把剩下的 4 个元素在剩下的 4 个位置上进行全排列.故有：

$C_7^3A_4^4=840$(种)

【点评】 此题包括了含有条件排列的所有情况，说明了每种类型的具体解法.(1),(2)属于“在”与“不在”的问题，(3)属于相邻问题，(4)属于不相邻问题，(5)属于顺序固定问题.

【例 7】 甲、乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂

台赛.双方先由1号队员出场参加擂台赛,负者被淘汰,胜者再与负方2号队员比赛.依次类推直到有一方队员全部被淘汰为止,另一方获得胜利,形成一种比赛过程.那么共可能出现多少种对阵情况?

【解析】 每一比赛过程都有14个队员参加,可看作是14个位置,甲队的7个队员占据7个位置,而且7个队员的顺序固定,所以有C_{14}^{7}种不同的方法,乙队的7个队员顺序也固定,对号入座即可.

【答案】 把甲、乙双方队员分别记作$A_1,A_2,\cdots,A_7$;$B_1,B_2,\cdots,B_7$.每一个比赛过程对应着这14个元素的一个排列,且满足A_i的下标从左至右是递增的,B_i的下标从左至右也是递增的.由14个位置中取出7个来"有序"地排上$A_1,A_2,\cdots,A_7$有C_{14}^{7}种排法,而剩下的7个位置"有序"地排上$B_1,B_2,\cdots,B_7$只有一种排法,所以问题的实质是从14个不同元素中取出7个的组合数.故有$C_{14}^{7}=3432$(种).

【点评】 本题属于一个实际应用问题,解决此题的关键是怎样从题目中提炼出数学模型,把它转化成排列问题.

【例8】 对于五位整数,在它的数字中

(1)含有数字0的有多少个?

(2)含有两个0或三个0的五位数占全体整数的百分之几?

【解析】 (1)用间接法,先找出不含有0的,再用所有的五位数减去不含有0的,即可得出结论.(2)也使用间接法,先找含有4个0的,再找含有一个0的,用总数减去这两种情况,可得含有两个0或三个0的.

【答案】 (1)易知五位整数有90000个,其中不包含数字0的有9^5个.所以,含有数字0的有$90000-9^5=30951$(个).

(2)五位整数中,含有4个数字0的有9个;含有1个0的为:0在个位的有9^4个,0在十位、百位、千位的均有9^4个,它们共有$9^4\times4=26244$个.

所以含有两个0或三个0的有$30951-26244-9=4698$个,占全体五位数的百分比为0.0522.

【点评】 本题使用的是间接法,即把问题的反面情况找出来,然后再用所有的情况减去反面情况.

【例9】 从0,1,2,3,4,5,6这七个数字中每次取出不同的五个做成五位正整数,其中有多少个是4的倍数?

【解析】 首先找出末两位数是4的倍数的,而且末尾数字是0的有多