距离与角度

江苏省数学学会科普委员会主编

王永建 编写

初中数学辅助读物

SHUXUE

江苏教育出版社

距离与[illegible]度

江苏省数学学会科普委员会主编
王　永　建　编写

江苏教育出版社

距离与角度

王永建编写

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　　淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 2.5　字数 50,000

1984 年 7 月第 1 版　1984 年 7 月第 1 次印刷

印数 1-49,800 册

书号：7351·033　　定价：0.27 元

责任编辑　何震邦

编 者 的 话

数学在实际生活中的应用是很广泛的。对于一个中学生或任何一个青少年来讲，不管你将来是在哪一个部门里工作，还是进哪一个学校，都必须要有最基本的数学知识，才能作出某些成绩。因此，每一个同学和青少年都应该努力打好数学基础。

学习数学，首先应该掌握一定的数学概念和数学规律，这是学好数学的基础。同时，也要学会把学到的知识用之于实际。如果掌握了知识不会灵活运用，那么，这些知识便只是一堆废物。因此，我们在学习数学时，必须注意理论和实际两个方面，注意领会有关的数学思想，掌握数学思维的方法，从根本上提高分析问题、解决问题的能力。为了达到这样的目的，在正课学习的基础上，适当看一点课外数学读物，以开拓知识领域，扩大视野，启迪智慧，是十分必要的。

基于这样的指导思想，我们组织部分长期从事中学数学教学和研究的专家、教授、中学教师编写了这套初中数学辅助读物。

这套丛书的内容密切结合现行初中课本，注意数学教材中各个方面的联系及应用，采用以点带面、纵横贯通的方法，阐述初中数学里的重要概念、定理和法则，疏通学习中的难点，剖析教材中的重点。书中涉及的数学知识一般不超越初

中数学的范围，某些地方虽稍有拓宽加深，但以初中学生能看懂为原则。文字上力求适合初中学生的年龄特点，做到生动活泼，浅显通俗。

这套丛书第一批编辑出版的有五种：《怎样列方程解应用题》（沈超编写），《三角形的巧合点》（涂世泽编写），《距离与角度》（王永建编写），《怎样解初中数学题》（赵振威编写），《数学命题和证明》（范惠民编写）。以后将根据初中学生和广大青少年学习初中数学知识需要，继续出版。

由于当前初中学生的程度不一，这套书在选题与编写方面都可能存在一些缺点，欢迎各地教学研究部门、中学教师以及广大青少年读者多多提出意见，帮助我们编好这套丛书。

江苏省数学学会科普委员会

一九八三年十一月二十九日

目　录

引　言

春光明媚，秋高气爽，大自然在向我们召唤。去远足、郊游吧！到哪儿去呢？得选个目标。这地方有多远？在什么位置？事先要搞搞清楚。

五星红旗迎风飘扬。这五角星是怎么画出来的？它的每一个角有多大？

雷达屏幕上明亮的光点，说明敌机群正向我阵地飞来。雷达手根据光点在屏幕上的位置，判断出敌机群与我阵地的距离和方位角，迅速向司令台作了报告。

…………

在实际生活中，我们经常碰到上面这样一些需要测定距离和角度的问题。

中学几何是一门以研究图形的度量性质作为主要内容的学科。线段的长短和角的大小，是基本几何量；而关于线段长和角的度量的问题，正是中学几何学的基本问题。此外，几何学在实际的应用中，大量的内容也表现在求距离和角度的问题。因此，抓住“距离”和“角度”这两个概念，认真把它们学好，对于系统掌握几何知识，并运用这些知识解决实际问题，具有重要的意义。

这本小册子，主要把分散在初中平面几何中有关“距离”和“角度”的概念集中起来，比较系统地加以阐述，并略加引伸和推广，同时适当地向读者介绍这些概念的应用。

本书每节之后都附有习题，书后附有答案，供练习、参考。

一、距　　离

§1 平面几何中几个有关"距离"的概念

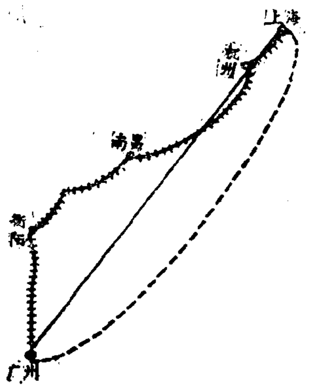

图 1

1. 两点间的距离

从上海到广州，一般可以乘火车，路程约1811公里；也可以坐轮船，航程约1690公里；还可以搭飞机，路程最短，只有约1200公里。

为什么坐飞机路程最短？因为陆路或水路交通受地形、水情的限制很大，路线弯弯曲曲；而飞机在空中飞行，所受条件的限制较少，一般情况下是按直线的方向前进的，所以坐飞机的路线最短。

从以上的问题中，可以看到，线段有一个重要的性质：

在所有连结两点的线中，线段最短。

我们就用连结两点间这条最短的线——线段来定义两点间的距离：

连结两点的线段的长度，叫做这两点间的距离。

这里，值得注意的是，连结两点的线可以有无数条，但最短的只有一条（图2）。我们就是用这条最短的线来定义两点间的距离的。这种求"最短线"的思想方法，在实际中的应用是非常广泛的。下面我们举几个例子。

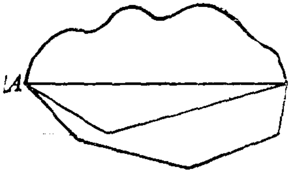

图 2

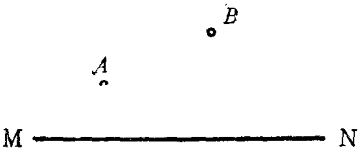

图 3

例1 如图3，MN为大陆海岸线（假设成一直线），A、B是两个小岛。有一艘运输船经常从A岛把水产运回大陆，而后从大陆将食物用品运到B岛，再由B岛将水产运上大陆，最后由大陆将食物用品运回A岛。转运码头应设在何处，才能使运输船的航程最短？

把这个例题抽象为纯数学问题，即：已知A、B为直线MN同旁的两点。在直线MN上求一点P，使$PA+PB$最短。这正是初中平面几何教材中的一个习题。

我们运用光的反射原理来解决这个问题。如果把MN理解为一个平面镜，光线自A点射到MN上的P点，自P点反射后，经过B点。设α是光线自A射向平面镜的入射角，β是反射角。（关于角的概念将在下一章中详细介绍）由光学原理可知，入射角与反射角相等，即$\angle\alpha=\angle\beta$。

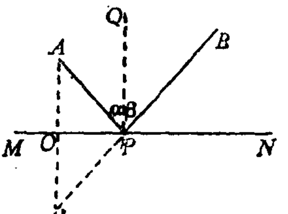

图 4

如果延长 BP 至A'，使 $PA'=PA$。连结 AA'，交MN于O点。

$\because$ $\angle APO$ 与$\angle\alpha$ 互为余角，$\angle BPN$ 与$\angle\beta$ 也互为余角，又已知$\angle\alpha=\angle\beta$，

$\therefore$ $$\angle APO=\angle BPN.$$

又$\because$ $\angle A'PO$ 与$\angle BPN$ 是对顶角，

$\therefore$ $\angle A'PO=\angle BPN$． $\therefore$ $\angle APO=\angle A'PO$.

不难证明 $Rt\triangle AOP\cong Rt\triangle A'OP$。

$\therefore$ A'是A点关于直线 MN 的对称点．A' 位置一定，$A'B$ 与 MN 的交点P也一定．由此,得到例 1 的如下解法：

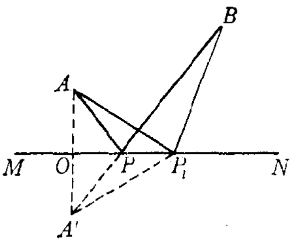

图 5

解 (1) 作A点关于直线 MN 的对称点 A'.

(2) 连结 $A'B$,交 MN于P.

P 点即为所求。

证明 在 MN上任取其它一点 P_1。连 AP_1、BP_1，易知$AP_1=A'P_1$.

$$\therefore \quad AP+BP=A'P+BP=A'B.$$

根据“两点之间，线段最短”这条基本性质，得

$$A'B<A'P_1+P_1B=AP_1+P_1B.$$

$\therefore$ P点是合乎要求的点．

答：转运码头应设在P点处．

例 2 AB、AC 是两条相交的直线，P点是$\angle BAC$ 内的一点。现在要在直线AB、AC 上分别找一点D和E，使$\triangle PDE$的周长最短。

解 分别取P点关于AB、AC的对称点P'、P''. 连$P'P''$,与AB相交于D，与AC相交于E，D、E即为所求.

证明 分别在AB、AC上任取其它一点D_1、E_1，连接D_1E_1、$P'D_1$、D_1P、PE_1、E_1P''，再连结PD、PE.

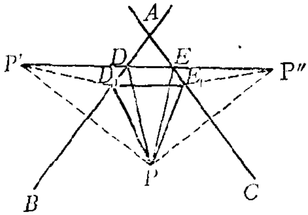

图 6

$PD+DE+PE=P'D+DE+EP''=P'P''$.

$PD_1+D_1E_1+PE_1=P'D_1+D_1E_1+E_1P''$.

∵ 两点之间，线段最短.

∴ D、E点符合要求.

例 3 下图$ABCD$是一个康乐球台，P是康乐球. 现在人站在BC边击球. 问应自何处并按什么方向击球，才能使球经DC边反射后击AD边，又经AD边反射后击AB边，最后由AB边反射后落入$\angle C$内部的空洞内?

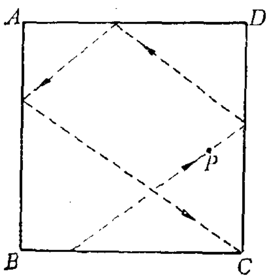

图 7

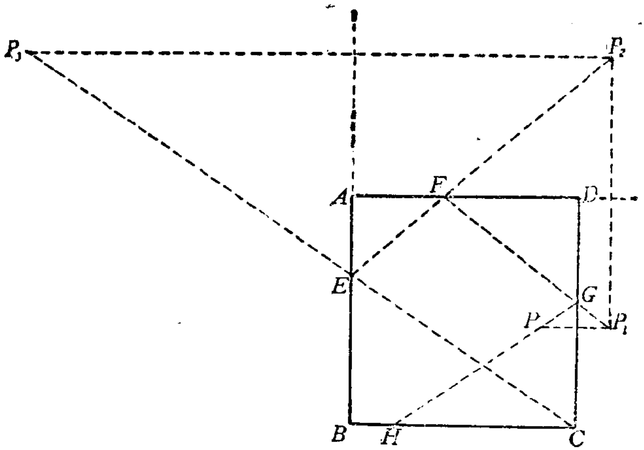

图 8

解 取P点关于直线DC的对称点P_1，次取P_1关于直线AD的对称点P_2，再取P_2关于直线AB的对称点P_3。连P_3C交AB于E，连EP_2交AD于F，连FP_1交DC于G。连GP并延长交BC于H。H点就是此人击球的位置，HG就是击球的方向。

答：自H点沿HG方向击球。

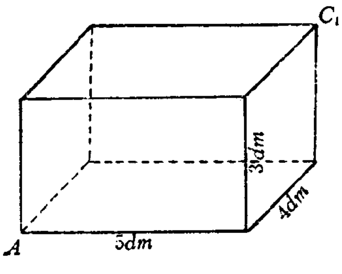

图 9

例 4 左图是一个长方体形的木块。如果在A处有一只蚂蚁，它想从A点顺着木块表面爬到C_1点，应该沿着怎样的路线爬上去最近？(假设长方体的长为$5dm$，宽$4dm$，高$3dm$。)

解 蚂蚁要想从A点爬

到 C_1 点，因为木块是实心的，只能沿长方体表面爬，而不能从长方体内部爬。

在长方体表面上，从 A 点到 C_1 点的路线有无数条，但总不外乎以下三类：

第一类：从侧面 A_1ABB_1 穿过侧棱 BB_1，由侧面 B_1BCC_1 爬到 C_1 点。

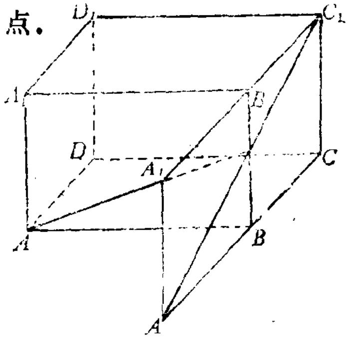

图 10

把侧面 A_1ABB_1 以 B_1B 为轴旋转 90°，从而使侧面 A_1ABB_1 与侧面 B_1BCC_1 在同一平面内。在这个平面内，根据"两点之间，线段最短"这条性质，从 A 到 C_1 以线段 AC_1 为最短。

由勾股定理可得

$$AC_1=\sqrt{(AB+BC)^2+CC_1^2}=\sqrt{(5+4)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}\approx 9.487(dm).$$

还有三种情况与此同属一类：

(1) 把侧面 B_1BCC_1 以 B_1B 为轴旋转 90°，从而使侧面 B_1BCC_1 与侧面 A_1ABB_1 在同一平面内。在这个平面内可求得从 A 到 C_1 的最短距离线段 AC_1 的长 $\sqrt{90}dm$。

(2) 把侧面 A_1ADD_1 以 D_1D 为轴旋转 90°，从而使侧

面 A_1ADD_1 与侧面 D_1DCC_1 在同一个平面内.在这个平面内可求得从 A 到 C_1 最短距离线段 AC_1 的长也是 $\sqrt{90}dm$。

(3) 把侧面 D_1DCC_1 以 D_1D 为轴旋转 90°，从而使侧面 D_1DCC_1 和侧面 A_1ADD_1 在同一个平面内.在这个平面内可求得从 A 到 C_1 最短矩离线段 AC_1 的长仍然是 $\sqrt{90}dm$。

这三个图形以及计算的式子，留给读者自己去完成。

第二类： 从侧面 A_1ADD_1 穿过棱 A_1D_1，由顶上平面 $A_1B_1C_1D_1$ 爬向 C_1 点。

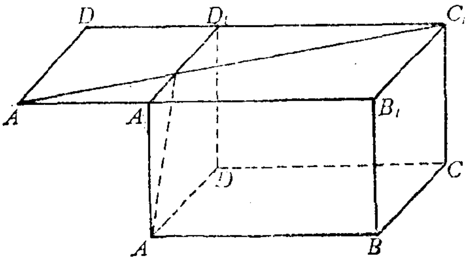

图 11

仿照上法，经过旋转、摊平，运用勾股定理可得

$$AC_1=\sqrt{(AA_1+A_1B_1)^2+B_1C_1{}^2}=\sqrt{(3+5)^2+4^2}$$
$$=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}\approx 8.944(dm)。$$

还有三种情形与此同属一类：

(1) 将平面 $A_1B_1C_1D_1$ 以 A_1D_1 为轴旋转 90°，从而使侧面 A_1ADD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 在同一个平面内.在这个平面内可求得从 A 到 C_1 最短距离线段 AC_1 的长为 $\sqrt{80}dm$。

(2) 将侧面 B_1BCC_1 以 BC 为轴旋转 90°，使平面 $ABCD$ 与侧面 B_1BCC_1 成为一个平面。在这个平面内可求得从 A 到 C_1 最短距离线段 AC_1 的长也为 $\sqrt{80}dm$。

（3）将平面$ABCD$以BC为轴旋转90°，使侧面B_1BCC_1与平面$ABCD$在同一个平面内．在这个平面内可求得从A到C_1最短距离线段AC_1的长仍为$\sqrt{80}dm$．

这三个图形以及计算的式子，留给读者自己去完成．

第三类：　从侧面A_1ABB_1穿过棱A_1B_1，由顶上的平面$A_1B_1C_1D_1$爬向C_1点．

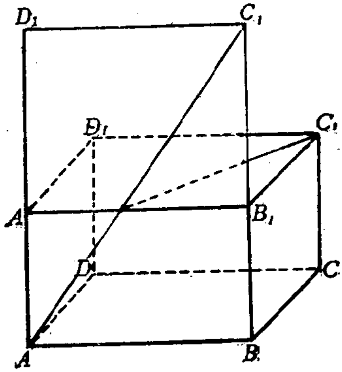

图 12

如法旋转、摊平，可算得

$$AC_1=\sqrt{AB^2+(BB_1+B_1C_1)^2}=\sqrt{5^2+(3+4)^2}$$
$$=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}\approx8.602(dm).$$

还有三种情况与此同属一类：

（1）把侧面A_1ABB_1以A_1B_1为轴旋转90°，从而使侧面A_1ABB_1与顶上平面$A_1B_1C_1D_1$在同一个平面内．在这个平面内可求得从A到C_1的最短距离线段AC_1的长$\sqrt{74}dm$．

（2）把侧面D_1D_1CC以DC为轴旋转90°，从而使侧面A_1ABB_1与底平面$ABCD$在同一个平面内．在这个平面内可求得从A到C_1的最短距离线段AC_1的长也是$\sqrt{74}dm$．

（3）把底平面 $ABCD$ 以 DC 为轴旋转 $90°$，从而使它与侧面 D_1DCC_1 在同一个平面内。在这个平面内可求得从 A 到 C_1 的最短距离线段 AC_1 的长仍为 $\sqrt{74}dm$。

这三个图形以及计算的式子，留给读者自己去完成。

总之，从 A 到 C_1 的路线可以有无穷多条．以上所列十二种情况共分三类，皆属极小值；而其中以第三类路线最短。

答：蚂蚁从侧面 A_1ABB_1 穿过棱 A_1B_1，由顶上平面 $A_1B_1C_1D_1$ 爬到 C_1 点，最短路线长约 $8.602dm$。

例 5　在锐角三角形内部求一点，使这一点与锐角三角形三顶点的距离之和最小。

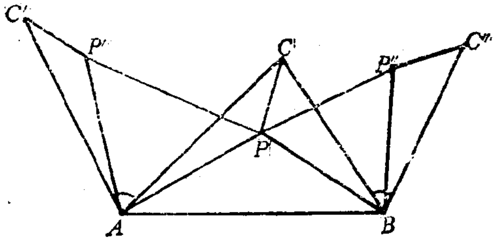

图 13

分析　设 P 为锐角$\triangle ABC$ 内任一点．把$\triangle ACP$ 绕 A 旋转$60°$到$\triangle AC'P'$的位置，则有

$$C'P'=CP.$$

在$\triangle APP'$中，$\because\quad AP=AP'$，

$\therefore\quad \triangle APP'$ 是等腰三角形。

又　$\because\quad \angle PAP'=60°$，$\therefore\quad \triangle APP'$是等边三角形。

$\therefore\qquad\qquad PP'=AP.$

$\therefore\quad$ 折线 $BPP'C'$ 是 P 点到三个顶点的距离之和，且点 C' 和 P 点的位置无关。

对应于P点的不同位置，最短路线是线段BC'。所以，到三角形三顶点距离和为最小的点P_0必在BC'上。

解 在$\triangle ABC$内任取一点P。连PA，PB，PC。

以A点为中心，把$\triangle APC$旋转60°至$\triangle AP'C'$的位置。再以B点为中心，把$\triangle BPC$旋转60°至$\triangle BP''C''$的位置。

连接BC'、AC''，相交于P_0，P_0即为所求。

下面我们讲一下计算平面内两点间的距离公式。

大家知道，当确定一个直角坐标系以后，平面内任意一点的位置可以用坐标来表示。

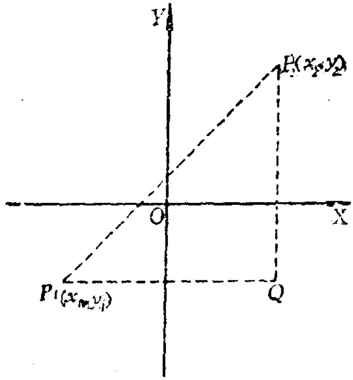

图 14

假设$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$是坐标平面内的任意两点。由图形根据勾股定理不难得到

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2\\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2\\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.\end{aligned}$$

由此得到两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$间的距离公式：