现代数学基础丛书 86

强偏差定理与分析方法

刘 文 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书　　86

强偏差定理与分析方法

刘　文　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书论述了强偏差定理与分析方法，内容包括：强极限定理分析方法的基本思想，非齐次马尔可夫链的强极限定理，关于乘积分布的强偏差定理，关于马尔可夫型分布的强偏差定理，强偏差定理中的母函数方法，关于赌博系统的若干强极限定理，连续型及任意随机变量序列的强极限定理，树上马尔可夫链场的若干极限性质.

本书适合于高等学校概率论专业、数学专业和应用数学专业的大学生、研究生及数学研究工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

强偏差定理与分析方法/刘文著. —北京：科学出版社，2003
(现代数学基础丛书；86)

ISBN 7-03-011562-7

Ⅰ.强… Ⅱ.刘… Ⅲ.①偏差(数学)-定理 ②偏差(数学)-分析方法 Ⅳ.O211.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 048676 号

责任编辑：毕 颖 刘嘉善 / 责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 9 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2003 年 9 月第一次印刷 印张：21 1/4
印数：1—2 500 字数：403 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序　言

20 世纪 70 年代末，作者在研究实数展式的概率性质和马尔可夫链的强大数定律时，提出了一种研究强极限定理的分析方法. 这个方法的要点是用区间剖分法在概率空间 $([0,1),\mathcal{F},P)$(其中 $\mathcal{F}$ 为 $[0,1)$ 中的 Lebesgue 可测集的全体， P 为 Lebesgue 测度）中给出随机变量序列的一种实现，再构造依赖于一个参数的单调函数，并应用 Lebesgue 关于单调函数可微性的定理证明某些极限 a.s. 存在，然后通过纯分析运算来证明所需的结论. 在其后的研究中，作者又将这种方法和母函数、矩母函数、条件矩母函数、Laplace 变换等工具以及测度的网微分法和鞅方法结合起来，扩大了方法的应用范围. 在此基础上，通过引进似然比作为随机变量序列相对于不同测度的差异的一种度量，作者建立了一类新型定理 —— 强偏差定理 (也称为小偏差定理), 将概率论中的强极限定理推广到用不等式表示的情形.

近 10 年来, 作者和杨卫国、刘国欣、陈爽、刘自宽、汪忠志、张丽娜、陈志刚、刘玉灿、王金亭、王玉津、王丽英诸同志利用这种方法在强偏差定理、 Shannon-McMillan 定理、赌博系统、任意相依随机变量序列的强极限定理、马尔可夫链及树上马尔可夫链场的强极限定理等领域做了不少工作. 本书的目的就是要对这方面的研究作一总结，使之系统化，并结合作者的最新研究，对过去的某些结果作出改进.

本书共分 8 章. 第一章通过给出几个强极限定理的新证明来阐述分析方法的基本思想. 第二章给出非齐次马尔可夫链在区间 $[0,1)$ 上的实现，并在此基础上用分析方法研究其极限性质. 第三章和第四章分别研究关于乘积分布和马尔可夫型分布的强偏差定理. 第五章利用矩母函数和条件矩母函数的工具，研究强偏差定理和随机偏差定理. 第六章阐述赌博系统强极限定理的分析方法，并讨论了具有变化赌注的公平赌博问题. 第七章介绍连续型随机变量和任意随机变量序列的强偏差定理的概念和基本思想，证明了几个相对于某些特殊型连续分布的强偏差定理，并给出在这类定理中应用 Laplace 变换的一种途径. 第八章讨论树上马尔可夫链场的若干极限性质，并将强偏差定理的概念推广到 Cayley 树上马尔可夫链场的情况.

作者衷心感谢导师王梓坤院士数十年来对作者的帮助和鼓励. 王老师对作者的研究工作和学术生涯, 给予深刻的启迪和影响, 本书就是在他的关心下完成的. 学友杨向群、沈世镒、吴荣、李志阐、戴永隆、侯振廷、韦博成、吴让泉、林春土、孟庆生、张文修、马逢时、叶中行、史道济诸位教授对作者的工作一向给予支持和鼓励，作者在此谨致谢意. 作者十分感谢杨卫国教授，本书所总结的研究成果有

很多是作者和他合作得到的. 作者感谢中国科学院科学出版基金委员会对本书出版的大力支持.

本书是作者主持的国家自然科学基金课题“相依变量的极限理论”的研究及其前期工作的一个总结, 希望它的出版能起到抛砖引玉的作用. 诚恳欢迎读者对本书的缺点、错误提出批评建议.

刘　文

2002 年 11 月于天津

目 录

第一章 强极限定理分析方法的基本思想

作者在研究实数展式的概率性质和马尔可夫链的强大数定律时，提出了一种研究强极限定理的分析方法. 这个方法的要点是用区间剖分法在概率空间 $([0,1),\mathcal{F},P)$ (其中 $\mathcal{F}$ 为 $[0,1)$ 中 Lebesgue 可测集的全体， P 为 Lebesgue 测度) 中给出随机变量序列的一种实现，再构造依赖于一个参数的单调函数，并应用 Lebesgue 关于单调函数可微性的定理来证明某些极限 a.s. 存在，然后通过纯分析运算来证明所需的结论. 本章中我们通过几个具体问题来说明这一方法.

§1.1 Borel 强大数定律的分析证明

设 $S_n(n\geq 1)$ 是成功概率为 $p(0<p<1)$ 的 n 次 Bernouli 试验中出现成功的次数，则 Borel 强大数定律断言

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=p\right)=1.$$

这一结果通常是应用强有力的概率工具或组合分析的方法来证明的 (参见 Chow 与 Teicher 1988, p.42, Chung 1974, p.97 及 Rohatgi 1976, p.273). Tomkins(1984) 及 Teylor 与 Hu(1987) 给出的证明虽比通常证明要简单，但他们仍用到基本的概率结果. 本节中，我们将给出 Borel 强大数定律一种新的分析证明 (见刘文 1991b)，其要点是将关于单调函数几乎处处可微的 Lebesgue 定理 (参见 Hildebrandt 1963, p.358) 应用于 a.s. 收敛的研究.

引理 1.1.1 设 f 是 $[a,b]$ 上的实值函数， $\{a_n\},\{b_n\}$ 是任意两个数列，满足条件：

$$a\leq a_n\leq x\leq b_n\leq b,\ a_n\neq b_n,\ 当n\to\infty时,\ a_n\to x,\ b_n\to x.$$

如果 f 在 $x\in[a,b]$ 处可微，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x).$$

证 不妨设 $a_n<x<b_n$, 令 $\lambda_n=(b_n-x)/(b_n-a_n)$, 则 $0<\lambda_n<1$ 且

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x)=\lambda_n\left[\frac{f(b_n)-f(x)}{b_n-x}-f'(x)\right]$$

$$+(1-\lambda_n)\left[\frac{f(b_n)-f(x)}{a_n-x}-f'(x)\right].$$

由此即得引理得结论.

首先我们来构造 Bernouli 序列的一个分析模型.

设 $0<p<1$. 按比例 $(1-p):p$ 将区间 $[0,1]$ 分成两个闭区间 $D_0=[0,1-p], D_1=[1-p,1]$. 这两个区间都称为一阶 D 区间. 一般地, 将每个 n 阶 D 区间 $D_{x_1\cdots x_n}(x_i=0,1;i=1,2,\cdots,n)$ 都按比例 $(1-p):p$ 分成两个闭区间 $D_{x_1\cdots x_n0}$ 与 $D_{x_1\cdots x_n1}$ 就得到 $n+1$ 阶 D 区间. 依此类推. 上述程序称为按比例 $(1-p):p$ 逐次分割区间 $[0,1]$.

易知, 对于由 0 与 1 组成的任一无穷序列 $\{x_n\}$, 区间套 $D_{x_1}\subset D_{x_1x_2}\subset D_{x_1x_2x_3}\subset\cdots$ 有惟一的公共点 $\omega\in[0,1]$, 即 $\bigcap_{n=1}^{\infty}D_{x_1\cdots x_n}=\{\omega\}$, 我们用 $0.x_1x_2\cdots x_n\cdots(D)$ 来表示这个点. 反之, 对于 $[0,1]$ 中的任一点, 都存在相应的由 0 与 1 组成的序列 $\{x_n\}$, 使得

$$\omega=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots(D). \tag{1.1.1}$$

如果 ω 是 D 区间的端点且 $\omega\neq 0$ 与 1, 则相应于 ω 的序列有两个, 这时我们约定 (1.1.1) 取末尾各数字恒为 0 的形式.

(1.1.1) 称为 ω 的广义二进展式. 取 $([0,1),\mathcal{F},P)$ 为所考虑的概率空间, 其中 $\mathcal{F}$ 为 $[0,1]$ 中 Lebesgue 可测集的全体, P 为 Lebesgue 测度, 则 (1.1.1) 的位标序列 $\{x_n\}$ 就是服从成功概率为 p(即参数为 p) 的 Bernouli 分布的独立随机变量序列.

设 $S_n(\omega)$ 是 (1.1.1) 的前 n 个位标中数字 1 的个数, $D_{x_1\cdots x_n}$ 是包含 ω 的 n 阶 D 区间, 则

$$S_n(\omega)=x_1+\cdots+x_n,$$

$$P(D_{x_1\cdots x_n})=p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}. \tag{1.1.2}$$

Borel 强大数定律可表示为

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}=p)=1. \tag{1.1.3}$$

下面我们来证明这个定律. 为此先引进辅助函数. 设 $0<r<1$, 按比例 $(1-r):r$ 逐次分割区间 $[0,1]$, 得到另一种 n 阶区间 $\Delta_{y_1y_2\cdots y_n}(y_i=0,1;i=1,2,\cdots,n)$, 我们称它们为 n 阶 Δ 区间. 与 (1.1.2) 类似, 每个 $y\in[0,1]$ 可表示为

$$y=0.y_1y_2\cdots y_n\cdots(\Delta), \tag{1.1.4}$$

其中 $\{y\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_{y_1\cdots y_n}$. 设 $\sigma_n(y)$ 是 (1.1.4) 的前 n 个位标中数字 1 的个数, $\Delta_{y_1\cdots y_n}$ 是包含 y 的 n 阶 Δ 区间, 则

$$\sigma_n(y)=y_1+\cdots+y_n,$$

$$P(\Delta_{y_1\cdots y_n}) = r^{\sigma_n(y)}(1-r)^{n-\sigma_n(y)}. \tag{1.1.5}$$

设 $\omega\in[0,1]$, 且由 (1.1.1) 表示. 令

$$f_r(\omega) = 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots(\Delta). \tag{1.1.6}$$

易知 f_r 是值域为 $[0,1]$ 的严格增函数, 因而它也是连续的. 设 $D_{x_1\cdots x_n}$ 是包含 ω 的 n 阶 D 区间, $D^-_{x_1\cdots x_n}$ 与 $D^+_{x_1\cdots x_n}$ 分别为 $D_{x_1\cdots x_n}$ 的左右端点. 令

$$t_n(r,x) = \frac{f_r(D^+_{x_1\cdots x_n}) - f_r(D^-_{x_1\cdots x_n})}{D^+_{x_1\cdots x_n} - D^-_{x_1\cdots x_n}} = \frac{P(\Delta_{x_1\cdots x_n})}{P(D_{x_1\cdots x_n})}.$$

由于当 $y = f_r(\omega)$ 时, $\sigma_n(y) = S_n(\omega)$. 故由 (1.1.2) 及 (1.1.5), 有

$$t_n(r,\omega) = \frac{r^{S_n(\omega)}(1-r)^{n-S_n(\omega)}}{p^{S_n(\omega)}(1-p)^{n-S_n(\omega)}} = \left(\frac{r}{p}\right)^{S_n(\omega)}\left(\frac{1-r}{1-p}\right)^{n-S_n(\omega)}. \tag{1.1.7}$$

设 f_r 的可微点的全体为 $A(r)$, 则由 Lebesgue 定理有 $P(A(r)) = 1$. 根据引理 1.1.1, 有

$$\lim_{n\to\infty} t_n(r,\omega) = f'_r(\omega) < \infty,\ \omega\in A(r).$$

由此有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln t_n(r,\omega) \le 0,\ \omega\in A(r). \tag{1.1.8}$$

由 (1.1.7) 与 (1.1.8), 有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}\ln\frac{r(1-p)}{p(1-r)} \le \ln\frac{1-p}{1-r},\quad \omega\in A(r). \tag{1.1.9}$$

取 $p<r<1$, 则

$$\frac{r(1-p)}{p(1-r)} > 1,\ \frac{1-p}{1-r} > 1.$$

于是由 (1.1.9), 有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n} \le \ln\frac{1-p}{1-r}\bigg/\ln\frac{r(1-p)}{p(1-r)},\quad \omega\in A(r). \tag{1.1.10}$$

设 $r_k\in(p,1)$, $r_k\to p(k\to\infty)$. 令 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A(r_k)$, 则当 $\omega\in A$ 时对一切 k 由 (1.1.10), 有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n} \le \ln\frac{1-p}{1-r_k}\bigg/\ln\frac{r_k(1-p)}{p(1-r_k)}. \tag{1.1.11}$$

又

$$\lim_{k\to\infty}\left[\ln\frac{1-p}{1-r_k}\bigg/\ln\frac{r_k(1-p)}{p(1-r_k)}\right] = \lim_{x\to p}\left[\ln\frac{1-p}{1-x}\bigg/\ln\frac{x(1-p)}{p(1-x)}\right] = p, \tag{1.1.12}$$

由 (1.1.10) 与 (1.1.12), 得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}\le p,\quad \omega\in A. \tag{1.1.13}$$

设 $\lambda_k\in(0,p)$, $\lambda_k\to p$, 令 $B=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A(\lambda_k)$. 同理可证,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}\ge p,\quad \omega\in B. \tag{1.1.14}$$

令 $C=A\bigcap B$. 由 (1.1.13) 与 (1.1.14), 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}=p,\quad \omega\in C. \tag{1.1.15}$$

由于 $P(C)=1$, 故由 (1.1.15) 知 (1.1.3) 成立. 证毕.

注 1.1.1　虽然本文的讨论是在特殊的概率空间中进行的, 但这并不影响结果的一般性. 这是因为随机变量序列的任何概率性质都可以通过其有限维联合分布族来表达 (参见 Loéve 1965, 中译本 p.185).

§1.2　广义 Cantor 展式及其概率性质

本节引进了广义 Cantor 展式的概念, 并讨论其概率性质, 所得结果是 Renyi 结果的推广.

设

$$q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots(q_n\ge 2), \tag{1.2.1}$$

是一正整数列,

$$p_{nj},\quad n\ge 1,\quad 0\le j\le q_n-1 \tag{1.2.2}$$

是一二重数列, 且满足条件:

$$p_{nj}>0,\quad \sum_{j=0}^{q_n-1}p_{nj}=1. \tag{1.2.3}$$

将区间 $[0,1]$ 按诸 $p_{1j}(j=0,1,\cdots,q_1-1)$ 的比例分成 q_1 个闭区间:

$$D_0=[0,\ p_{10}],D_1=[p_{10},\ p_{10}+p_{11}],\cdots,D_{q_1-1}=[1-p_{1,q_1-1},\ 1],$$

这些区间都称为 1 阶 D 区间. 一般地设 $q_1q_2\cdots q_n$ 个 n 阶 D 区间 $\{D_{x_1\cdots x_n},0\le x_i\le q_i-1,1\le i\le n\}$ 已经定义, 将 $D_{x_1\cdots x_n}$ 按诸 $p_{n+1,j}(j=0,1,\cdots,q_{n+1}-1)$ 的

比例分成 q_{n+1} 个闭区间 $D_{x_1\cdots x_n x_{n+1}}(x_{n+1}=0,1,\cdots,q_{n+1}-1)$, 就得到 $n+1$ 阶 D 区间. 设 P 表示 Lebesgue 测度, 由归纳法易知

$$P(D_{x_1\cdots x_n})=\prod_{i=1}^{n}p_{ix_i}. \tag{1.2.4}$$

令 d_n 表示 n 阶 D 区间的最大长度, 即

$$d_n=\max\{P(D_{x_1\cdots x_n}),0\le x_i\le q_i-1,1\le i\le n\}.$$

设 $d_n\to 0\ (n\to\infty)$. 易知对于满足条件

$$0\le x_n\le q_n-1,\ \ n=1,2,\cdots \tag{1.2.5}$$

的任意正整数列 $\{x_n\}(n\ge 1)$, 区间套 $D_{x_1}\supset D_{x_1x_2}\supset D_{x_1x_2x_3}\supset\cdots$ 有惟一的公共点 $\omega\in[0,1]$, 即 $\{\omega\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}D_{x_1\cdots x_n}$. 用 $0.x_1x_2\cdots x_n\cdots(D)$ 来表示这个点. 反之, 对于 $[0,1]$ 中的任一点 ω, 都存在满足条件 (1.2.5) 的相应的正整数列 $\{x_n\}$, 使得

$$\omega=0.x_1x_2\ldots x_n\cdots(D). \tag{1.2.6}$$

如果 ω 是某个 D 区间的端点且 $\omega\ne 0$ 与 1, 则相应于 ω 的序列有两个. 为确定起见, 我们约定 (1.2.6) 取末尾各数字恒为 0 的形式.

(1.2.6) 称为 ω 的由二重数列 (1.2.2) 产生的广义 Cantor 展式, x_n 称为其第 n 个位标. 若

$$p_{nj}=\frac{1}{q_n},\ \ n\ge 1,\ \ 0\le j\le q_n-1,$$

则 (1.2.6) 就是通常的 Cantor 展式.

为以下证明的需要, 先构造一个辅助函数. 设

$$r_{nj},\ \ n\ge 1,\ \ 0\le j\le q_n-1 \tag{1.2.7}$$

是满足条件

$$r_{nj}>0,\ \ \sum_{j=0}^{q_n-1}r_{nj}=1 \tag{1.2.8}$$

的另一二重数列, 类似地按 (1.2.7) 中各元素的比例分割区间 $[0,1]$ 可得各阶 Δ 区间:

$$\Delta_{x_1\cdots x_n}(0\le x_i\le q_i-1,1\le i\le n,n\ge 1),$$

且有

$$P(\Delta_{x_1\cdots x_n})=\prod_{i=1}^{n}r_{ix_i}. \tag{1.2.9}$$

分别记 $D_{x_1\cdots x_n}$ 与 $\Delta_{x_1\cdots x_n}$ 的左右端点为 $D^-_{x_1\cdots x_n}, D^+_{x_1\cdots x_n}, \Delta^-_{x_1\cdots x_n}, \Delta^+_{x_1\cdots x_n}$，并记各阶 D 区间的端点的集合为 Q，在 Q 上定义函数如下：

$$f(D^-_{x_1\cdots x_n}) = \Delta^-_{x_1\cdots x_n}, f(D^+_{x_1\cdots x_n}) = \Delta^+_{x_1\cdots x_n}. \tag{1.2.10}$$

当 $\omega \in [0,1] - Q$ 时，令

$$f(\omega) = \sup\{f(t), t \in Q \cap [0,\omega]\}. \tag{1.2.11}$$

这样就将 f 开拓到 $[0,1]$ 上．显然 f 是 $[0,1]$ 上的增函数．令

$$t_n(\omega) = \frac{P(\Delta_{x_1\cdots x_n})}{P(D_{x_1\cdots x_n})},\quad \omega \in D_{x_1\cdots x_n}. \tag{1.2.12}$$

由 (1.2.4) 及 (1.2.9)—(1.2.12), 有

$$\begin{aligned} t_n(\omega) &= \frac{f(D^+_{x_1\cdots x_n}) - f(D^-_{x_1\cdots x_n})}{D^+_{x_1\cdots x_n} - D^-_{x_1\cdots x_n}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{r_{ix_i}}{p_{ix_i}},\quad \omega \in D_{x_1\cdots x_n}. \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

设 $\lambda > 0$ 为常数，k 为非负整数．选取 (1.2.7) 中的 $r_{ij}(i \geq 1, 0 \leq j \leq q_i - 1)$ 如下：当 $q_i > k$ 时，令

$$r_{ik} = \frac{\lambda p_{ik}}{1 + (\lambda - 1)p_{ik}} \tag{1.2.14}$$

(易见 $0 < r_{ik} < 1$), 并令

$$r_{ij} = \frac{1 - r_{ik}}{1 - p_{ik}} p_{ij},\quad 0 \leq j \leq q_i - 1, j \neq k; \tag{1.2.15}$$

当 $q_i \leq k$ 时，令

$$r_{ij} = p_{ij},\quad 0 \leq j \leq q_i - 1. \tag{1.2.16}$$

当 r_{ij} 由 (1.2.14)—(1.2.16) 定义时，并记由 (1.2.10) 与 (1.2.11) 定义的函数为 f_λ，改记 (1.2.12) 中的 $t_n(\omega)$ 为 $t_n(\lambda,\omega)$.

引理 1.2.1 设 $\omega \in [0,1]$,且由 (1.2.6) 表示, $N_n(k,\omega)$ 是 (1.2.6) 的前 n 个位标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中出现 k 的次数，则

$$t_n(\lambda,\omega) = \lambda^{N_n(k,\omega)} \prod_{\substack{i \leq n \\ q_i > k}} \frac{1}{1 + (\lambda - 1)p_{ik}}, \tag{1.2.17}$$

证 (1.2.13) 中的诸因子有以下几种情况：

1)　当 $q_i > k, x_i = k$ 时，由 (1.2.14), 有

$$\frac{r_{ix_i}}{p_{ix_i}} = \frac{r_{ik}}{p_{ik}} = \frac{\lambda}{1+(\lambda-1)p_{ik}}; \tag{1.2.18}$$

2)　当 $q_i > k, x_i \neq k$ 时，由 (1.2.15) 及 (1.2.14), 有

$$\frac{r_{ix_i}}{p_{ix_i}} = \frac{1-r_{ik}}{1-p_{ik}} = \frac{1}{1+(\lambda-1)p_{ik}}; \tag{1.2.19}$$

3)　当 $q_i \leq k$ 时，由 (1.2.16), 有

$$\frac{r_{ix_i}}{p_{ix_i}} = 1. \tag{1.2.20}$$

以 (1.2.18)—(1.2.20) 代入 (1.2.13), 即得 (1.2.17).

定理 1.2.1(刘文、杨卫国 1991)　设 $\omega \in [0,1]$ 且由 (1.2.6) 表示，$N_n(k,\omega)$ 如前定义. 若

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i\leq n \\ q_i>k}} p_{ik} = \infty, \tag{1.2.21}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(k,\omega)}{\sum\limits_{\substack{i\leq n \\ q_i>k}} p_{ik}} = 1 \quad \text{a.s.}, \quad \omega \in [0,1]. \tag{1.2.22}$$

证　设 f_λ 的可微点的全体为 $A(\lambda,k)$, 则由单调函数导数存在定理知 $P(A(\lambda,k)) = 1$. 根据导数的性质，有

$$\lim_{n\to\infty} t_n(\lambda,\omega) = f'_\lambda(\omega) < \infty, \ \ \omega \in A(\lambda,k). \tag{1.2.23}$$

令 $\sigma_n(k) = \sum\limits_{\substack{i\leq n \\ q_i>k}} p_{ik}$, 则由 (1.2.21), 有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(k) = \infty. \tag{1.2.24}$$

由 (1.2.17), (1.2.23) 与 (1.2.24), 有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n(k)}\left[N_n(k,\omega)\ln\lambda - \sum_{\substack{i\leq n \\ q_i>k}} \ln(1+(\lambda-1)p_{nk})\right] \leq 0, \ \ \omega \in A(\lambda,k). \tag{1.2.25}$$

取 $\lambda > 1$. 将 (1.2.25) 两端同除以 $\ln\lambda$, 得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n(k)}\left[N_n(k,\omega) - \sum_{\substack{i\leq n \\ q_i>k}} \frac{\ln(1+(\lambda-1)p_{ik})}{\ln\lambda}\right] \leq 0, \ \ \omega \in A(\lambda,k). \tag{1.2.26}$$

由 (1.2.26) 及不等式 $\ln(1+x) < x \quad (x > 0)$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n(k)}\left[N_n(k,\omega) - \sum_{\substack{i\le n\\ q_i>k}} \frac{(\lambda-1)p_{ik}}{\ln\lambda}\right] \le 0, \quad \omega \in A(\lambda,k),$$

即

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{N_n(k,\omega)}{\sigma_n(k)} - \frac{\lambda-1}{\ln\lambda}\right] \le 0, \quad \omega \in A(\lambda,k). \tag{1.2.27}$$

取 $\lambda_i > 1(i=1,2,\cdots)$ 使 $\lambda_i \to 1+0(i\to\infty)$. 令 $A^*(k) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A(\lambda_i,k)$, 则对一切 i 由 (1.2.27), 有

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{N_n(k,\omega)}{\sigma_n(k)} - \frac{\lambda_i-1}{\ln\lambda_i}\right] \le 0, \quad \omega \in A^*(k). \tag{1.2.28}$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\lambda_i-1}{\ln\lambda_i} = 1$, 故由 (1.2.28), 有

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{N_n(k,\omega)}{\sigma_n(k)} - 1\right] \le 0, \quad \omega \in A^*(k). \tag{1.2.29}$$

当 $0 < \lambda < 1$ 时, 将 (1.2.25) 两端同除以 $\ln\lambda$, 得

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n(k)}\left[N_n(k,\omega) - \sum_{\substack{i\le n\\ q_i>k}} \frac{\ln(1+(\lambda-1)p_{ik})}{\ln\lambda}\right] \ge 0, \quad \omega \in A(\lambda,k). \tag{1.2.30}$$

由 (1.2.30) 及不等式 $\ln(1+x) < x(-1 < x < 0)$ 并注意到 $\ln\lambda < 0$, 有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n(k)}\left[N_n(k,\omega) - \sum_{\substack{i\le n\\ q_i>k}} \frac{(\lambda-1)p_{ik}}{\ln\lambda}\right] \ge 0, \quad \omega \in A(\lambda,k),$$

即

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{N_n(k,\omega)}{\sigma_n(k)} - \frac{\lambda-1}{\ln\lambda}\right] \ge 0, \quad \omega \in A(\lambda,k). \tag{1.2.31}$$

与 (1.2.29) 类似, 取 $0 < \tau_i < 1(i=1,2,\cdots)$ 使 $\tau_i \to 1-0(i\to\infty)$, 并令 $A_*(k) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A(\tau_i,k)$, 则由 (1.2.31), 有

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{N_n(k,\omega)}{\sigma_n(k)} - 1\right] \ge 0, \quad \omega \in A_*(k). \tag{1.2.32}$$

令 $A(k) = A^*(k)\bigcap A_*(k)$, 则由 (1.2.29) 与 (1.2.32), 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(k,\omega)}{\sigma_n(k)} - 1 = 0, \quad \omega \in A(k). \tag{1.2.33}$$

由于 $P(A(k))=1$, 故由 (1.2.33) 知 (1.2.22) 成立. 证毕.

在上述定理中令 $p_{nj}=\frac{1}{q_n}(0\le j\le q_n-1)$ 即得如下 Renyi(1958) 中的结果:

推论 1.2.1　设 $\omega\in[0,1]$,

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n(\omega)}{q_1q_2\cdots q_n},\quad 0\le x_n\le q_n-1$$

是其 Cantor 展式, k 为非负整数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\substack{i\le n\\ q_i>k}}\frac{1}{q_i}=\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(k,\omega)}{\sum\limits_{\substack{i\le n\\ q_i>k}}\frac{1}{q_i}}=1\qquad\text{a.s.},\quad \omega\in[0,1].$$

§1.3 Cantor 型随机变量序列的一个强极限定理的证明

令 $\{q_n,n\ge 0\}$ 是一列正整数, $I_n=\{0,1,\cdots,q_n\}$, $\{X_n,n\ge 0\}$ 是取值于 I_n 的一列随机变量, 并且对所有的 $x_i\in I_i,0\le i\le n$, 都有 $P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)>0$. 本文目的是要用分析方法给出上述 Cantor 型随机变量序列涉及条件期望的一个强极限定理的一种证明 (参见刘文 1994d).

定理 1.3.1　令 $\{q_n,n\ge 0\}$ 是一列正整数, $I_n=\{0,1,\cdots,q_n\}$, $\{X_n,n\ge 0\}$ 是一列随机变量, X_n 在 I_n 中取值, 并且

$$P(X_0=x_0,\cdots,X_n=x_n)=p(x_0,\cdots,x_n)>0,\quad x_i\in I_i,\quad 0\le i\le n. \tag{1.3.1}$$

如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_n^2/n^2<\infty, \tag{1.3.2}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X_i|X_0\cdots,X_{i-1})]=0\qquad\text{a.s.}. \tag{1.3.3}$$

证　我们取 $([0,1),\mathcal{F},P)$ 为所考虑的概率空间, 其 $\mathcal{F}$ 是 $[0,1)$ 区间上的 Lebesgue 可测集的全体, P 是 Lebesgue 测度. 在上述概率空间中我们首先给出一列具有分布 (1.3.1) 的随机变量. 把 $[0,1)$ 分割成 q_0+1 个左闭右开区间:

$$D_0=[0,p(0)),\ D_1=[p(0),p(0)+p(1)),\cdots.$$