

● 王光祖 著

人造金刚石探秘

—— 王光祖 论文集

*RENZAO JINGANGSHI TANMI
WANGGUANGZU LUNWENJI*

浙江大學出版社

人造金刚石探秘

——王光祖论文集

王光祖 著



浙江大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

人造金刚石探秘：王光祖论文集 / 王光祖著. —杭州：
浙江大学出版社，2001. 6
ISBN 7-308-02623-X

I . 人... II . 王... III . 金刚石—人工合成—研究
一文集 IV . TQ164. 8-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 85849 号

出版发行：浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail : zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址 : <http://www.zjupress.com>)

责任编辑：杜希武

排 版：浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷：浙江大学华家池印刷厂

经 销：浙江省新华书店

开 本：787mm×1092mm 1/16

印 张：18. 75

字 数：480 千

版 印 次：2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 7-308-02623-X/TQ · 023

印 数：0000—1270

定 价：50. 00 元



王光祖 教授

武汉大学毕业，中国超硬材料专家。

献给

中国超硬材料新千年



王光祖教授与杭州高发集团董事长胡建根（左二）展望超硬材料事业发展前景。



1999年7月，全国纳米结构金刚石发展研讨会。

刘永根（左一）原余杭市委书记 周文（左二）教授 原浙江省科委主任 王光祖教授（左三）
吴敏达（左四）原浙江省副省长、现浙江省经济建设咨询委员会主任
王启东（左五）原浙江省人大副主任 胡建根（左六）杭州高发集团董事长
严晓浪（左七）教授 浙江省科委主任
戴山（左八）全国超硬材料厂长经理协会秘书长



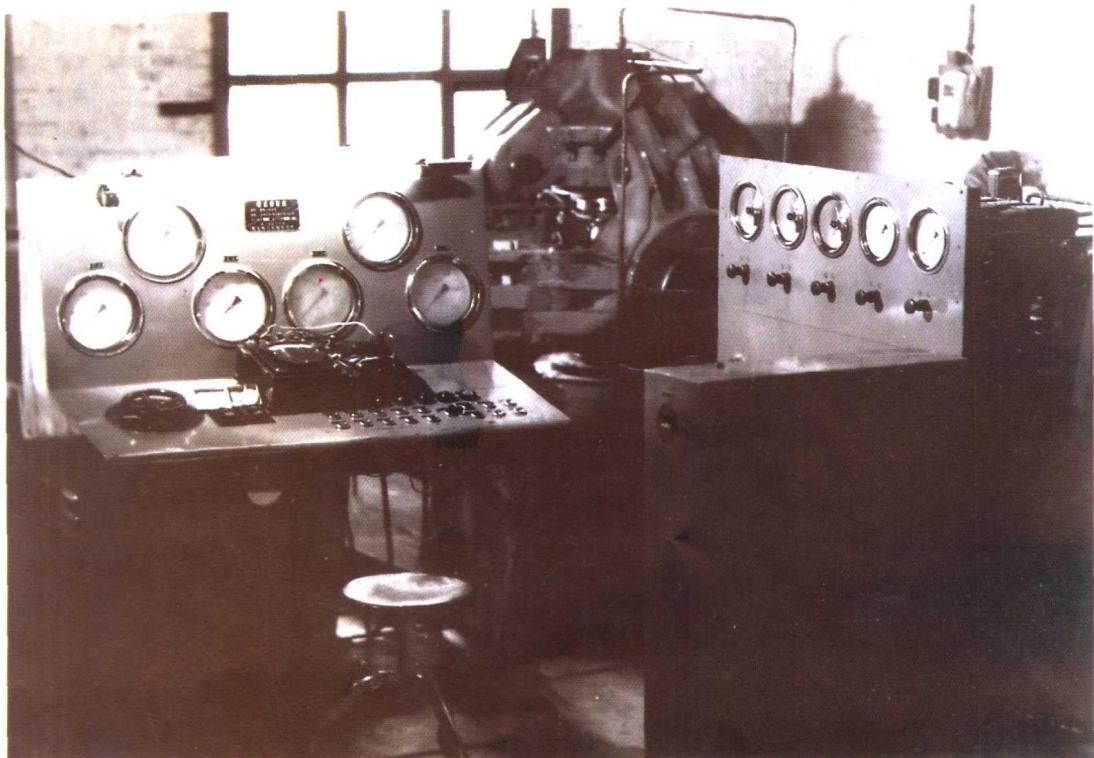
第一颗人造金刚石部分研制者参加1993年深圳中国超硬材料发展研讨会。

自左至右 卢飞雄 熊大和 王积方 王光祖 熊文松 胡恩良 沈主同 于鸿昌 李达明

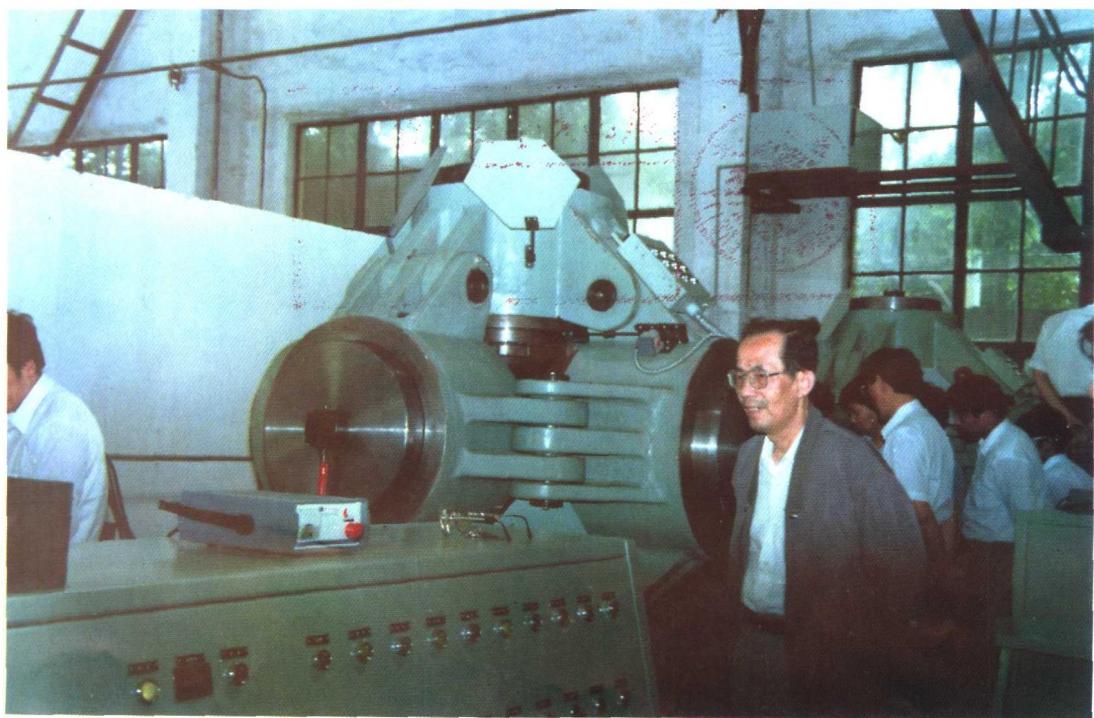


王光祖教授（左二）在河南新郑电碳厂指导工作。

厂长许留业（左一），副厂长柴世荣（左三）



中国第一台 $6 \times 6\text{MN}$ 铰链式“六面顶”压机。



王光祖教授在郑州磨料磨具磨削研究所生产车间现场。

序

王光祖教授,自 20 世纪 60 年代初的青年时期即投身于超硬材料生长的研究,其后参加了中国超硬材料产业化的全过程。从参加中国第一颗人造金刚石的研究与实践开始,王先生始终活跃于超硬材料科学研究的前沿,迄今已整整 40 年,享受国家有贡献专家的津贴。他在超硬材料行业是深受大家尊敬的一位辛勤的科研工作者。

这本书收集了王先生在人造金刚石领域的主要成果,凝聚了他丰富的实践经验和可贵的探索精神,以及对于中国今后在超硬材料的发展方面迈入世界强国的深沉思考。王先生的最大成功在于一直坚持“科学技术工作必须面向经济建设”的方针,他从事的研究工作都切合于人造金刚石的发展需要,反映的是中国人造金刚石事业从无到有、由小到大各个阶段向科研工作提出的课题和任务,对实际生产有着积极作用,因此,这本书是有的放矢的佳作。

人造金刚石问世已近半个世纪,由于其优越性能,应用领域仍在广度和深度上不断拓展,它在 21 世纪里对于传统工业的改造和现代工业的发展来说仍然是一项不可取代的材料,有着旺盛的生命力。因此,这本论文集的发表,对从事超硬材料工作的领导者、科技工作者仍具现实意义和极大的参考作用。对于超硬材料事业有兴趣的读者,也可作为一本教科书来读。

王先生已年过花甲,仍以进取精神将振兴和发展中国的金刚石工业作为己任,至今笔耕不辍,为行业的发展出力,这本书充分体现了他的拳拳报国之情。

苟清泉

2000 年 3 月 10 日于四川大学

前　　言

在人类的历史长河中，金刚石一直是一种稀有的宝石，象征高贵、美丽、圣洁，被皇家、宫廷和贵族作为瑰宝炫耀其地位而珍藏。人们构筑了神奇美丽的故事，充满了对它的幻想和无比的爱慕。进入工业时代后，发掘出的金刚石增多，碎粒的金刚石已应用于工业。但它毕竟是一种昂贵的、不可多得的奇特材料。后来，科学家在实验室里发现金刚石是由碳原子所构成的典型的原子晶体。由此，揭开了其神秘的面纱，打开了人们以人力制造它的闸门。

经过近百年的艰苦探索，1954年，美国通用电气公司宣告了在高温高压的条件下第一颗人造金刚石研制完成。1957年，在密执安州底特律建厂，开始了工业生产金刚石的新纪元。

我国继美国、瑞典、苏联、日本、英国之后，于1963年第六个独立生产开发出了人造金刚石，掌握了人工合成金刚石的技术。当时，我国的经济实力和科学技术还相对落后，金刚石作为战略物资还受到国外的封锁，而且，我国还是一个天然金刚石匮乏的国家，所以人造金刚石在我国的研制成功意义很大，是很了不起的。从人造金刚石在我国诞生，到它的大面积产业化，至今已37年了，超硬材料在中国已形成了一个高技术的产业，中国已成为人造金刚石的生产大国，这在中国材料发展史上是不多见的。

我国人造金刚石的科研立项始于1960年，本人有幸参与了研制和产业化的全过程，而且一干就是40年。伴随着超硬材料的发展，我享受过成功的喜悦，但更多的常常是彻夜不眠和食不甘味地苦思，参与了许多攻关实践和战斗。40年来为超硬材料事业我撰写了百余篇文章发表在多种刊物上，深入反映了我在超硬材料上的思索和认识，这也是我对超硬材料40年的情结。

值此新千年来临之际，金刚石以多种形态（膜体、纳米级）展示在人们面前，并以其优异的力学、电学、光学、声学等性能，进一步拓展了它的应用领域，显示了金刚石的旺盛生命力。面对新的挑战，我心潮澎湃，40年的笔下耕耘，不应是属于我个人的，应汇集成册作为铺路石，为从事超硬材料工作的工作者提供一本可供借鉴、可供阅读、可供参考的读物，让我们的事业发展得更快些、更好些。这一想法很快得到了杭州高发磨料磨具集团公司总经理胡建根、河南新郑电碳厂总经理许留业和中外合资无锡恒丰硬质合金制品有限公司总经理项品生的支持和赞许，并在经费上给予资助，得以完成了我的宿愿，在此深表感谢。

本书取名为“人造金刚石探秘——王光祖论文集”，在征集书名时得到了谢有赞教授、刘今教授、王治安教授和陶知耻教授的支持，以及耿直教授和卫风午高级工程师的支持；翟小清总工程师对文集进行了编排、校对工作，在此一并表示诚挚的感谢和敬意。最后还要感谢夫人康季常高级工程师对我几十年来的全力支持和关心。

本书共收集文章50篇，按发表时间先后进行编排，原文出处及合作者名记于文章的末尾处，由于出版时间仓促，书中难免有疏漏之处，敬请批评指正。

作　　者

2000年10月于郑州

目 录

1. 人造金刚石晶体生长与压力、温度关系的研究	1
2. 高温高压下无定形碳向金刚石结构转变的研究	9
3. 选择合成金刚石用石墨材料的若干问题	13
4. 含硼金刚石的合成和硼对金刚石晶体性能影响的研究	21
5. 触媒参与下金刚石晶体生长机理的探讨	29
6. 硼元素对金刚石晶体性能的影响	35
7. 石墨—金刚石平衡曲线	40
8. 苏联关于 Mn-Ni-C 系合金与金刚石晶体生长关系的研究	50
9. 苏联关于人造金刚石晶体中包裹体的研究	56
10. 国外超硬材料发展水平综述	62
11. 再结晶石墨对金刚石成核的影响	72
12. 中国超硬材料发展 30 年——纪念我国人造金刚石诞生 30 周年	75
13. 超硬材料发展与硬质合金顶砧、压缸的大型化	85
14. 影响硬质合金顶砧使用寿命的若干因素	91
15. 关于我国超硬材料行业发展的若干思考	97
16. 应用——人造金刚石工业发展的动力	103
17. 90 年代前期国际超硬材料市场演变带来的思考	107
18. 碳源特性与金刚石晶体生长	113
19. 金刚石形核规律的观察与分析	118
20. 提高企业经济效益的有效方法——挖潜	121
21. 高压传压与密封介质的技术特性及其稳定性	124
22. 金刚石生产技术若干问题的探讨	128
23. 人造金刚石晶体颜色与杂质成分、缺陷的关系	133
24. 金刚石合成技术的新进展	138
25. 关于我国人造金刚石未来发展的思考——献给我国人造金刚石诞生 35 周年	144
26. 粉状触媒的技术特性及其对金刚石合成的影响	150
27. 国外人造金刚石工业的建立与发展	155
28. 人工合成金刚石早期实验研究工作概述	161
29. 国外人造金刚石晶体生长机制的研究	167
30. 高压腔体大型化是实现金刚石高产、优质、低成本生产的技术基础	173
31. 高科技产品——人造金刚石	176
32. 触媒特性与金刚石晶体生长	180

33. 金刚石合成中常见现象及其分析	184
34. 在杭州纳米结构金刚石发展研讨会上的讲话	191
35. 金刚石合成技术的第三次大飞跃——纳米结构金刚石研究与应用的兴起	193
36. 纳米结构金刚石的性质	196
37. 纳米结构金刚石的应用(综述)	200
38. 炸药爆轰合成纳米结构金刚石	204
39. 我国人造金刚石晶体生长机理研究概述	210
40. 我国合成金刚石用触媒合金实验研究的回顾(综述)	215
41. 石墨特性与金刚石晶体生长	220
42. 合成块的组装方式与金刚石的合成	227
43. 金刚石晶体的 V 形生长区	234
44. 金刚石成核过程的工艺控制	240
45. 高品级金刚石产业化的若干问题	247
46. 铰链式六面砧超高压高温装置	254
47. 金刚石膜——21 世纪的材料	260
48. 超硬材料产品水平的评价与分析研究	268
49. 试论人造金刚石行业的战略转变	277
50. 纳米材料的崛起与发展	281
王光祖工作年表	287

1. 人造金刚石晶体生长与压力、温度关系的研究

自从 Lavoisier A 和 Tennant S 发现石墨和金刚石都是由碳组成以后,人们对如何由石墨向金刚石转变发生了极大兴趣。经过长期的探索,终于在 20 世纪 50 年代初,在超高压、高温条件下,利用某些熔融金属成功地实现了由六方结构的石墨向立方结构的金刚石的转变。随着人造金刚石晶体生长技术研究的发展,人们对石墨向金刚石转变的机理提出了诸如固相转变、催化和从过饱和溶液中结晶等不同的论点。

目前,用于人造金刚石晶体生长的方法主要有:第一,静态超高压、高温法;第二,动态超高压、高温法(或称冲击波法)。其中以静态超高压、高温法应用得最普遍。

我们遵照毛主席关于“独立自主、自力更生”的教导,在我国自行设计、制造的 DS-023 型超高压、高温装置上,开展了人造金刚石晶体生长技术的研究,并已取得显著成果。

超高压腔中的压强是借助于^[1]Bi_{1.1} 2. 55GPa、Tl_{1.1} 3. 67GPa、Ba_{1.1} 5. 50GPa、Bi_{1.1} 7. 7GPa 等金属元素在高压下相转变时所伴随出现的电阻或体积突变来标定的。高温是用 Ø0.3mm 的 Pt-Pt-10%Rh 热电偶测得的。碳素材料为光谱纯人造石墨或光谱纯石墨电极。熔媒以第八族的镍、钴、铁为基,加入硅、铬、锰、铜等元素所组成的二元或多元合金。

一、实验及其结果

一般认为,一个晶体的生长由以下两个因素决定:一个是它的内部构造,另一个是它的外部条件。对于人造金刚石晶体生长来说,压力、温度、熔媒是生长过程中几个重要的外部条件。它们都按自己的特性影响着晶粒的生成和长大。实践证明,改变其中任意一个因素都会引起晶形、色泽和晶体缺陷的显著变化。本文着重研究压力、温度对金刚石晶粒的形成和长大所起的作用。

1. 压力的试验

压力是改变物质性质的重要因素之一。对于由石墨转变为金刚石这样一个体积缩小、结构发生重大变化的过程,压力所起的作用尤为重要。为了观察压力对金刚石晶粒的形成和长大所产生的影响,我们在同一指定的温度条件下,对不同的压力进行对比性试验。结果表明:在一定的压力范围内,压力由低到高,晶粒生成数目和生长速度是逐渐增加的,所获得的晶体由规则到不规则,由单一完善(相对来说)晶体到连生严重,缺陷较多,色泽由浅变深。对于结晶量、粗晶粒的百分比、抗压强度与压力的关系,分别如图 1、图 2 和图 3 所示。

由图可知,随着压力的升高,结晶量增多,而较粗的晶粒百分比和抗压强度均下降。

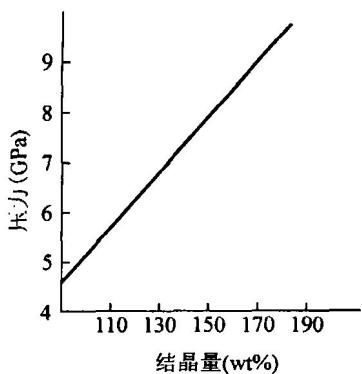


图1 结晶量与压力建制的关系

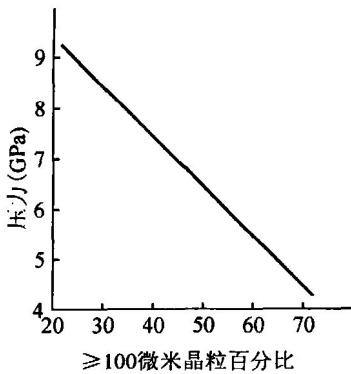


图2 粗晶粒的百分比与压力建制的关系

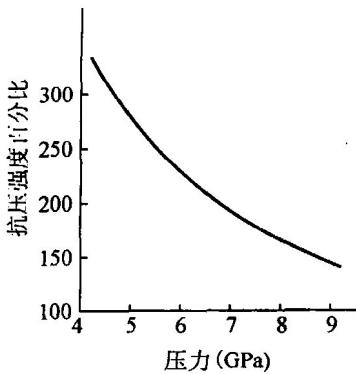


图3 抗压强度与压力建制的关系

2. 温度的试验

人造金刚石晶体生长的温度与所使用的熔媒有关。这个温度随压力的增加而增大。也就是说，压力低，温度范围窄；反之，温度范围宽。为了在一定范围内观察温度对金刚石晶粒的形成和长大的影响，我们在保持压力不变的情况下，对不同温度进行了对比性试验。结果表明，温度这个因素对金刚石晶粒的形成和长大所起的作用更为复杂。通过大量的实验发现，在一定的压力条件下，温度变化与晶粒数目之间的关系有：①在靠近石墨—金刚石平衡线的温度（即高温），形成的晶粒数目少（如图4）；②在熔媒金属熔融和熔媒金属与碳组成的共晶线之间（即低温），形成的晶粒数目也少（如图5）；③介于上述两者的温度之间（即为中温），比在上述温度所形成的晶粒数目有大量的增加（如图6）。



图4 高温晶体生长特征照片

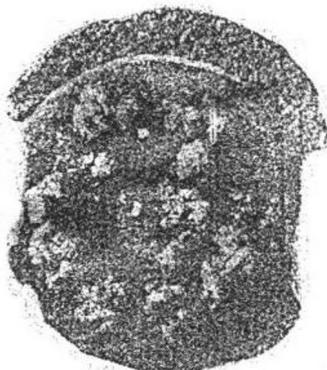


图5 低温晶体生长特征照片



图6 中温晶体生长特征照片

我们对各种熔媒在金刚石热力学稳定区内所划定的金刚石晶体实际生长范围，压力、温度的变化与晶粒生成数目之间的关系都有上述三种结果。因此，可将金刚石晶体生长范围粗略地分为Ⅰ区、Ⅱ区、Ⅲ区，如图7所示。

Ⅰ区（高温区）生成的晶粒少，晶粒粗，抗压强度高，称为“理想晶体生长区”。

Ⅱ区（中温区）生成的晶粒多，晶粒细，连生严重，抗压强度较低，称为“富晶区”。

Ⅲ区（低温区）虽然晶粒少，但是晶体杂质夹杂严重，抗压强度很低，称为“劣晶区”。

温度变化对晶粒形成数目由图 10 看得十分清楚, 温度的变化还影响着晶体的其它特性。在Ⅲ区由于温度过低, 虽然晶粒较粗, 但晶形不规则, 以细长的、羽毛状的(如图 8)为多。随着温度的逐渐增高, 完整的、球状的六八面体(如图 9)增多。温度由低到高, 其色泽由深变浅, 缺陷随之减少。结晶量、抗压强度与温度的关系分别如图 10 和图 11 所示。

由图 11 看出: 当温度增高, 抗压强度值是随之增加的, 但温度增加到某一值时, 其抗压强度值将出现陡降。产生这种情况的原因, 是由于金刚石晶体生长过程的某些因素使温度升高, 超过石墨—金刚石平衡线而跨入石墨的热力学稳定区, 使金刚石产生碳化。从显微镜下能观察到, 金刚石经石墨化后, 表面发黑粗糙, 晶棱被腐蚀, 抗压强度急剧下降。

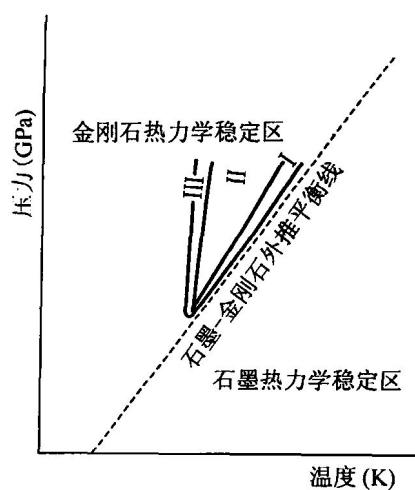


图 7 晶粒生成数目随压力、温度变化分区图



图 8 Ⅲ区晶体形状照片

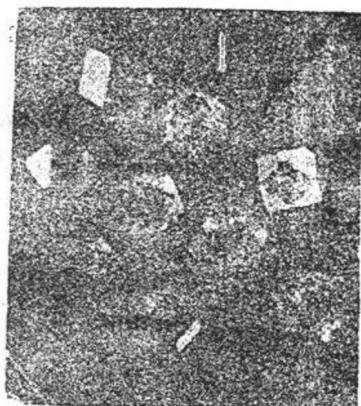


图 9 Ⅰ区晶体形状照片

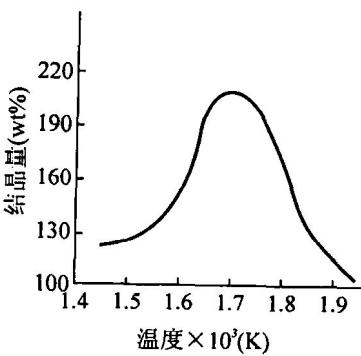


图 10 结晶量与温度的关系

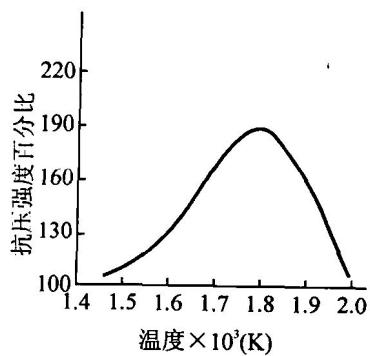


图 11 抗压强度与温度的关系

3. 升温、升压过程的试验

在金刚石热力学稳定区，改变温度、压力有以上结果。而温度、压力采取什么样的过程进入金刚石热力学稳定区，对生成的金刚石晶粒大小及抗压强度也有十分密切的关系。对升温、升压的几种过程分别进行了试验，有如下的结果：

(1) 将压力首先升到金刚石的热力学稳定区指定的试验压力后，将温度一次加到预定值(简称工艺Ⅰ)。结果见后面工艺试验结果讨论的“工艺部(I)”部分。

(2) 当压力未升到金刚石的热力学稳定区前，在压力分别达到 P_{x_1} 、 P_{x_2} 、 P_{x_3} 数值时，将温度一次升到预定的试验点，并同时使压力继续上升到金刚石的热力学稳定区的预定试验压力 P (简称工艺Ⅱ)，试验结果见表1。

表1 工艺Ⅱ的试验结果

加温时的压力	P_{x_1}	P_{x_2}	P_{x_3}
粗晶粒重量%	63	32.5	23
抗压强度%	220	160	100

注： $P_{x_1}=33\%P$, $P_{x_2}=50\%P$, $P_{x_3}=70\%P$ 。

(3) 工艺Ⅲ在三种情况中，由于开始升温试验压力 P 的升压时间不一样，因而预热时间也就不一样，试验结果存在较大的差别。为了弄清这些差别究竟是由于 P_{x_1} 、 P_{x_2} 、 P_{x_3} 的压力差值引起的，还是由于 P_{x_1} 、 P_{x_2} 、 P_{x_3} 到达试验压力 P 的时间不一样所引起的，做了如下试验。在 P_{x_1} 、 P_{x_2} 、 P_{x_3} 的压力下开始升温，并继续升压，使升到压力 P 的时间 t 都为 t_1 (简称工艺Ⅲ)，试验结果见表2。

表2 工艺Ⅲ的试验结果对比

加温时的压力	工艺Ⅰ		工艺Ⅲ	
	P_x 至 P 的时间	抗压强度%	P_x 至 P 的时间	抗压强度%
P_{x_1}	t_1	220	t_1	212
P_{x_2}	t_2	160	t_1	204
P_{x_3}	t_3	100	t_1	220

注：1. $t_1 > t_2 > t_3$ ；

2. P_x 可分别为 P_{x_1} 、 P_{x_2} 、 P_{x_3} 。

综合上述试验结果说明，在一定温度(或压力)下，改变压力(或温度)对于金刚石晶粒的形成和长大的影响是明显的。

当压力未进入金刚石热力学稳定区前，预热时间的延长对提高金刚石晶体抗压强度和晶体尺寸是有利的。

二、分析和讨论

在超高压、高温和熔媒的作用下，由石墨转变成金刚石晶体，是一个受着很多因素影响的晶态转变过程。为了掌握人造金刚石晶体的生长规律和获得晶粒尺寸、抗压强度高的人造金刚

石晶体,就必须控制晶粒的形成数目和生长速度。

众所周知,任何新相的产生都包括有两个性质完全不同的阶段,一个是晶粒的形成,一个是晶粒的长大。

晶粒的形成有多种途径,不管何种途径,晶粒形成后所引起系统的自由能变化可用下式表示^[2]:

$$\Delta G = \Delta G_{体} + \Delta G_{表} = V \frac{\rho}{M} (G_{金刚石} - G_{石墨}) + A\sigma \quad (1)$$

为了计算简便,假定晶粒为球形。这样(1)式便可写为:

$$\Delta G = n \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \frac{\rho}{M} (G_{金刚石} - G_{石墨}) + n (4\pi r^2) \sigma \quad (2)$$

式(1)、(2)中: ΔG ——晶粒生成系统中自由能变化;

$\Delta G_{体}$ ——石墨向金刚石转变的体积变化自由能差值;

$\Delta G_{表}$ ——晶粒形成后金刚石与熔媒两相表面自由能差值;

$G_{金刚石}$ ——金刚石的克原子自由能;

$G_{石墨}$ ——石墨的克原子自由能;

ρ ——晶粒密度;

n ——晶粒数目;

V ——晶粒的体积总和;

r ——晶粒半径;

σ ——金刚石表面张力;

M ——原子量。

利用式(2)可作出图 12 的曲线,该曲线表示晶粒半径 r 和系统自由能 ΔG 变化的关系。

从图 12 曲线不难看出:

(1)当 $r_1 < r_k$ 时,系统中自由能变化 $\Delta G > 0$,这种晶粒难以出现,即使出现也不能稳定存在。

(2)当 $r_2 > r_k$ 时,这种晶粒的出现是保持系统中自由能 $\Delta G < 0$,因而它可以稳定存在,当然也可能向着系统中自由能更负的方向发展(即长得更大)。

(3)当 $r_3 = r_k$ 时,这种晶粒出现,是系统中自由能 $\Delta G = 0$,这种晶粒可以稳定存在,也可能继续长大,因而我们称这种 r_k 大小的晶粒半径为“临界半径”。

(4)当 $r_4 < r_3 < r_k$ 时,这种晶粒出现,不但是系统中自由能 $\Delta G > 0$,如果要继续长大,还会使系统中自由能向更正的方向发展,因而像 r_4 这种晶粒是难以出现的。

综上分析:不是所有出现的晶粒都能稳定存在和长大,而只有那些大于“临界半径”的晶粒才有可能稳定存在和继续长大。

因此,有必要首先讨论一下 r_k ,令式(2)中 ΔG 等于零,求出 r_k ,则得:

$$r_k = - \frac{3M\sigma}{(G_{金刚石} - G_{石墨})\rho} \quad (3)$$

在一定温度条件下,自由能随压力的变化可用下式表示:

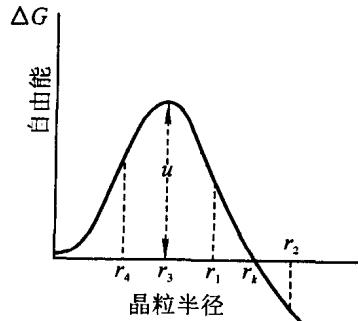


图 12 晶粒半径与系统中自由能的关系

$$\left(\frac{\partial \Delta G}{\partial P} \right)_T = \Delta V \quad (4)$$

当 T 固定时, $d(\Delta G) = \Delta V dP$ 。

当压力由 P_n 平衡线上的压力增加到 P 时, 积分得:

$$\Delta G_{T(P)} - \Delta G_{T(P_n)} = \Delta V (P - P_n) \quad (5)$$

其中 $\Delta G_{T(P_n)} = G_{\text{金刚石}} - G_{\text{石墨}}$, 在平衡线上, 压力如为 P_n , 这时, $G_{\text{石墨}}$ 与 $G_{\text{金刚石}}$ 应相等, 故 $\Delta G_{T(P_n)} = 0$ 。因此, 式(5)可写为:

$$\Delta G_{T(P)} = G_{\text{金刚石}} - G_{\text{石墨}} = \Delta V (P - P_n) \quad (6)$$

在一定温度范围内, 石墨—金刚石平衡线可以近似地视为一直线, 故 P_n 与 T 的关系可表示为:

$$P_n = a + bT \quad (7)$$

式中 a, b 为常数, 如将(7)式代入(3)式即得:

$$r_k = -\frac{3M\sigma}{\Delta V (P - a - bT)\rho} \quad (8)$$

式中: ΔV —— 金刚石和石墨克分子体积差;

P_n —— 平衡压力(大气压);

P —— 试验压力(大气压);

T —— 试验温度(绝对温度)。

从(8)式可能得出: r_k 是温度、压力的函数。 r_k 随压力的增大而减小, 随温度的增大而增大。

根据 r_k 随压力、温度变化的函数关系, 临界晶粒的形成率随温度、压力变化的关系, 可用以下热力学统计规律来表示:

$$W = C e^{-\frac{U}{kT}} \quad (9)$$

式中: W —— 临界晶粒形成率;

k —— 玻耳兹曼常数;

C —— 常数;

T —— 试验温度;

U —— 形成临界晶粒时自由能变化过程中经历的极大值。

令 $\frac{d(\Delta G)}{dr} = 0$, 求 r , 得:

$$r_{\text{极大}} = \frac{2M\sigma}{(G_{\text{金刚石}} - G_{\text{石墨}})\rho}$$

代入(2)式, 经数学处理后, 可得:

$$U = \frac{16\pi M^2 \sigma^3}{3\Delta V^2 (P - a - bT)^2 \rho^2} \quad (10)$$

从(10)式可以得出: U 是温度、压力的函数, 并且 U 随压力的增大而减小, 随温度的增大而增大; 也就是说, 在温度比较高、压力比较低的条件下生长的金刚石晶体, 要比在压力比较高、温度比较低的条件下生长的金刚石晶体越过的 U 值要大, 前者晶粒的形成困难和长大速度慢; 而后者恰好相反。

如将(10)式代入(9)式, 则得:

$$W = C \cdot e^{-\frac{16\pi M^2 \cdot \sigma^3}{3kT\Delta V - (P - a - bT)^2 \rho^2}} \quad (11)$$

由(11)式, 在固定的压力条件下, 可以作出晶粒的形成率 W 和生长速度随温度 T 变化的