数学方法论

张楚廷 著

SHUXUE FANGFALUN ● SHUXUE FANGFALUN

湖南科学技术出版社

张楚廷著

数学方法论

湖南科学技术出版社

数学方法论

张楚廷　著
责任编辑：陈一心

*

湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1989年8月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米　1/32　印张：8.875　插页：(精)5　(平)1　字数：232,000
印数：(精)1——300　(平)1——1,500

(精) ISBN 7—5357—0539—1 / O·64　定价：5.40元

(平) ISBN 7—5357—0540—5 / O·65　定价：3.80元

前言

本书是在笔者两次编写的讲义基础上形成的，并且有三次机会来讲授这些内容。这一经历使笔者确信：读者对这一课题不会是没有兴趣的。

全书共有十二章，分别介绍了数学的推理方法，公理化方法，抽象方法，化归法，模型法，介绍了数学的猜想，数学的悖论，数学的符号，其中有一章论述了数学与美学，另一章讲述了数学与数学家，作为一个开头，我们在第一章通过数的发展叙述了一些数学思想和方法。

我们的目的不仅在于使学习数学的人减少对数学的茫然感、神秘感，而且力图使读者能感受到数学的美妙、充实且强有力，同时看到它也是曲折、多磨但又不是令人望而生畏的。这样就有可能增进我们闯进数学世界的勇气和兴趣，并且由于在一定程度上领略到它的实质、思想和方法而更充满信心。学习数学方法论，既是为了学好数学，又是学习数学本身。

卓越的数学家笛卡儿曾说："那些只是极慢地前进的人，如果总是遵循正确的道路，可以比那些奔跑着然而离开正确道路的走在前面很多。"笛卡儿在此强调的是科学方法的重要性。笛卡儿对一般方法的研究卓有成效，他在1637年出版了重要的著作《更好地指导推理和寻求真理的方法论》。历史上著名的数学家在创造新成果的同时大凡都伴随着新方法的创造，许多数学家对方法论有深刻的论述，牛顿、莱布尼兹皆属此列。近代，数学方法论的研究引起人们更多的关注。

近几个世纪以来，数学取得了巨大的发展，数学的分支已在

百个以上，已有用上百种语言出版的一千多种数学杂志。数学的应用已如此广泛，不仅自然科学各科要用到数学，也不仅经济学要用到数学，而且，史学、文学、语言学等学科也要用上数学了。在这种情形下，思考数学中的许多更为一般的方法论问题显得日益重要。

显然，本书包含了一些哲学的思考，乃至一些思考的哲学，因此对于学习和研究哲学与自然辩证法的读者它也提供一份素材。我们的取材将尽可能是浅显的，服务于本书主题的。

书稿曾由张岳中老师仔细审阅，笔者向他表示衷心感谢，他提出了许多中肯的意见。

本书写作过程中参考过的主要书目开列在书后，笔者向这些著作或论文的作者一并致谢。

笔者学识浅薄，敬请各位对书中的缺点和错误批评，指正。

张 楚 廷

1987年6月

目　录

第一章　数的发展

数学如何描述世界，如何描述外部世界，又如何处理它自身的矛盾运动，这是我们关心的主题。讨论数学如何描述世界，首先要看如何用数描述世界。数的发展自身也包含着矛盾，它处在一个变化、扩展、充实的过程中。我们将叙述一个历史概貌，并且首先从这里开始去观察和了解各种方法及相关的各种数学观点和数学思想。

§1　从有理数到无理数

古代希腊，毕达哥拉斯学派是主张所谓数的宇宙观的，认为“万物的根本是数”，数是宇宙的本源，“凡物皆为数”，整个世界是数的“和谐系统”。毕达哥拉斯学派认为：“一切起源于一”，接下去，二是女人，三是男人，四是正义，等等。

一切起源于一，于是毕派只承认整数（实际仅指自然数）。有理数不过是两整数之比。所以一切都是整数。这样，他们就实际上只承认到有理数为止。后来有人把有理数叫做“有比数”。

但是，不可通约量出现了，正方形对角线的长与其一边的长之比再也不是任何两个整数之比了。这个比值就是现今众所周知的无理数$\sqrt{2}$。发现这一事实的又恰好是毕达哥拉斯学派的一个成员希伯斯。他在此之前还发现了正五边形对角线长与其一边长之比也是不能用两整数表示的，此比值正是$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

于是，神圣的整数不再神圣了，“和谐系统”不再和谐了。毕

派首领想掩盖这一事实，因为这对于他们的宇宙观是致命的．因此限令希伯斯不得向外泄漏天机．但是，希伯斯仍然泄漏出去了．据传，希伯斯后来因此被推到海里淹死了．这些都是公元以前的事了．

宇宙观的影响是一方面．另一方面，历史的发展表明，对无理数的本质及其理论的完整认识确实是十分艰难的．

17世纪，剑桥大学的数学教授、牛顿的老师巴罗还根本不承认无理数．整个18世纪，直到19世纪初，人们对无理数的认识仍然还是贫乏且零散的，不仅系统的理论尚未建立起来，而且人们实际认识的无理数并不多，有的数，人类接触它长达数千年之后，尚不知道它究竟是有理数还是无理数．

直到19世纪中叶之后，关于实数的理论才得以完整地建立起来，从而，对无理数的认识从理论上得以解决．19世纪后半叶，实数理论的研究成果竟如此丰富，以致好几种彼此等价的实数理论纷纷出现，作为整个数学的重要奠基石之一的这一理论，澄清了不少昔日的混乱状况．但这并不等于有关无理数的一切实际问题都已解决了．例如，e^{π}在19世纪尚不清楚它是什么数，π^{e}至今还不清楚它是不是超越无理数。又如，著名的欧拉常数

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right),$$

其近似值为0.577215664901532860606 51，并且用计算机算出到一千位以上，但它是不是无理数也还不知道．

无理数一词的表面含义就是说这种数是不合理的，无理性的。当然，这是囿于人们的认识水平而取名的，事实上，今天一般人也不会认为无理数是不合理的数了．它是“无比的”（不能表为两整数之比），却不是“无理的”．

但是，事情的发展并不是笔直的。毕达哥拉斯之后两千多年，一种传统的宇宙观仍在发生影响．19世纪下半叶，德国著名的数学家克朗列克（他给出了群的公理结构）仍然激烈地反对实无限，否认无理数的存在．他十分挖苦地对在1882年证明了π是超越无

理数的另一德国数学家林德曼说："你那个关于π的漂亮研究有什么用呢？无理数根本就不存在，你为什么要研究这种问题？"克朗列克的名言是："自然数是上帝创造的，其它的都是人的事。"这种观点与两千多年前的毕达哥拉斯观点何其相似乃尔。克朗列克的观点既是对数学科学的一种见解，也包含了他的哲学观点，这使他成为现代直觉主义流派的代表之一。

§2 关于π

前一节，我们曾说到：直到19世纪，人们实际认识到的无理数还是很稀罕的，且基本上局限于代数无理数。

事实上，被找到的第一个超越无理数（即这种无理数不是任何整系数多项式的根，简称为超越数）是1851年由法国数学家柳维尔构造的，它就是（读者不难验证它的超越性）：

$$\frac{1}{10^{1}}+\frac{1}{10^{1\cdot 2}}+\frac{1}{10^{1\cdot 2\cdot 3}}+\cdots+\frac{1}{10^{n!}}+\cdots$$

$$=0.110001000000000000000000100\cdots\cdots。$$

10年之后，法国数学家艾尔米特又证明了自然对数的底$e=2.718281828459045 2\cdots\cdots$是超越数。

所以，人们具体涉及的超越数更为罕见。后来，康托利用集合论的方法不仅从理论上证明了超越数的存在，而且其数量相当大，以致跟全体实数"一样多"，相对来说，代数数（包括代数无理数）就非常少了。

π究竟是什么样的数呢？

人类关于圆的概念可以追溯到最古老的文明史，而圆周长与直径之比（圆周率）π则在很长的时期内被人们所研究着，数千年之前即以开始。我们现在用以表示圆周率的符号π才产生于18世纪初哩。

在古巴比伦数学中，$\pi=3$。这当然是很粗糙、很原始的结果。

约三千多年前，古埃及人得到

$$\pi=4\left(\frac{8}{9}\right)^2\doteq 3.1605。$$

这个结果前进了一大步。

在约两千四百年前的一种圣经中记载着

$$\pi=\sqrt{10}\doteq 3.162。$$

二千二百多年前，大科学家阿基米德得到

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7},$$

$$\pi=3.1419。$$

（我国历史上的数学家何承天于公元4世纪时亦得到此结果.）

大约公元前500年，在印度数学中有关于π的一个奇怪的近似值：

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)^2,$$

$$\pi\doteq 18\ (3-2\sqrt{2})。$$

公元1世纪时，亚历山大前期希腊的普托拉米有一个关于π的六十进制表示式：$\pi=$（3，8，30），亦即

$$\pi=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2}=3.14166。$$

公元3世纪，我国数学家刘徽对圆周率的计算有过重要贡献.他在《九章算术》的注释中指出“周三径一”是不正确的，并且说明所谓周三径一实际上指的是圆的内接正六边形周长与直径长的关系.他创立了割圆术：用圆的内接正多边形的面积去逼近圆的面积.这里已包含了极限的思想，是非常高明的，非常深刻的。

刘徽利用勾股定理得到了以下重要的公式：

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}},$$

其中，R是圆的半径，a_n是内接正n边形边长，a_{2n}是内接正$2n$边形边长.他已知$a_6=1$，由此出发，反复利用上述公式可得（取$R=1$）：

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$a_{24}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$a_{48}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}},$$

$$a_{96}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}},$$

……

$$a_{6\times 2^k}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}},$$

…….

于是圆的内接正$n=6\times 2^K$边形的周长P_n就是

$$P_{6\times 2^k}=6\times 2^k\times a_{6\times 2^k},$$

而圆周率就近似地等于$6\times 2^{K-1}\times a_{6\times 2^k}$。

公元5世纪时，我国历史上杰出的数学家祖冲之推算出

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

这是一项了不起的工作，它精确到了小数点后七位。祖冲之还使用了两个近似分数来表示π：

$$\pi=\frac{22}{7},\ \pi=\frac{355}{113},$$

前者叫"约率"，后者叫"密率"，"密率"的精确度极高，事实上，

$$\frac{355}{113}=3.1415929\cdots\cdots.$$

祖冲之的发现当时在世界上处于绝对领先的地位，一千一百多年之后（即1573年），欧洲人奥托才得到与祖冲之相同精度的π值。

欧洲在中世纪末期还在使用$\pi=\frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$，这是比较落后的。

在奥托之后不久，维耶特（又译韦达）算出了π的9位小数值。此后，有了关于π的第一个无穷乘积表示

$$\pi=2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$\cdots\cdots\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\cdot\cdots\cdots,$$

或

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots\cdots$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\quad}}}\cdot\cdots$$

紧接着，1596年，寇伦算到了π的35位小数值：

$$\pi=3.14159265358979323846\\26433832795028 8.$$

17世纪时，又有了若干关于π的无限表示形式。下面是瓦理斯的无穷乘积表示：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdots.$$

π的无穷级数的出现是一个巨大进步。格利葛利和莱布尼兹都得到了以下表示：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots\cdots.$$

这个表示式很著名，但若按此式计算，如果要精确到阿基米德的结果就需要算上万项，更不要说精确到祖冲之的结果了。计算量很大。

莱布尼兹的上述结果显然是arctg$x$的展开式在$x=1$的取值。为了减少计算量，得到收敛得更快的级数表示，许多数学家利用反正切的变换得到了更好的计算公式，从而推动了π的计算。

1706年，马青得到（tg^{-1}即arctg）：

$$\pi=16\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{5}-4\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{239},$$

1794年，勒让德得到

$$\pi=16\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{5}-4\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{70}+4\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{90},$$

1948年，费尔哥生得到

$$\pi = 12\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{4} + 4\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{20} + 4\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{1985}.$$

这些公式的出现，使得人们用手工计算π值的精度大为提高，最好的结果是精确到数百位小数之后。

π值的计算出现新的飞跃是在电子计算机闻世之后。1958年，π值算到了一万位，过了“万位”大关。嗣后两年，丹尼尔·向克斯和伦奇把π值算到十万位以上。突破“百万位”大关的是盖尤，这是在1973年。1981年，日本人三好和宪与金田康正算到了两百万位以上。

盖尤在算出一百万位之后，作了一个统计，他发现，0，1，2，3，4，5，6，7，8，9这十个号码出现的次数很均匀，都接近十万，其中，“5”出现最多，是100359次；“7”最少，是99800次。

有了好的计算公式，有了大型计算机，π值的计算还可得到更多位数值，千万，万万，……，但是永远也不会算完的。什么原因呢？

1861年，兰伯特证明了π是无理数。他利用欧拉在连分式方面的工作，证明了：当x为非零的有理数时，$\mathrm{tg}x$不可能是有理数。然而，$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$，因此$\frac{\pi}{4}$不可能是有理数。这样就证明了$\pi$是无理数的结论。

1882年，林德曼推广艾尔米特1873年对e的超越性的证明，证明了π乃是超越数。这从理论上对π下了最重要的结论。至此，我们对π的认识算是比较完整了。但也还不能说很完全。例如，前面我们提到，π^e是个什么数，我们就还不知道。

我们专门叙述了人类对π的认识的漫长历史过程，它生动地说明了对无理数认识的艰难性。同时，也说明人类认识有一个渐次逼近的过程。

§3 从正数到负数

约1800年前，我国最古老的数学经典著作《九章算术》中已经

有了正负数概念.其中说："两算得失相反，两令正负以名之."这是给正负数下的明确定义.并且据刘徽注释说，当时是用红色的算筹表示正数，用黑色的算筹表示负数；或者用正列的算筹表示正数，用斜列的算筹表示负数.特别值得注意的是，在《九章算术》中已有了正负数运算的法则："正负术曰，同名相除，异名相益.正无入负之，负无入正之.其异名相除，同名相益.正无入正之，负无入负之。"用现今的语言来叙述就是："两数同号则绝对值的差是余数的绝对值.减数如果是正数且大于被减数时，余数为负号；如果是负数且小于被减数时，余数为正号.两数异号则绝对值的和是余数的绝对值.两数同号则和数的绝对值等于两绝对值之和，两数异号则和数的绝对值等于两绝对值之差.两数异号时，其中正数的绝对值较大则和数取正号，负数的绝对值较大则和数取负号"。

对负数的认识似乎没有对无理数的认识那么艰难，但也并非十分容易.

我国的《九章算术》关于正负数的概念及其运算法则在世界数学史上属于最早的记载。但公元大约3世纪时亚历山大的代数学家丢番图还未承认负数。

公元7世纪时，我国数学家王孝通在所研究的方程中只限于正系数方程，并且也只求正根.

到了公元12世纪时，印度数学家布哈斯卡拉在解以下方程

$$x^2-45x=250$$

时曾得到过负根"-5".但他对负数的有效性持怀疑态度，也给丢弃了.

至于在欧洲，负数被正确认识的时间更晚。

1484年，法国数学家舒开（Chuquet）给出了二次方程的一个负根，但他认为负数是荒谬的数.

卡丹（Cardan）1545年区分了正负数，但他把正数叫做"真数"，而把负数叫做"假数".

著名的德国数学家斯蒂弗尔（Stifel）竟称负数是"无稽之零下"，因为它是从零减去"零上的数"。

韦耶特碰到了负数，但也完全避开它，不承认它。韦耶特对代数的贡献受到局限。

后来，笛卡儿只是部分地接受了负数，他把方程的负根称作假根。

巴斯嘉（Pascal）认为从0减去4纯粹是胡说。

近代数学已在蓬勃发展着的18世纪还有人激烈地反对负数。英国数学家梅琴莱斯声称："代数里决不容许有负根，或者说再一次把它们从代数里驱逐出去，"因为"负数只会把方程的整个理论搞糊涂，而且把一些就其本质来说是出奇的简单明白的东西搞得晦涩难懂、玄妙莫测。"

连达朗贝尔这样著名的数学家也对负数的现实意义表示不能理解，他说："有负数量的代数运算的法则，在常识上还被当做是正确的，但与这些量的本身含义无关。"

负数，在我们今天看来是很简单易懂的，并不"晦涩"，并不"玄妙"，但它的产生过程，尤其是正式被人们接受之前的这段过程，也不平常，这表明：一个新的概念，一种新的方法，被普遍接受有时并不容易，甚至颇费周折。

§4 从实数到虚数

虚数较之负数、无理数出现的时间更晚，笼罩在它身上的神秘色彩也更浓。

在我国古代，由于是用数值解法（如贾宪法、秦九韶法等）来解方程的实根，故未曾引入虚数，虽然实际上碰到了开方运算。

在公元3世纪，丢番图（Diophantus）系统地研究过二次方程，他把一元二次方程分为以下五类：

$$ax^2=bx,\qquad ax^2=c,\qquad ax^2+bx=c,$$

$$ax^2=bx+c,\qquad ax^2+c=bx,$$

但其中a、b、c都是正数。只要承认负数，上述五类方程的后三类显然是一类方程，即统归为形如$ax^2+bx+c=0$的方程。可见，丢