金榜考研成功系列

2004年全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100 TI

主编/李永乐

新华出版社

Beijing Time-Julian Culture Co., Ltd

2004年全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

2004年全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

主　编:李永乐

编　者:(按姓氏笔画)

北京科技大学　申亚男

清 华 大 学　李永乐

北京交通大学　赵达夫

北京交通大学　龚漫奇

东北财经大学　龚兆仁

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学全程预测100题／李永乐主编. －北京：新华出版社,2003.10

2004年全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 7－5011－6384－7

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－习题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第092879号

敬告读者

本书封面粘有策划者专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，请读者注意识别。

2004年全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测100题

主编：李永乐

*

新华出版社出版发行

(北京石景山区京原路8号 邮编：100043)

新华出版社网址：http://xhcbs.126.com

中国新闻书店：(010)63072012

新华书店总经销

北京机工印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米 16开本 11.25印张 268千字

2003年10月第1版 2003年10月第1次印刷

ISBN 7－5011－6384－7/O·75 定价：18.00元

若有印装质量问题，请与印刷厂联系(010)82570299

前　　言

本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学复习备考用书，适合于数学一至数学四4个卷种，内容包括高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计。该书是“数学基础过关660题”一书的姊妹篇。题型为解答题(含计算题、证明题与应用题)。注意，2004年卷子结构改变为：6个填空题，8个选择题，9个解答题，其中填空、选择共56分，解答94分。

硕士研究生入学考试的性质是“具有选拔功能的水平考试”，在强调选拔、强调能力考查的时候，考生除了对大纲中规定的基本概念、基本原理、基本方法深刻理解熟练掌握外，更要不断提高考生解答综合性试题、应用题及证明题的能力。作为研究生入学考试，不能单纯考查数学基础知识，而要在考查三基的基础上注意考查考生的逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力，特别是综合应用所学知识的解题能力。所谓综合题(解答题)就是考查多个知识点的试题，一道好的综合题能把考试大纲要求考查的相关知识有机地结合起来。综合题考查的内容可以是同一学科的不同章节，也可以是不同学科的。

该书预测题全部是解答题。在内容设计上，每题均全新优化设计，涉及两个以上知识点，题型新颖、重点类型突出。几乎涵盖新大纲所有考查知识点。我们相信通过这些试题的训练，一定会尽快提高考生的分析问题和解决问题的能力。

该书每道题都有：分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；解答——该题的详细、规范解题过程；评注——该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

数学离不开计算，考研也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，要提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三拉四，犯“低级”错误。

我们在认真研究历年试题的基础上，该书对考试的重点、难点通过解答题加以分解剖析，对考生常出的错误归纳整理，我们用化整为零各个击破以及基础与综合相结合的方法，

用点面结合，抓住基础突出重点的方法，设计出不同解题思想层次的试题整合成书。同学们在使用本书时，最好能先自己动手想与算，不要急于看解答，评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

研究生考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此与往年相比，数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要，同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历年来相关较大，这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此，希望考生们要根据考试大纲认真踏实全面系统地复习，心态要平和，戒浮燥，要循序渐进，不断积累步步提高，面对激烈的竞争，望有志者抓紧抓细抓早。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003年10月

目　　录

第一部分　高等数学

注意在1～60题中,“分析”是叙述解题思路是如何想出来的,“评注”是叙述该题考到了哪些高等数学的内容,其中重点考查的是哪些,因此“评注”的内容可供数学一至数学四的不同考生检查该题是否属于自己要准备的内容.

1. 设函数$f(x)$在区间 Ⅰ 上可导,且$x \in$ Ⅰ 时,$f(x) \in$ Ⅰ.又已知$x_1 \in$ Ⅰ,$x_{n+1} = f(x_n)$,$n \in N$,证明:

(1) 如$x \in$ Ⅰ 时,$f'(x) \geqslant 0$,则数列$\{x_n\}$单调;

(2) 如$x \in$ Ⅰ 时,$f'(x) \leqslant 0$,则数列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$单调;

(3) 如$x \in$ Ⅰ 时,$|f'(x)| \leqslant K < 1$,则数列$\{x_n\}$收敛,且当 Ⅰ 是闭区间时,方程$x = f(x)$在 Ⅰ 内有唯一解.

2. 设$0 < x_1 < 3$,$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ $(n = 1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

3. 设$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-4)}{\sin \pi x}, & x < 0, \\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x \geqslant 0 \end{cases}$

求$f(x)$的间断点,并判断其类型.

4. 设 $x \geqslant 0$,函数 $a(x), v(x)$ 连续, $u_1(x), u_2(x)$ 可导,且满足

$$u'_1(x) = a(x)u_1(x) + V(x),$$

$$u'_2(x) \leqslant a(x)u_2(x) + V(x), u_1(0) = u_2(0),$$

证明: $x \geqslant 0$ 时, $u_2(x) \leqslant u_1(x)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有连续的导函数,且 $\exists c \in (a,b]$,使 $f'(c) = 0$.求证: $\exists \xi \in (a, b)$,使 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$

6. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 $n(n \in N)$ 阶导数存在,证明:

(1) 如 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,则在点 x_0 的某邻域内存在一个函数 $h(x)$ 满足 $f(x) = (x - x_0)^n h(x)$,且 $h(x)$ 在点 x_0 连续.

(2) 如 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^n} = A$,则 $f(x_0) = f'(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,且 $f^{(n)}(x_0) = n!A$.

7. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}ax^3 + \dfrac{1}{2}bx^2 + 2x$,求常数 a, b, c 使得 $f(x)$ 在 $x = -2$ 取得极值,且 $x = c$ 是 $f(x)$ 的驻点而不是 $f(x)$ 的极值点.

8. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导,且 $\left|f(x)\right| \leqslant 1$,又 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$.证明在(−

2,2) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

9. 设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C,\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0.$

求证:$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0.$

10. 证明方程 $2^x=1+x^2$ 除 $x_1=0$ 和 $x_2=1$ 两个实根外,还有且仅有一个实根 x_3,并指出它的近似值,其误差不超过$\frac{1}{2}$.

11. 设函数 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上非负的可导函数,且满足 $f(0)=0$,

$f(x)-2xf'(x)\geqslant 0\quad (0\in[0,+\infty))$

证明:$f(x)\equiv 0$

12. 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$,并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 设函数 $f(x)$ 连续，$G(x)=\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，

求 $G'(x)$

14. 计算由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=mx(m>0)$ 在第一象限所围成的图形绕直线 $y=mx$ 旋转所生成的旋转体的体积.

15. 设 $f(x)$ 是连续函数，$a>0$ 是常数，证明

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

16. 证明 $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0$

17. $\int_1^2(\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2})\mathrm{d}x$

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且对 $\forall a,b>0$，满足

$$f(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

证明:函数 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,对 $\forall a,b>0$ 成立不等式

$F(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{1}{2}[F(a)+F(b)]$.

19. 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η,使

$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=0,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使

$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

21. 某厂生产某种产品,已知固定成本为10,又产量为 x 时,边际成本 $MC=40-20x+3x^2$,边际收入 $MR=32-10x$. (1) 求总利润函数;(2) 求使总利润最大的产量.

22. 设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$,收益函数为 $R = PQ$,其中 P 为产品价格,Q 为需求量(产品的产量),$Q(P)$是单调减函数.如果当价格为 P_0,对应产量为 Q_0时,边际收益$\frac{dR}{dQ}\Big|_{Q=Q_0} = a > 0$,收益对价格的边际效应$\frac{dR}{dP}\Big|_{P=P_0} = c < 0$,需求对价格的弹性为 $E_P = b > 1$,求 P_0 和 Q_0.

23. 某店一年售某商品 a 万件,这 a 万件商品一年可分几次购进(每次购进数量相同).每次购进时,需付手续费 b 万元.每次购进后,需放到仓库中存起来,随卖随取,库存费为 c 万元/万件·年.设商品均匀销售,库存连续变化且连续计费,每次售完购进.问每年应分几次购进,使总费用最少.

24. 一条光线沿直线 $L:\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-2}$ 射到椭球面上 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3(z > 0)$ 后反射,求反射线方程.

25. 设 $u = u(x,y)$ 有连续的二阶偏导数,且满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u(x,2x) = x, u'_x(x,2x) = x^2,$$

求 $u''_{xx}(x,2x), u''_{xy}(x,2x), u''_{yy}(x,2x)$.

26. 求 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

27. 设 $a>0,b>0$,计算二重积分

$$\iint_D (3x^2+5y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D:x+ay\geqslant 0\quad x^2+y^2\leqslant b^2$

28. 求函数 $\omega=\mathrm{e}^{-2y}\ln(x+z^2)$ 在点 $(\mathrm{e}^2,1,\mathrm{e})$ 处沿曲面 $x=\mathrm{e}^{u+v},y=\mathrm{e}^{u-v},z=\mathrm{e}^{uv}$ 法向量的方向导数.

29. 设 $z=f(t),t=\varphi(xy,x^2+y^2)$,其中 f,φ 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

30. 若函数 $f(x,y,z)$ 对任意的 $t>0$ 满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$,则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数,设 $f(x,y,z)$ 可微,试证:

$f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数 $\Leftrightarrow x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$.

31. 设可微函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定的隐函数,

求 $z=z(x,y)$ 极值.

32. 设 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$ 在闭区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,且 v 还满足方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(1) 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为 $v(x,y,z)$ 沿 S 的外法线方向的方向导数,证明

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(2) 计算

$$\iiint_\Omega\left(2x\frac{\partial v}{\partial x}+2y\frac{\partial v}{\partial y}+2z\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

33. 计算曲线积分

$$\oint_C 2yz\mathrm{d}x+(2z-z^2)\mathrm{d}y+(y^2+2xy-3y)dz,$$

其中

$$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=3(x-y)^2+(x+y-2z)^2,\end{cases}$$

且从原点向 C 看去时，C 的方向沿顺时针方向.

34. 设 $f(x)$ 连续，计算

$$\iint_D x(1 + yf(x^2 + y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围.

35. 设 $D:0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$,

(1) 当 $f(x,y)$ 在 D 上连续且 $f(0,0) = -1$ 时，求

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1 - \mathrm{e}^{-x^3}};$$

(2) 当 $f(x,y)$ 在 D 上可微且 $f(0,0) = 0$ 时，求

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)\mathrm{d}u}{1 - \mathrm{e}^{-x^4}};$$

36. 计算曲线积分

$$\int_{\widehat{AOB}} (12xy + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}x - (\cos y - x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$$

其中$\widehat{AOB}$为由点$A(-1,1)$沿曲线$y=x^2$到点$O(0,0)$，再沿直线$y=0$至点$B(2,0)$的路径.

37. 计算曲线积分

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

其中L是以点$(1,0)$为中心，R为半径的圆周$(0<R\neq 1)$. 取逆时针方向.

38. 计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中S是$1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}(z\geqslant 0)$的上侧.

39. 计算曲线积分

$$\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

其中L是以$(1,0)$为圆心，2为半径的圆的上半圆周，方向是沿逆时针方向.

40. 设$f(x)$是$[0,1]$上单调减的正值函数，证明：