中国技术经济研究会中国成本研究会
成本问题研究班学习参考资料之二十三

线 性 规 划 问 题

南开大学数学系　　　　　史瑞鳌

中　国　技　术　经　济　研　究　会
中　　国　　成　　本　　研　　究　　会
天津市技术经济和管理现代化研究会
中　国　企　业　管　理　协　会　天　津　市　分　会
天　　津　　市　　干　　部　　学　　校

一九八〇年十二月

线性规划问题

在工业、农业、商业、交通运输和工程设计中，我们经常碰到一些要求对现有资源、设备进行统一分配、合理调度或最优设计等问题。如在某地区，把煤如何由生产地点（一般不只一个），合理调运到需要地点（一般也不只一个），而使总运费成本最省这样的问题。

又如在车间中有几种不同的机床，需要加工几种零件，由于机床性能不同，它们加工各种零件的效率也就不同，如何安排各种机床的加工任务，使在一天内，成套的产品最多，这类配套产品的生产问题等等。

在这些类似问题的解决过程中，都必须满足一定的约束条件。如煤的分配中，既要满足各工业城市的需要，又不能超出各煤矿的供应能力。

另一方面在这些问题中，即使在满足所要求的条件下，还有许多不同的方案可供选择，我们的目的是要从这许多方案中选择一个最佳的方案。这类问题我们称为规划问题。

在规划问题的条件和方案中，所涉及的数量关系都是多元一次联立方程组（或不等式组）的情况，则称此规划问题为线性规划。下面我们根据生产实践中的具体线性规划问题，来讨论解决它们的数学方法。

一、劳动力的合理使用

为了提高汽车的利用效率，在货物的运输过程中，常要组织循环运输。这样，一辆汽车由发车场开出后，沿途要经过好几个装卸点，每处由于装卸的货物不同，所需要的装卸工人人数也就不同，如果把工人都固定在装卸点上，这样在车辆少、装卸时间短的情况下，这样各点上的工人就会窝工，造成人力的浪费。当然我们也可以不让装卸工人固定到点上，而让他们跟车走。但当跟车的人数太多，有些点用不了这么多人时，也会造成人力的浪费，又若跟车的人太少，势必造成在某些点不能及时完成装卸任务，这样用多少人跟车，多少人固定到点上，就有一个合理调配问题。下面我们提供一个较简便的编号计算法，这个方法简述如下：

（一）若车数比点数多，工人就固定在点上。

（二）若车比点数少，则根据人数由大到小把各点按顺序编成A_1，A_2，A_3……A_n等号。

（三）若车数是m，则看A_m点需要多少人，就安排多少人跟车，这样所需工人数

最少。

例如某一循环运输系统，有8个装卸点，5辆货车，每个装卸点按需要的装卸工人数的多少排列如下：

A_1点需要8人； A_2点需要6人； A_3点需要6人；
A_4点需要5人； A_5点需要5人； A_6点需要4人；
A_7点需要3人； A_8点需要3人；

由于车数为5，根据前述方法，我们取A_5点的人数为跟车人数，跟车人数共为$5\times5=25$人，而在A_1点需固定工人3人，A_2，A_3点需固定工人各1人，其他点不要安排固定工人，这样共需工人为：$25+3+1+1=30$人这是最少人数。若跟车6人则共需工人数为：$6\times5+2=32$人；若跟车4人则共需：

$4\times5+4+2+2+1+1=30$人；

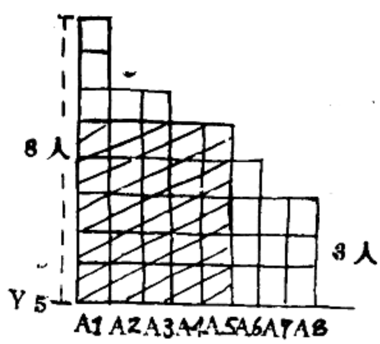
若跟车3人则共需：$3\times5+5+3+3+2+2+1=31$人；

故知30人确是最少的装卸工人数。

上述分配方案所以是最佳方案，可用下面方块图来说明，设每方格代表一个人：

有五辆车我们就确定跟车的人数是A_5，装卸点所需的人数y_5。由于$y_1\geq y_2\geq y_3\geq y_4\geq y_5\geq y_6\geq y_7\geq y_8$

若把跟车人数每车减少一个，则固定在点上的人数至少增加5个，而跟车人数只减少5个，故总人数不会减少，同样的若跟车人数每车减少两人，则跟车共减少了10人，而固定在点上的人数至少增加10人，所以总人数也不会减少。



若把跟车的人数每车增加1人，则跟车共增加了5人，而在各点上所需的人数比y_5多的，最多只有4个点，故固定在点上的人数最多只能减少4个，所以总的人数不会减少。这就说明了跟车人数是y_5时，所用的工人总数最少。

在一般的情况设有m辆车，几个装卸点：A_1，A_2，A_3，……A_n，每个点所需要的人数为：

y_1，y_2，y_3……y_n设跟车的人数为X，我们的问题是求X使目标函数

$$S(X)=mX+(y_1-X)+(y_2-X)+\cdots+(y_i-X)$$

有最小的值，且其中X，Y_i满足下列限制条件：

当 $m \geq n$ 时　　$X=0$　　　　当 $m<n$ 时　　$X>0$

$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \cdots\cdots y_i \geq y_{i+1} \geq \cdots\cdots \geq y_n$

$y_i \geq X$　　其中 $i=1, 2, \cdots\cdots K$ 而 $y_{k+1}<X$

上述这样的问题也是属于我们要讨论的线性规划问题。

二、机床设备的合理分配

在工厂中有各种机械设备，在加工某些配套零件时各种机器设备的效率不同，这样就存在对各种设备如何分配任务才能使机器在单位时间内得到最多的配套产品的问题，现举几个例子来说明解决这类问题的方法。

例1：某车间有A、B、C三种机床，A型1台B型2台C型4台，现用它生产X、Y两种配套零件，$X/Y=1/2$，每种车床对每种零件的生产率如表：

每单位时间产量 \ 机床 / 零件	A型1台	B型2台	C型4台
X	30	20	15
Y	60	30	20

设 αA 为A型机床对X，Y零件产量之比　　$\alpha A=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$

αB 为 B……………………………………　　$\alpha B=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

αC 为 C……………………………………　　$\alpha C=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

则我们知 $\alpha A<\alpha B<\alpha C$

这说明C型机床制作X零件最有利，而A型机床制作Y零件最有利，故我们用A型机床全部生产Y零件，用C型机床全部生产X零件，而B型机床作为使两种零件达到配套比例的平衡机床。

设 a表示在B床上加工X零件的件数

b表示………………Y……………

则有关系式：
$$\begin{cases} \frac{a}{20}+\frac{b}{30}=2 & (1) \\ 60+b=2(15\times 4+a) & (2) \end{cases}$$

化简(1)，(2)式得：$3a+2b=120$　　　　(3)

$$2a - b = -60 \qquad (4)$$

解(3)，(4)联立方程得$a=0$，$b=60$

就是说所有的二台B型机床都加工Y零件才能使产品正好配套。也就使配套的产品数量最多。

在上面例子中，B型机床的分配正好是一整数台，在配套零件的比例不同时，可能出现分数台的解答，这种情况就是要求有一台B型机床在单位时间（例如是一天）内有一部分时间加工X零件，另一部分作Y零件。

现将这一问题建立成数学模型如下：

设在单位时间内三种机床用于生产零件X的时间比为X_1，X_2，X_3，而生产Y零件的时间比为X_4 X_5 X_6

则有关系式：
$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 1 \\ X_2 + X_5 = 1 \\ X_3 + X_6 = 1 \end{cases}$$

其中$X_i \leq 1$　　$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

在单位时间内生产零件X的件数为：

$$30X_1 + 20X_2 + 15X_3$$

生产零件Y的件数为：$60X_4 + 30X_5 + 20X_6$

由于配套的要求知：

$$2(30X_1 + 20X_2 + 15X_3) = 60X_4 + 30X_5 + 20X_6$$

我们的要求是求单位时间内所得的套数E最多。

目标函数$E = 30X_1 + 20X_2 + 15X_3$

这些结果和前节所得类同，是在一组多元线性不等式的条件下，求线性目标函数E的最大值（或最小值）问题，即线性规划问题。

这样在机器型号多，零件品种多的情况求机械的合理分配也是归结为线性规划问题。

同样的对于不同工级的工人，在工种的分配中，为了物尽其力，人尽其才，或量才取用，也是企业管理中的很重要的问题。大家知道，每个工人，体力有大小之别，技术也有高低之分，有的工人干这个活是上手，而干另外的活只能当个下手。根据不同的劳力，分配不同的生产任务，合理的组织生产，提高生产率，显然是生产的指挥者和管理人员义不容辞的职责。下面我们就通过具体例子来说明如何合理地进行劳力分配问题。

例如，有三位工人为某校印刷讲义100本。当然可以这样做：三人一块先把100本讲义纸都数出来(数纸包括裁纸理纸等工作在内)，再进行印刷。但这样做不好，既不快，又给装订讲义的人造成工作上的时紧时松。要解决这个问题，首先要对三个工人数、印讲义的工效有个预期的估计。假设这三位工人的工效如表（1）所示：

人员 任务	张	王	李
数	17	14	9
印	15	14	11

表（1）

这表中的数字说明张同志每天可以数讲义纸17本或印刷15本讲义，以此类推。张同志数得快，让他专门数，李同志印得快，让他专门印；王同志数、印的工效相同，因此可以让他帮助张同志数一个适当的时候以后，再帮助李同志去印，这样才能保证数、印生产作业的平衡，如期印完。显然这种安排比较合理，反过来安排，势必延误时间。这是三个人两种活的情况，人多活路也多时，就要在不增加劳力和劳动强度的条件下，通过劳力的合理分配挖潜来提高生产率。这就是我们的目的。这类问题在厂矿企业中有，在生产队有，就是在搞一个大的科研项目时也有一个科研力量分配问题。我们把这类问题统称为劳力分配问题。如果我们的数纸和印刷工作都是由机床来进行的，那末这就成为机床负荷分配的问题。

不要以为，一概而论地认为数得最快去数，印得最快去印，效率均等的进行调剂。事实上并不一定都是这样。下面我们用一个例子来阐明合理分配劳力的基本方法和步骤：

假设有七人：张、王、李、赵、田、顾、刘共同来完成讲义的印刷任务。

第一步：列出工效表：

人员 任务	张	王	李	赵	田	顾	刘
数（包裁、理纸）	17	14	9	20	8	7	4
印	15	14	11	21	6	9	5

表（2）

第二步：作出工效比

张：$\frac{17}{15}=1.13$　　王：$\frac{14}{14}=1$

李：$\frac{9}{11}=0.82$　　赵：$\frac{20}{21}=0.95$

田：$\frac{8}{6}=1.33$　　顾：$\frac{7}{9}=0.78$

刘：$\frac{4}{5}=0.8$

这些工效比的意思是说：张同志印一本讲义的时间，如果是数讲义的话，可数1.13本；王同志印一本讲义的时间，数讲义也数一本；李同志印一本讲义的时间，数讲义只能数0.82本。如此等等。因此，用比值最大的去数讲义最为合算，而不是派数讲义工效最高的去数讲义，同样，比值最小的派去印讲义为最合算。为此我们把比值大小的关系列在下面：

$$1.33>1.13>1>0.95>0.82>0.8>0.78$$

由此可知：姓田的先派去数讲义，其次是张，再次是王，……。根据同样的道理，印刷工作先分配姓顾的，其次是刘，再次是李……。于是我们得到下面的分配方法。

第三，分配

根据第二步分析：先肯定田同志去数纸，顾同志去印刷。这样在一天内能数出讲义8本，印出讲义9本，由于8＜9即数纸赶不上印刷，因此，需要派张同志去数纸，这样在一天内能数出的讲义数量是(8+17)本，印刷一天只能印9本，从而印刷又跟不上数纸的工作，所以又需派刘同志去印刷，同理，由于8+17＞9+5，还是印刷落后于数纸，故再派李同志也去印刷，这样便得到8+17＜9+5+11，由此，又肯定王同志去数纸。这时在一天内共数出讲义是8+17+14=39本印出讲义是9+5+11=25本，还剩下赵同志的工作任务待定。有经验的同志，可以估计出赵同志用多少时间数纸，用多少时间去印刷，使得数、印平衡。若一时估计不出来，可按下面的简便方法进行计算。

第四步，计算。假定赵同志的总工作时间为1，其中用时间P来数纸，那末1－P时间用于印刷。这样一天内共数出讲义为(39+20P)本，印出讲义为(25+21(1－P)本，为了“配套成龙”，要求数、印数同相等，则得下列方程：

$$39+20P=25+21(1-P)$$

解之得：$P=\frac{7}{41}$

这就是说，赵同志应拿出$\frac{7}{41}$的时间去数纸，而用$\frac{34}{41}$的时间去印刷，这样的劳力分配就是最好的分配方案。

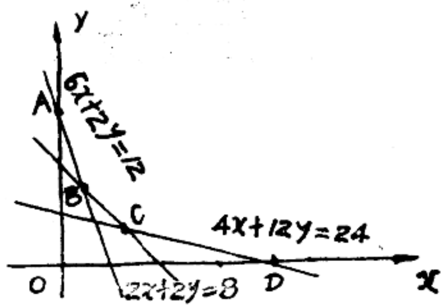
又如一次工程在施工过程中，每天至少需用卵石12吨，小石8吨，砂子24吨，这些建筑材料来自两个采石场，由于两场的地质不同，把采石机安在各场，它在运转时，产量和成本也就不同，将机械安置在Ⅰ场，每机每天可采卵石6吨，小石2吨，砂子4吨，而成本为每天2万元，若安在Ⅱ场，每机每天可采卵石2吨，小石2吨及砂子12吨，其成本为每天1.6万元，问如何安装机械，才能既满足工程需要，又使所花的成本最低。

我们现在这样考虑，假设Ⅰ场安机X台，Ⅱ场安机Y台，则X，Y需满足下列条件：

$$\begin{cases} 6X+2Y\geq 12 \\ 2X+2Y\geq 8 \\ 4X+12Y\geq 24 \\ X\geq 0,\ Y\geq 0 \end{cases}$$

且使目标函数即成本 S（X，Y）最低，这儿 $S(X, Y) = 2X + 1.6Y$；

为了解决这一问题，我们首先将上面五个条件写成等式，并在坐标系中作它们所对应的直线如下图



这五条直线交点依次为 A（0，6）；B（1，3）；C（3，1）及 D（6，0）

满足约束条件的为在折线 $\overline{YA}$，$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DE}$ 的右上方位置中的点（X，Y），我们的目标就是在上述位置中找（X，Y）使 $2X + 1.6Y$ 的值最小，具体的就是在一组平行线：$2X + 1.6Y = K$ 中，将 A，B，C，D 分别代入方程，其中使 $2X + 1.6Y$ 最小的那个点：（1，3）就是使机械安装后成本最低的方案：

$$S(1, 3) = 2 \times 1 + 1.6 \times 3 = 6.8 \text{万元}$$

即在第Ⅰ场安一台，第Ⅱ工场安三台才能使成本最低又能满足工程需要。

三、合理下料问题

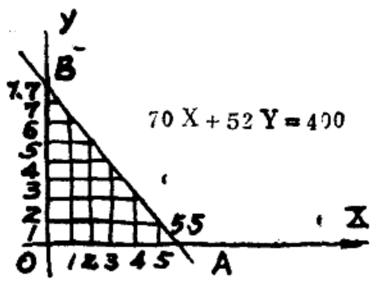
我们在管理生产过程中，对现有原料根据产品的需要，要求我们裁剪成各种规格，这就要求我们考虑如何下料才能使剩余废料最少。这样的问题就称为合理下料问题。

例如在某一工厂中有4米长的一种角铁原料，现根据产品安装，需要52Cm的角铁和70Cm小料，问如何截法使所剩废料最少。

我们采用代数学中列方程和不等式的方法来进行分析：

设 X 为截得70Cm长的根数，Y 为52Cm长的根数。则问题是求满足条件：$70X + 52Y \angle 400$ 的正整数 X，Y 而使目标函数：$S(X, Y) = 400 - 70X - 52Y$ 有最小的值。

这类问题的解决当未知数较少的情况下，我们常采用图示法或列表法来进行推算，现结合上一例子将图示法介绍如下：



在直角坐标系下,我们首先画出直线70 X + 52 Y-400的图 $\overline{AB}$将(Y,X)看作坐标系下一个点的坐标，在不考虑 X, Y是正整数的条件下数量 X, Y的关系就是 A B直线上的点的横纵坐标数， 在三角形 O A B上所有方格的顶点坐标中 X, Y都是正整数，如 (0 , 7); (1 , 6); (2 , 5); (3 , 3); (4 , 2); (5 , 0)等都代表我们问题中的一种截法，显然这些点中靠 $\overline{AB}$直线越近则所废的料越少，在本问题中如采用(2 , 5)的截法正好没有废料也就是采用70Cm的 2 根，52Cm的 5 根，这种截法最合适。

这是下料问题中最简单的一种例子，在一般的情况，未知数不止二个（也就是小料的品种不止两种），长的原材料规格也不一定只有一种，在一般情况就要采用列表分析法来处理。

仍用上例的条件， 再加上小料70Cm的 3 根52Cm的 1 根为一套成料。 而原料共有49根，问如何截法使得到的成料套数最多，显然每种截法所用的原料根数不同，所得成料套数一般也是不一样的，现把问题列成下面表格

下料方法	下料数量		每根长料中的用料量	每根余量	各种方法所用长料数
	X = 70 C m	Y = 52 C m			
B_1	$a_{11} = 5$	$a_{21} = 0$	350	50	Z_1
B_2	$a_{12} = 4$	$a_{22} = 2$	384	16	Z_2
B_3	$a_{13} = 3$	$a_{23} = 3$	366	34	Z_3
B_4	$a_{14} = 2$	$a_{24} = 5$	400	0	Z_4
B_5	$a_{15} = 1$	$a_{25} = 6$	382	18	Z_5
B_6	$a_{16} = 0$	$a_{26} = 7$	364	32	Z_6

设D x表示每套中 x类料的个数，这儿D x = 3

D y…………… y……………………… D y = 1

E为下料后所得总套数。

则有条件：

$$\begin{cases} Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6 \leq 49 \\ a_{11}Z_1+a_{12}Z_2+a_{13}Z_3+a_{14}Z_4+a_{15}Z_5+a_{16}Z_6 \geq 3E \\ a_{21}Z_1+a_{22}Z_2+a_{23}Z_3+a_{24}Z_4+a_{25}Z_5+a_{26}Z_6 \geq E \\ Z_i \geq 0 \qquad i=1,2,3,4,5,6 \qquad E \geq 0 \end{cases}$$

我们的问题是在上述的条件下确定 Z_1，Z_2，Z_3，Z_4，Z_5，Z_6使目标函数 S = E为最大。

这样未知数比较多的多元一次不等式组解最大目标函数的方法一般采用单纯形法，通过列表作业法可以求得结果，在最后附录中我们将专门介绍这种解法的具体过程，以及如何借助电子计算机来解除我们繁重的列表计算工作。

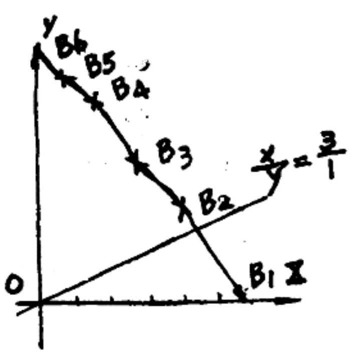
在下两种小料的情况，我们仍可以采用图解法来处理，还以前例来说，我们将6种方法所截得的X，Y数量写成数对如下：

B_1法对应（5，0） B_2法—→（4，2）

B_3法—→（3，3） B_4法—→（2，5）

B_5 —→（1，6） B_6 —→（0，7）

将它画在坐标系中，这些点就标为：



B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，B_6，顺序连成折线 $\overline{B_1B_2}$，$\overline{B_2B_3}$，$\overline{B_3B_4}$，$\overline{B_4B_5}$，$\overline{B_5B_6}$再将X，Y的比例线$\frac{X}{Y}=\frac{3}{1}$划出如图，知它穿过$\overline{B_1B_2}$线段，这说明要按3∶1的比例配套，就用 B_1，B_2这两种方法结合下料最为合理。设用 B_1法下长料a根，用 B_2法下长料为b根。

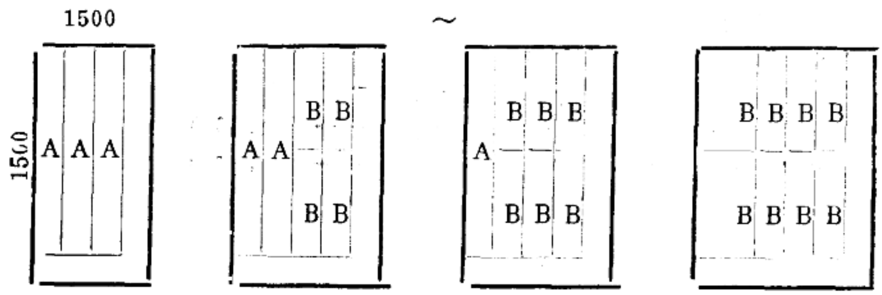
则 $b=49-a$，则有关系式$5a+4(49-a)=2(49-a)\times 3$ 解得 $a=14$，$b=35$，$y=2\cdot b=70$；共配得成料70套。这种下料法取得成料套数最多，也就是废料最少。

在下料问题中，除了棒料外更多的是板料，而零件包含长宽等平面上的直线形图象。

例如在1500mm×1500mm的胶合板上切成小的板料毛坯，其规格及比例如下：

毛坯代号	毛坯规格	每套所需数量
A	420×1400	1
B	320×700	3

问如何下料最为合理：先作草图如下：



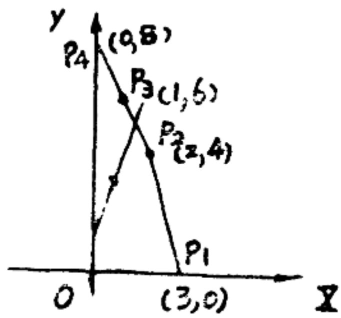
（一）　（二）　（三）　（四）

每块板有上面四种下料方案为了配套列表如下：

下料方法		（一）	（二）	（三）	（四）
下料数量	A	$3=x_1$	$2=x_2$	$1=x_3$	$0=x_4$
	B	$0=y_1$	$4=y_2$	$6=y_3$	$8=y_4$

将A料的数量写作X坐标，B料数量写作Y坐标，这样每种方法就为坐标系中的一点。

如图：四种方法分别对应为P_1，P_2，P_3，P_4四点，将其连成折线，再作过原点0及（1，3）的连线，交折线于$\overline{P_2P_3}$这一段，说明P P这两种方法下料最为合适，现求用这两种方法下料的板材之比，设板材总量为1，用（二）法下料之比例为r则用（三）法的比例为L－r，根据配套关系有：



$$\frac{2\times r+1\times(L-r)}{1}=\frac{4\times r+6\times(L-r)}{3}$$

我们解得 $r=\frac{3}{5}$

即在每五块板料中，三块按第（二）方案下料，而二块按第（三）方案下料，这样得到的套数最多。

与合理下料问题的性质类同，在生产中我们常常需要考虑对一定的原料在制造多种产品时如何合理分配问题。现举一较简单的问题来说明之。

例如某一药厂，用A B两种原料合成X，Y两种药品，X类成药由$\frac{1}{4}$的A原料和$\frac{3}{4}$的B原料合成，而Y类成药是由$\frac{1}{2}$的A原料和$\frac{1}{2}$的B原料合成，现知每克X类成药能得利润0.3元，而每克Y类成药能得利润0.4元，今有A类原料750克，B类原料120克，现问成药X，Y各制作多少，能使获得的利润最大。

设x为X类成药的数量，y为Y类成药的数量，则目标函数：

$S(x, y)=0.3x+0.4y$

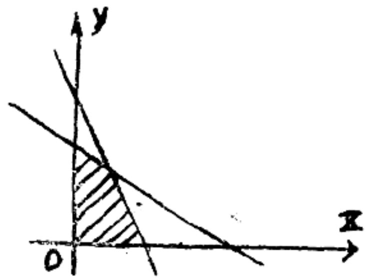
则有条件：$\begin{cases} 0.25x+0.5y\leq 75 \\ 0.75x+0.5y\leq 120 \\ x\geq 0 \quad y\geq 0 \end{cases}$

我们的问题要求x，y的数值在满足上述条件下使目标函数有最大值。

下面我们用图示法解这一问题，先将条件中的不等式写成等式：

$0.25x+0.5y=75$　　　　$0.75x+0.5y=120$

以及　　$x=0$　　　　$y=0$

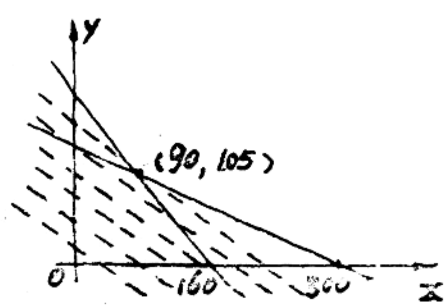


在坐标系下画出这些直线则满足条件的（ x， y ）点应在划斜线的凸四边形区域内。

然后考虑目标函数 $S=0.3x+0.4y$ 让 S分别等于0，1，2，……，M，其中 $M>0$ 这样得到一组平行直线，

$$0.3x+0.4y=0$$
$$0.3x+0.4y=1$$
$$0.3x+0.4y=2$$
$$\cdots\cdots$$
$$0.3x+0.4y=M$$

当M越大平行线离原点越远，这些平行线和凸四边形相交最远的一点（90,105）就是使 S达到最大的 x y。因再远的（ x， y ）就不在凸四边形上，也就是不能满足约束条件了。



这一结论就是当X类药品作90克，Y类药品作105克。这样能使所得利润最大。

当原料品种更多，成药品种也多于两种时就得一组线性不等式，图示法就不能解决，一般都是采用单纯形法来求得最佳方案。

四、物资管理中的数学

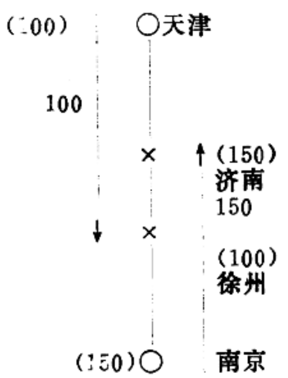
1、运输问题：在某些城镇生产某类物资，而在另一些城镇需要这种物资，这就存在如何由产地调运到需要地点而使所付的运费最省的问题，这种情况统称为运输问题，也叫物资调运问题。我们先来考虑一种运输工具的情况，例如铁路沿线各站的物资运转问题。

（1）无回路的运输，在津浦线上要将天津某一类的工业品100吨和南京的150吨，运往徐州100吨济南150吨。为了简单直观，我们作简图说明运输方案。

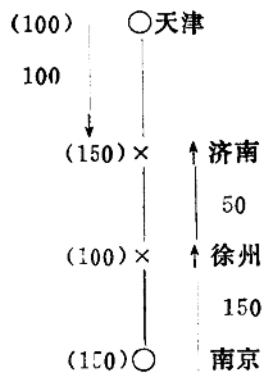
我们把产地用记号“0”表示；

把需地用记号“×”表示；

“→”表示运输路线，箭头表示走向图（一），图（二）表示两种方案



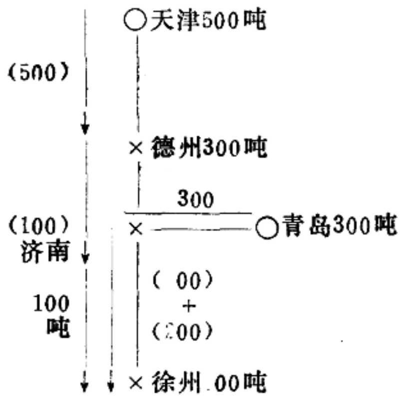
图（一）



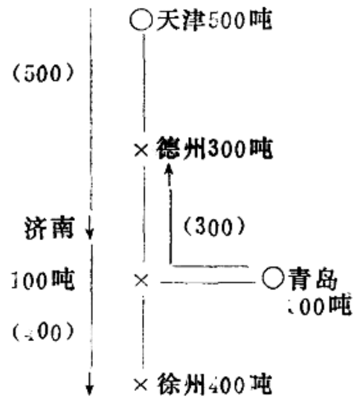
图（二）

在第一种方案中，我们把南京的150吨产品直接运往济南，把天津的100吨运往徐州，这样在济南到徐州这段线路上，有100吨商品出现往返运输的现象，这种现象我们称之为“对流”。显然在运输中出现对流现象，就存在着浪费，这一方案就一定不是最佳方案。再看第二种方案，将天津的产品100吨运往济南，把南京的150吨运往徐州，再把其中50吨继续运往济南，这样就消除了对流现象。在线路不形成回路（路线成封闭曲线的称为回路）时，这样没有对流现象的运输方案就是最佳方案。现举例说明运输方案图解法。

如产地天津有货500吨，青岛有货300吨。今知德州需要300吨，济南需要100吨，徐州需要500吨。作简图说明：

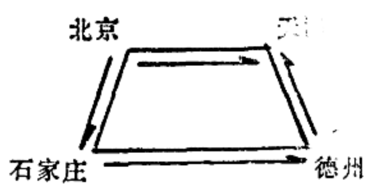


图（一）



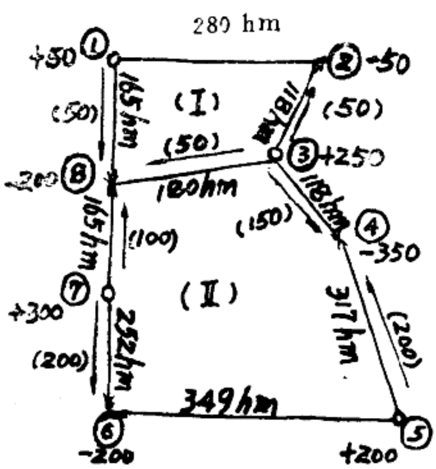
图（二）

将天津500吨运出，到德州卸下300吨，然后将200吨直运徐州，而青岛的300吨运出到济南卸下100吨，然后将200吨运往徐州这一方案没有对流，是最佳方案如图一。当然把天津运出的500吨，到德州卸300，到济南卸100吨，最后把100吨运往徐州，再把青岛的300吨直运徐州，这样也没有对流现象，方案也是最佳的。若把青岛的300吨直运德州，而把天津的500吨运往济南、徐州两地，这样就在德州到济南这段产生300吨的对流，如图（二）。显然这不是最佳方案。总之在没有回路且供需数量相等的情况下，没有对流情况的运输方案就是最佳的。上面例子说明最佳方案不一定只有一个。



（2）存在着回路的情况：如图，天津、北京、石家庄、德州这一段铁路线形成一封闭折线，这样我们称它为一个回路，对运往的箭条我们划在路线右侧，这样箭条在回路内部的（顺时针运送方向）我们称它为内线，在回路外部（逆时针运送方向）我们称它为外线。如由北京运往天津可走内线也可走外线(由北京走石家庄过德州再到天津)。显然走外线是浪费现象，但若由北京运往石家庄则走外线合理，而走内线就是浪费。概括的说不管内线、外线，只要这条线路的运程超过整个回路路程的一半那就不是合理运输方案。这种情况我们称之为对流。在没有对流和迂回的情况，才能使回路情况下的运输达到最佳调运方案。现举一个有两个回路的例子说明方案的寻求。

今有八个车站，它的位置及输出、输入量如图。将输出数量加“+”号，输入数量加“—”号。



在上图中存在两个回路，我们先甩掉每个回路中路程最远的两段①——②和⑤——⑥。这样就成了不是回路的情况。初步考虑调运方案如图，货运单位为吨，路程单位为公里，括号中为货运量。

设在第Ⅰ回路中路线总长为 S_1，在第Ⅱ回路中的路线总长为 S_2 则有：

$$S_1 = 280 + 118 + 180 + 165 = 743\text{Km}$$

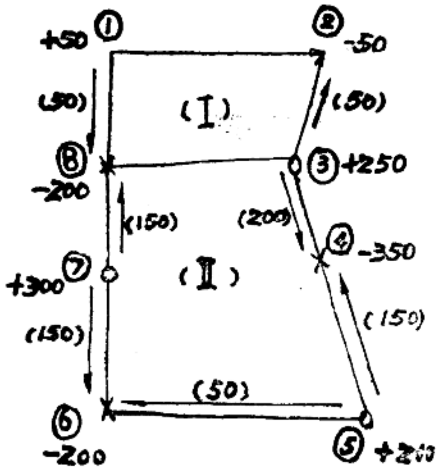
$$S_2 = 165 + 252 + 349 + 317 + 118 + 180 = 1381\text{Km}$$

在第Ⅰ回路中：外线 $e_1 = 118 + 156 = 274 < \frac{743}{2}$

内线 $e_2 = 180 < \frac{743}{2}$

在第Ⅱ回路中：外线 $e = 252 + 180 + 317 = 743 > \frac{1381}{2}$

形成迂回现象情况不合理，故要改变所甩掉的段落。现我们在第Ⅱ圈中改甩运量最小的一段，即③——⑧这一段，重新调运如下图：



在第Ⅰ回路中：

$$外线e_3 = 252 + 317 = 569 < \frac{1381}{2}$$

$$内线e_4 = 165 + 118 + 349 = 632 < \frac{1381}{2}$$

而在第Ⅰ回路中，内线和外线路程都小于回路的一半路程，同时都没有对流现象，可通过检验知它确是最佳方案。

这种方法我们称之为制图作业法，在实践中也是行之有效的一种方法。

（8）在一般的情况下，设物资产地为 x，y，e，三地而需要地点为A，B，C，D，E五处，现将产地运往各需地的数量和单位运费列表如下：

产地 \ 输出量及运费 \ 需地		A	B	C	D	E	各地产量
X	运往各地量	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	100
	每单位运费	12	15	8	25	18	
Y	运往各地量	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	60
	每单位运费	21	22	15	10	11	
Z	运往各地量	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	50
	每单位运费	15	17	15	24	20	
各地输入量		60	30	40	50	10	

其中 X_{ij}表示分别由 x，y，z运往A B C D E各地的产品数量。可列出它们的关系式如下：